

基于“大中贯通”与探究式教学的单摆运动分析及拔尖学生培养实践

李佳朔 滕梓岳 尹冬梅 王治海

(东北师范大学物理学院, 吉林 长春 130024)

摘要 单摆是衔接中学与大学物理的重要经典模型。本文以东北师范大学陆家羲班教学实践为基础, 围绕“小角度近似周期公式失效”这一问题, 引导学生从牛顿第二定律、转动定律和机械能守恒三个视角推导单摆动力学方程, 并通过数值模拟、泰勒展开修正和椭圆积分求解, 逐步深化对近似与精确关系的认识。教学实践表明, 这种以经典模型为载体、以问题探究为路径的教学模式, 有助于贯通中学与大学知识, 提升学生的创新思维与科研素养, 为“大中贯通”背景下拔尖学生培养提供了实践范式。

关键词 单摆; 小角近似; 周期运动; 椭圆积分

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.10.22.02

ANALYZING SIMPLE PENDULUM MOTION THROUGH INQUIRY-BASED LEARNING TO SUPPORT ELITE TALENT DEVELOPMENT IN A SECONDARY-UNIVERSITY CONTINUUM

LI Jiashuo TENG Ziyue YIN Dongmei WANG Zhihai

(School of Physics, Northeast Normal University, Changchun, Jilin 130024)

Abstract The simple pendulum is a classic model that serves as an important bridge between secondary-school and university physics. Drawing on the teaching practice of the Lujiaxi Class at Northeast Normal University, this paper examines the breakdown of the small-angle approximation for the pendulum period and guides students to derive the dynamical equation of the simple pendulum from three perspectives: Newton's second law, the law of rotational motion, and the conservation of mechanical energy. Through numerical simulation, Taylor-expansion-based corrections, and elliptic-integral analysis, students progressively gain a deeper understanding of the relationship between approximate and exact solutions. The teaching practice demonstrates that this problem-driven, inquiry-based approach, built around a classical physical model, facilitates the integration of secondary-school and university knowledge, fosters students' innovative thinking and research literacy, and offers a practical paradigm for cultivating top-notch students in the context of a secondary-university continuum.

Key words Simple pendulum; small-angle approximation; oscillatory motion; elliptic integrals

收稿日期: 2025-10-22; 修回日期: 2026-03-26; 出版日期: 2026-05-20

基金项目: 2022 年吉林省高等教育教学改革研究课题(2022R2VRL9O000D); 教育部产学合作协同育人项目(220906517164144); 大学生创新创业项目(202510200073); 吉林省自然科学基金(20230101357JC)。

通信作者: 王治海, wangzh761@nenu.edu.cn。

引文格式: 李佳朔, 滕梓岳, 尹冬梅, 等. 基于“大中贯通”与探究式教学的单摆运动分析及拔尖学生培养实践[J]. 物理与工程, 2026, 36(3): 264-268.

Cite this article: LI J S, TENG Z Y, YIN D M, et al. Analyzing simple pendulum motion through inquiry-based learning to support elite talent development in a secondary-university continuum[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(3): 264-268. (in Chinese)

单摆是衔接中学物理与大学力学的重要模型,其知识内容由中学“小角度简谐运动”拓展到大学中的动力学建模、近似分析与精确求解,体现了“大中贯通”培养中循序渐进的知识建构逻辑。

在东北师范大学陆家羲班《力学》首课中,教师以“小角度周期公式在大角度下为何失效”为问题导向,通过牛顿第二定律、转动定律和机械能守恒三种方法,引导学生完成理论建构;课后再借助数值模拟和文献支架,组织学生开展误差分析、高阶修正和椭圆积分求解探究。

这一过程体现了拔尖学生在“引导—探究”模式下的深度学习特征:不仅完成多视角推导,还围绕“近似与精确”量化误差、优化方法并拓展理论边界,实现了从接受结论到主动建构方法的思维跃迁,也为“大中贯通”背景下拔尖学生探究式学习提供了实践范例。

1 单摆动力学方程的建立与推导:突出“引导—探究”过程与知识贯通性

1.1 单摆模型的建立

中学阶段对单摆的处理可概括为“两个忽略、两个限制”:忽略绳(杆)质量和空气阻力,限制摆球在同一平面内作小角度摆动。这些假设既构成基础教学内容,也为大学阶段探究模型适用边界奠定了基础。教学中,教师以此为起点,引导陆家羲班学生从“小角度限制是否合理”出发,逐步深化对模型假设的理解。

在大学力学中,单摆动力学方程可从三个角度建立:牛顿第二定律、转动定律和机械能守恒。课堂上,教师进一步引导学生思考“忽略绳质量和空气阻力是否能被实验验证”,激发其对理想模型与实际运动差异的探究兴趣,并为课后自主推导动力学方程做好铺垫。

1.2 单摆动力学方程的推导

如 1.1 节中所述,下面将从三个角度推导单摆的动力学方程。

1) 牛顿第二定律

如图 1 所示,取 θ 增大的方向为正方向,在切向上有

$$ma_{\tau} = -mg \sin\theta \quad (1)$$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = l\ddot{\theta} \quad (2)$$

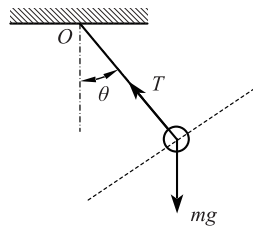


图 1 单摆模型的示意图

由式(1)(2)可以得到

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (3)$$

上式即为单摆的动力学方程。

通过这一教学方法,布鲁纳“发现学习”理论的实质得到了具体落实^[1]。布鲁纳强调,知识并非由教师简单灌输,而应由学习者在主动参与中自主建构,实现“发现学习”。教师并未直接给出“单摆做简谐运动”的结论,而是以高中“力的分解”为起点,引导学生自主推导单摆运动的动力学方程,在参与过程中“发现”相关概念、规律和方法。这样,学生实现了由具体现象到抽象概念与符号表征的认知提升,符合布鲁纳“从具体到抽象”的认知规律。

2) 转动定律

取垂直纸面向外为正,重力对 O 的力矩

$$M = -mgl \sin\theta \quad (4)$$

由转动定律公式

$$M = J\beta \quad (5)$$

其中, J 为摆球绕固定点 O 转动的转动惯量

$$J = ml^2 \quad (6)$$

β 为摆球的角加速度,即

$$\beta = \ddot{\theta} \quad (7)$$

式(4)~(7)联立可以解出

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (8)$$

承接前一种方法,这一教学环节的核心在于引导学生跳出高中以来“质点平动”的思维定式,从“刚体转动”的视角重新审视单摆问题。为完成这种思维过渡并解决问题,教师需提供“转动定律”和“转动惯量计算”两个知识支架,这也正是大学力学相较于高中物理新增的重要内容。该过程体现了维果茨基“支架式教学”^[2]对“最近发展区”的衔接作用:在教师支架支持下,学生得以实现从牛顿第二定律到转动定律的过渡,在降低学习门

槛的同时获得能力提升。

3) 机械能守恒

取过 O 点的水平面为零势能面, 此时摆球的重力势能为

$$E_{pG} = -mgl \cos \theta \quad (9)$$

摆球的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (10)$$

摆球运动的过程中机械能守恒, 即

$$E = E_{pG} + E_k = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = C \quad (11)$$

其中, C 是常数, 式(11)两边同时对时间求导数, 得到

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad (12)$$

即

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (13)$$

最后, 学生通过三种不同的角度推导出了单摆的动力学方程, 其结果一致, 不仅验证了力学规律的自洽性, 更在“多路径解决同一问题”中深化了对“学科基本结构”的理解, 这正是陆家羲班拔尖学生“立体化思维”培养的具体实践。

2 单摆运动周期的计算: 强化“学生探究行为”与“误差分析的教学意义”

2.1 周期的近似计算

在高中时, 学生已经学过, 在摆角很小(通常认为最大摆角不超过 5°)时, 单摆的周期公式可以写作

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (14)$$

此时教师可以引导学生尝试通过近似的理论进行推导。若摆球的摆动角度很小, 即 $\theta \rightarrow 0$, 有近似关系 $\sin \theta \approx \theta$, 得到一个近似方程

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (15)$$

可以看出, 用角位移 θ 来表征摆球位置, 其运动形式为简谐振动, 现取初始条件为 $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, 则近似方程的解是

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (16)$$

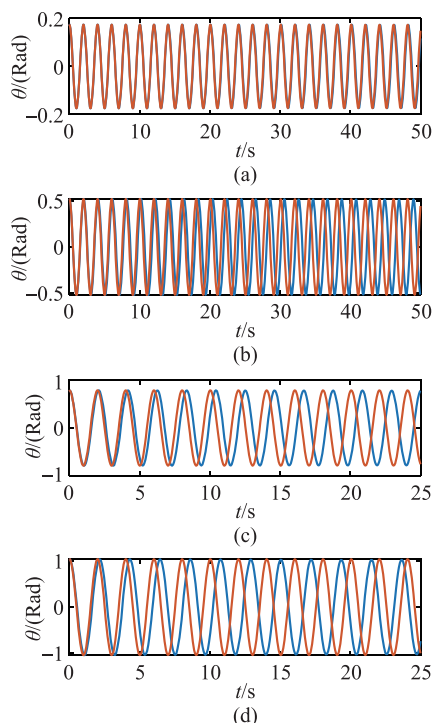


图2 单摆运动数值解(浅橙)与一阶近似解(深蓝)之间的对比。摆球偏离竖直位置的初始角度为(a) 10° , (b) 30° , (c) 45° , (d) 60°

同时, 单摆的运动周期为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ 。

此时, 教师提出“初始角增大到 30° 时, 周期公式是否仍适用”的问题, 引导学生进一步探究。随后, 学生借助数值模拟, 对比不同初始角下近似解与精确解, 直观量化误差边界, 并在数据分析中形成“基于证据质疑假设”的科研意识。

结果表明: 初始角为 10° 时, 25 个周期内近似解与精确解仍较吻合; 增大到 30° 时, 约 5 个周期后便出现明显偏离; 当增至 45° 和 60° 时, 1 个周期后偏差已十分显著。通过 $10^\circ \sim 60^\circ$ 的对比, 学生直观认识到小角度近似误差会随摆角增大而迅速累积, 也为后续高阶修正和精确求解提供了依据。

为减小这种误差, 可利用正弦函数的泰勒展开, 保留高阶项近似进行修正, 即

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad (17)$$

此条件下单摆的动力学方程是

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \quad (18)$$

将满足式(18)的 $\theta(t)$ 的图像与精确解的图像相比较, 如图3所示。

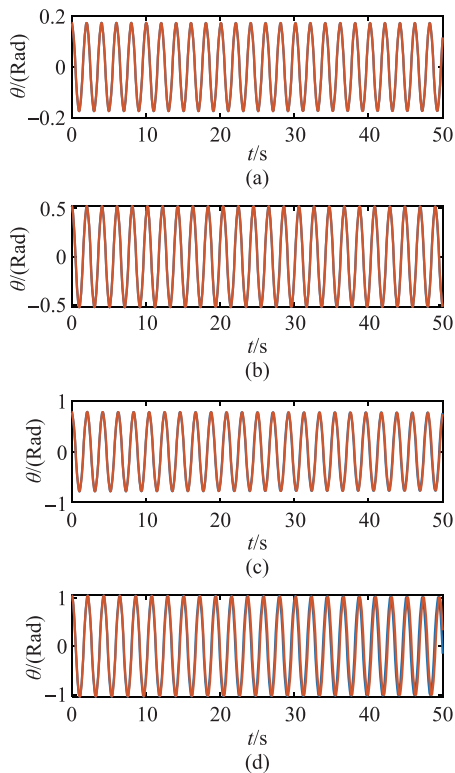


图3 单摆运动数值解(浅(橙))与三阶近似解(深(蓝))之间的对比。摆球偏离竖直位置的初始角度为(a)10°, (b)30°, (c)45°, (d)60°

二者差别显著减小,即使经过25个周期,近似解与数值解仍保持良好吻合,说明引入高阶修正可明显提高结果精度。进一步地,若保留更高阶项,近似解在更长时间内都能接近精确解。学生在三阶近似模拟中发现:即使初始角达到60°,25个周期内二者仍较一致。这一结果促使学生进一步思考高阶近似的适用范围,并引出对精确解必要性的讨论,推动探究深入到椭圆积分求解。

在课堂教学中,教师引导学生运用泰勒展开,自主尝试保留三阶项对近似解进行修正,并通过图3验证三阶近似解与数值解吻合度的提升。这一过程体现了“发现学习”中“主动尝试—验证假设”的核心环节,也展现了拔尖学生由“接受近似”向“优化近似”的探究深化。

2.2 周期的精确计算

当学生发现高阶近似仍无法完全消除误差时,教师进一步引导其查阅《特殊函数概论》等资料,自主接触椭圆积分内容。陆家羲班学生通过小组分工,完成了由公式化简、换元积分到椭圆积

分标准形式推导的全过程,体现出拔尖学生主动拓展知识边界的探究特质。

将单摆的动力学方程重新表述为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\theta\right) = 0 \quad (19)$$

取2.1节中的初始条件,可由式(19)得到

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (20)$$

引入参数 $c = \frac{4g}{l}$, 则有

$$\dot{\theta}^2 = \frac{c}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (21)$$

利用二倍角公式化简式(20),得到

$$\dot{\theta}^2 = \frac{c}{2}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (22)$$

即

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{u^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = \sqrt{c} \quad (23)$$

其中, $u = \sin\frac{\theta_0}{2}$, 是一个常数, 对式(22)在 $\frac{1}{4}$ 个周期内积分, 并作换元^[3]

$$\sin\frac{\theta}{2} = u \sin\xi \quad (24)$$

整理得到

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 \sin^2\xi}} d\xi \quad (25)$$

式(25)为第一类完全椭圆积分^[4], 用标准椭圆积分计算, 周期可以表示为

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(u) \quad (26)$$

即为单摆周期的精确表达式。然而, 第一类完全椭圆积分并无解析解, 通常只能借助级数展开获得近似周期解, 表1列出了相关结果及其适用范围。

这些内容由学生通过文献调研整理, 并结合推导进行补充说明, 体现了其自主整合资源、构建知识体系的能力, 也反映了陆家羲班“以学生为主体”的教学成效。与此同时, 学生通过比较泰勒展开近似^[8]与椭圆积分级数展开^[9]的精度差异, 总结不同近似解的适用条件, 进一步深化了对近似方法局限性的理解, 并在文献查阅、方法比较和结论归纳中提升了科研素养。

表 1 单摆模型的一些近似周期解

近似公式		
作者[参考文献]	$T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, b=\cos\frac{\theta_0}{2}$	适用范围
于凤军 ^[5]	$T=\frac{T_0}{\sqrt{\cos\left(\frac{1}{2}\theta_0-\frac{1}{256}\theta_0^3\right)}}$	$0<\theta_0\leq 70.70^\circ$
Carvalhoes ^[6]	$T=\frac{4T_0}{(1+\sqrt{b})^2}$	$0<\theta_0\leq 86.72^\circ$
Beléndez ^[7]	$T=\frac{4T_0}{(1+\sqrt{b})^2-\left(\frac{1-\sqrt{b}}{2}\right)^4}$	$0<\theta_0\leq 103.30^\circ$
Carvalhoes ^[6]	$T=\frac{8T_0}{(1+\sqrt{b})^2+2^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{4}}(1+b)^{\frac{1}{2}}}$	$0<\theta_0\leq 158.58^\circ$
Carvalhoes ^[6]	$T=\frac{16T_0}{\left[(1+\sqrt{b})+2^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{8}}(1+b)^{\frac{1}{4}}\right]^2}$	$0<\theta_0\leq 178.99^\circ$

3 结语

单摆模型的教学价值不仅在于知识传递,更在于其清晰呈现了从中学简谐运动到大学动力学分析、从近似求解到精确表达的贯通知识脉络,是“大中贯通”拔尖培养中思维、方法与知识贯通的典型示例。其中,思维贯通是基础,关键在于引导学生主动发现、挑战自我。为此,本节课践行了布鲁纳“主动学习”理论和维果茨基“支架教学”方法,使学生基于高中知识完成推导,实现从具体现象到一般理论、从不能完成到能够挑战完成的提升。

作为陆家羲班第一堂探究式教学的成果,本文集中展现了教育学理论指导下拔尖学生的学习成效:在教师搭建的知识支架下,学生围绕问题自主完成多方法推导、误差分析、高阶修正与椭圆积分求解,不仅深化了对力学规律的理解,也形成了“从问题出发、以方法求解、靠创新突破”的科研思维。基于本节课教学形成的本科毕业论文还获评2023年东北师范大学优秀本科毕业论文。

这种“教育学理论引导、经典模型承载、探究

式学习推进”的教学模式,为拔尖学生培养提供了可复制的实践路径。未来可推广至更多经典物理模型教学中,持续服务“大中贯通”目标,助力学生构建贯通式知识体系与创新性科研素养。

参 考 文 献

[1] BRUNER J S. The act of discovery[J]. Harvard Educational Review, 1961(3): 21-32.

[2] WOOD D, BRUNER, J S, ROSS G. The role of tutoring in problem solving[J]. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 1976(17): 89-100.

[3] BORODICH F,金子杰,汤铁铮. 任意摆角单摆运动周期精确解推导分析[J]. 学园, 2024, 17(1): 75-78.

FEDOR B, JIN Z J, TANG T Z. Derivation and analysis of the exact solution of the motion period of a simple pendulum with arbitrary pendulum angle[J]. Academy, 2024, 17(1): 75-78. (in Chinese)

[4] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1965: 354-361.

WANG Z X, GUO D R. Introduction to special functions [M]. Beijing: Science Press, 1965: 354-361. (in Chinese)

[5] 于凤军,景义林. 一个单摆周期近似公式[J]. 大学物理, 2007(5): 18-19.

YU F J, JING Y L. An approximate formula for the period of a simple pendulum[J]. College Physics, 2007(5): 18-19. (in Chinese)

[6] CARVALHAES C G, SUPPES P. Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean[J]. American Journal of Physics, 2008(76): 1150-1154.

[7] BELÉNDEZ A, ARRIBAS E. Approximate expressions for the period of a simple pendulum using a Taylor series expansion[J]. European Journal of physics, 2011(32): 1303-1310.

[8] 吴晓明,王珍. 一种新的精确方法求单摆的周期[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 217-220, 224.

WU X M, WANG Z. A new precise method for calculating the period of a simple pendulum[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 217-220, 224. (in Chinese)

[9] 袁庆新,张新月,邵立. 关于大角度单摆周期近似公式的分析与探讨[J]. 大学物理, 2024, 43(9): 20-23, 62.

YUAN Q X, ZHANG X Y, SHAO L. Analysis and discussion on the approximate formula for the period of a large-angle simple pendulum[J]. College Physics, 2024, 43(9): 20-23, 62. (in Chinese)