

几何切触及其在物理学中的应用

刘全慧

(湖南大学 物理与微电子科学学院 理论物理研究所, 湖南 长沙 410082)

摘要 在数学上几何切触定义了两个函数在某点上近似相等的“程度”, 在物理上, 这个局域性可以解释为区域性且为两个函数在一个区间内近似相等提供了精确刻画。由于物理学没有引进几何切触, 导致了不同的文献对同一个现象的理解和表述互不相同等问题。通过对热力学和统计物理中两个问题的处理, 圆满解决了一些长期存在的分歧。

关键词 热力学; 统计物理; 微分几何; 切触; 第三定律; 玻色-爱因斯坦凝聚

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.12.29.04

THE GEOMETRIC CONTACT AND ITS APPLICATIONS TO PHYSICS

LIU Quanhui

(School for Theoretical Physics, School of Physics and Electronics, Hunan University, Changsha, Hunan 410082)

Abstract Geometric contact provides a precise characterization of the approximate equality of two functions in physics, and its mathematical locality can be interpreted as physical intervality. In physics, the failure to introduce this geometric contact and provide it with a physical interpretation has led to unnecessary controversies in understandings and descriptions of the same phenomenon across various pieces of literature. By addressing two specific problems in thermodynamics and statistical physics, some long-standing unresolved conceptual issues have been resolved.

Key words thermodynamics; statistical physics; differential geometry; contact; third law; Bose-Einstein condensation

物理学中常常涉及两个或者多个单调连续函数在一个区域内相等。例如, 理想玻色气体临界温度及其以下化学势近似为零, 对这个近似为零就缺乏定量的刻画, 导致了文献中至少有三种不同的描述: 第一种, 恒等于零 (identically zero)^[1] 或者简单地等于零^[2]; 第二种, 在有效的意义上为零 (effectively vanishes)^[3] 或者实际意义 (all practical purposes) 上为零^[4]; 第三种, 近似为

零^[5,6]。再如, 热力学中对于恒温恒压下的非平衡化学反应过程, 在零温甚至到室温这么宽的温度范围内, 吉布斯函数极小判据和放热极大判据这两个不同的判据没有差别, 如何精确刻画这个“没有差别”? 不同作者、教师对认识差异甚大。

微分几何中有所谓的切触 (contact) 的概念^[7,8]。如果两个函数在点 P 处的值相等, 且它们的前 k 阶导数也相等, 则称这两个函数具有 k

收稿日期: 2025-12-29; 修回日期: 2026-03-23; 出版日期: 2026-05-20

基金项目: 湖南省重点教改项目资助项目 (HNJG-2023-0147)。

通信作者: 刘全慧, qhliu@hnu.edu.cn。

引文格式: 刘全慧. 几何切触及其在物理学中的应用[J]. 物理与工程, 2026, 36(3): 109-114.

Cite this article: LIU Q H. The geometric contact and its applications to physics[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(3): 109-114. (in Chinese)

阶切触^[7,8]。

用理想玻色气体临界温度及其以下化学势近似为零来说明本文的核心发现:零温时和临界温度时,化学势和零化学势线分别有二阶切触和零阶切触;前者等于零的“程度”比后者高,前者意味着在零温附近的一个区域内化学势为零而后者仅仅在临界温度这个点上为零。

第1节将详细介绍几何切触;第2节将讨论切触的数学局域性和物理区域性;第3、4节将用切触重新梳理热力学中的汤姆孙-贝特洛原理和理想气体中玻色-爱因斯坦凝聚中临界温度化学势为零的问题,在这两节中通过这两个问题详细阐述物理上相等的含义;第5节为简短的讨论和总结。

本文符号的含义取其通行的含义,不另作说明。

1 切触,函数泰勒展开及其截断级数近似

设一个函数 $f(x)$,在某点 x_0 无穷可导,其泰勒展开是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \\ &\quad \frac{1}{2!} f''(x_0) (\Delta x)^2 + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (\Delta x)^j \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\Delta x \equiv x - x_0$ 。如果另外有一个函数 $g(x)$,

其泰勒展开为

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (\Delta x)^j + \\ &\quad \frac{1}{(j+1)!} g^{(j+1)}(x_0) (\Delta x)^{j+1} + \cdots \end{aligned} \quad (2)$$

注意前 k 阶导数依次等于 $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(k)}(x_0)$ 且 $g^{(k+1)}(x_0) \neq f^{(k+1)}(x_0)$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有 k 阶切触。一种特殊情况是,一个函数的泰勒展开保留前 k 项的截断级数后和原函数有 k 阶切触。

以 $\cos(x)$ 的泰勒展开为例说明切触的几何意义。在 $x=0$ 点 $\cos(x)$ 的泰勒展开到前五项是

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \\ &\quad \frac{1}{8!} x^8 \end{aligned} \quad (3)$$

如果分别用 $\cos(x)$ 级数展开的前 k 项 (k 从零开始计数)

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad (4)$$

来近似表示 $\cos(x)$, $g_k(x)$ 和 $\cos(x)$ 在 $x=0$ 点有一阶、二阶、四阶、……、 $2k$ 阶切触,见图1。从图1可以看出一个非常重要的性质,如果知道了

$$g^{(2j)}(0) = (-1)^j, g^{(2j+1)}(0) = 0, \quad j=0,1,2,\dots \quad (5)$$

就可以同时给出函数的定义区域 $(-\pi, \pi)$ 并重构

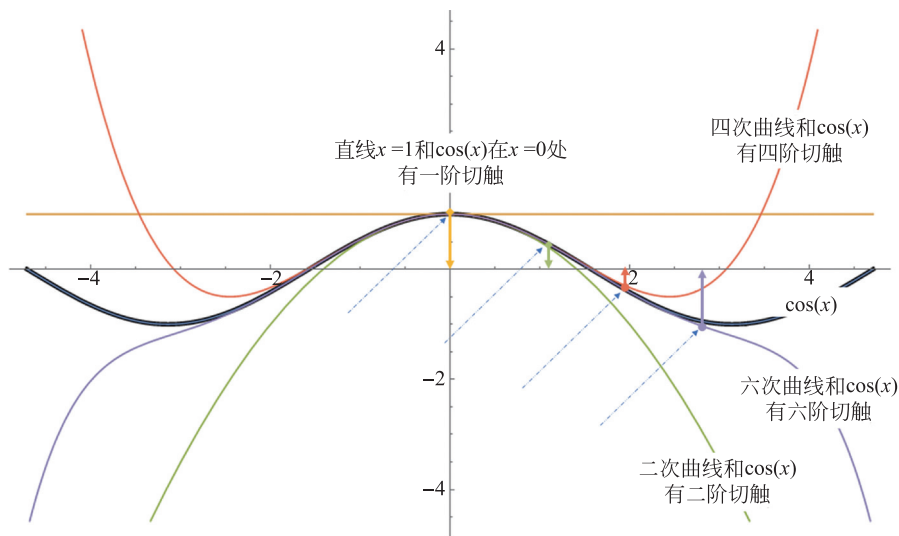


图1 $\cos(x)$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开保留前1,2,3,4项之后的四个截断级数和 $\cos(x)$ 的比较。截断级数的项数越多,它和 $\cos(x)$ 在 $x=0$ 点贴合区间越宽。注意,物理仅仅比较两个单调连续函数,只有 $x=0$ 附近的函数才符合要求,不是全部的函数区间 $(-\pi, \pi)$

出这个函数 $\cos(x)$ 。在数学上,式(5)依然只能说在 $x=0$ 处的局域性质,但是实际上获得的却可能是全部区域的性质。

切触完全可以类似地应用到渐进分析:一个函数的不同渐近曲线也可以使用切触来分类。式(1)和式(2)的关系可以认为当 x 趋近于 x_0 时 $f(x)$ 渐近趋近于 $g(x)$,精度最高可以达到第 k 阶。同理,式(3)和式(4)的关系可以认为当 x 趋近于 0 时函数族 $g_k(x)$ 都是 $\cos(x)$ 渐近曲线,不过精度各有不同。

2 切触中的数学局域性和物理区域性

数学和物理从不同的两面看待切触。微分几何中使用切触,是为了说明两条曲线在某一点处的贴合(touching)^[7]程度,例如说到切触到了 k 阶等。物理不同,如果两个函数在一点相切,即一个区域内在物理上不可区分即相等。

数学认为切触是两个函数在一点处的性质,即局域性。比较 $\cos(x)$ 和它的四阶截断函数之间的差别得到

$$\cos(x) - \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) \approx -\frac{1}{6!}x^6 \quad (6)$$

这个结果说明,如果以 x^6 为尺度来测量二者之间的差别,在 $x \rightarrow 0$ 时,二阶相差 $-1/6!$,不是零。物理学认为切触是两个函数在这个点的邻近区域内的性质,即区域性。这是因为人类对任何物理量测量精度的提升,不仅仅依赖于技术进步,也依赖于理论给出的上限。同样以式(6)为例,如果一个物理量(经过无量纲化之后)是 x ,测量精度上限只有 x^4 ,那么,物理量 x 的两个函数 $\cos(x)$ 和它的四阶截断函数之间就无实际差异

$$\cos(x) - \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) \approx 0 \quad (7)$$

从式(6)和(7)出发,也可以从一般角度定义数学上的局域性和物理上的区域性。

3 汤姆孙-贝特洛原理与一阶切触

汤姆孙-贝特洛原理是判定低温下化学反应过程的一个经验规则:在等温等压条件下,化学反应总是朝着放出最大热量的方向进行^[9]。用切触

重新分析从汤姆孙-贝特洛原理到热力学第三定律的建立过程可以看出,如果当时的物理学界理解了切触,就可以直接从汤姆孙-贝特洛原理引出热力学第三定律。

吉布斯自由能 G 和焓 H 的定义分别为

$$G \equiv U - TS + pV, H \equiv U + pV \quad (8)$$

在等压过程中,如果除了体积变化功之外没有其他功参与,则焓变 ΔH 就是系统在过程中吸收的热量

$$\Delta H \equiv \Delta U + p\Delta V = \Delta U - \Delta W = Q \quad (9)$$

等温等压过程中,吉布斯函数的改变 ΔG 是

$$\Delta G \equiv \Delta U - T\Delta S - p\Delta V = \Delta H - T\Delta S \quad (10)$$

这里的 Δf ($f=U, H, G, S, V$) 是化学反应生成物和反应物两种不同物质的热力学量 f 的差。等温等压条件下的化学反应是一个不可逆过程,必定和吸放热有关。从热力学的第一、二定律可以推出来一个判据,即吉布斯函数 ΔG 往减小的方向进行,即

$$\Delta G \leq 0 \quad (11)$$

或者说,在等温等压过程中,系统对外能做的除 pV 功之外的最大功即吉布斯函数的减少,这就是所谓的最大功原理,是唯一可以利用的判断化学反应方向的热力学原理。最大功原理和热交换关系不大,而汤姆孙-贝特洛原理提示了可能存在新的基本原理。

从式(10)可知

$$\Delta H - \Delta G = T\Delta S \quad (12)$$

由于 ΔS 有界(ΔS 可以通过热量交换出来,如果无界,则必然可以制造第一类永动机),必然有

$$\lim_{T \rightarrow 0} (\Delta H - \Delta G) = 0 \quad (13)$$

这个结果就是图 2 中的虚线。用切触的语言,就是过程函数 ΔH 和 ΔG 在 $T=0$ 点发生了零阶切触。

改写式(8),然后取极限 $T \rightarrow 0$,可得

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta H - \Delta G}{T} = \lim_{T \rightarrow 0} (\Delta S)_T \quad (14)$$

由于全部的分析都建立在等温等压的前提下,不可逆过程中的熵变 $(\Delta S)_T$ 的下标表示等温过程。方程(14)的左边可以利用洛必达法则而改写为如下结果

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta H - \Delta G}{T} = \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T}\right)_{T=0} - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T}\right)_{T=0} \quad (15)$$

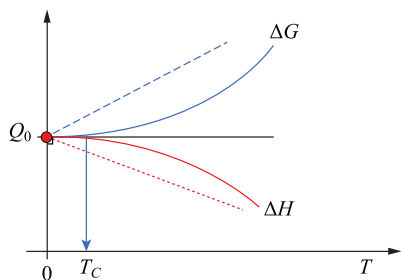


图2 ΔH 和 ΔG 在低温下的行为示意图。仅当温度为零时, $Q = \Delta H = \Delta G < 0$, 和实验结果不符, 如虚线所示。实验结果显示, $\Delta H = \Delta G$ 在零温附近较为宽广的区域 (considerable temperature range) [9] 内成立, 这个区域的上界就是 T_c , 如实线所示

如何把关系式(14)和汤姆孙-贝特洛原理建立起来, 曾经历了数十年的争论和讨论, 关键在于为什么这两种不同的判据在低温下 (实际上有时甚至在室温或接近室温时) 会给出相似的预测呢? [9] 是 Nernst 无意中使用到了切触, 他假设焓变 ΔH 和吉布斯函数的变化 ΔG 在 $T=0$ 时对温度的一阶导数相等, 即 ΔG 和 ΔH 切线相等。这是保证 ΔG 和 ΔH 在零温到甚至室温的区域内近似相等、在一个更宽的温度范围内二者的变化趋势相同的充分必要条件。

把 ΔG 和 ΔH 具有一阶切触换成熵变来表达。式(14)给出了如下的热力学第三定律的 Nernst 表述

$$\lim_{T \rightarrow 0} (\Delta S)_T = 0 \quad (16)$$

有了式(14), 就可以把 ΔG 和 ΔH 物理相等的区域确定下来。在 $T=0$ 的附近区域内, 设最低的非零项正比于 T^2 , 即

$$\Delta H - \Delta G \approx \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial T^2} \right)_{T=0} - \left(\frac{\partial^2 \Delta G}{\partial T^2} \right)_{T=0} \right) T^2 + O(T^3) \quad (17)$$

其中

$$\left(\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial T^2} \right)_{T=0} \neq \left(\frac{\partial^2 \Delta G}{\partial T^2} \right)_{T=0} \quad (18)$$

所谓物理相等, 就是在实验精度范围内无法区分 $\Delta H - \Delta G$, 设实验精度的上限为 $\text{Sup}[|\Delta H - \Delta G|]$, 则可以给出 $\Delta H \approx \Delta G$ 温度区间 $(0, T_c)$, 其中 T_c 满足

$$\text{Sup}[|\Delta H - \Delta G|] \approx \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial T^2} \right)_{T=0} - \left(\frac{\partial^2 \Delta G}{\partial T^2} \right)_{T=0} \right| T_c^2 \quad (19)$$

当温度低于 T_c , 物理上无法区分 ΔH 和 ΔG 。即

$$T_c^2 \approx \frac{2 \text{Sup}[|\Delta H - \Delta G|]}{\left| \left(\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial T^2} \right)_{T=0} - \left(\frac{\partial^2 \Delta G}{\partial T^2} \right)_{T=0} \right|} \quad (20)$$

现在, 热力学第三定律常常用来处理 $T=0$ 及其邻域内的热力学系统的性质, 使得有些人误解汤姆孙-贝特洛原理仅仅是在 $T=0$ 及其狭窄的区域有效。这个看法的错误之处在于把数学的局域性混淆成了物理的局域性, 这里的数学局域性其实是物理区域性。

对于一些具体的物理系统而言, T_c 当然可以达到室温甚至更高。一些具体的物理系统可能不满足式(18), 这个系统就不止一阶切触, 则需要式(17)中寻找最低阶的非零项; 一个具有高阶切触的系统并不意味着这个系统比另外一个仅仅具有一阶切触的系统温度 T_c 会更高。

4 玻色-爱因斯坦凝聚与二阶切触

理想玻色气体出现玻色-爱因斯坦凝聚的关键是需要一个非零的临界温度 T_c 。可以用切触重新分析这个问题。

玻色分布指每个能级 ϵ_l 上的粒子数 a_l 满足如下方程

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} - 1}, \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

设系统总的粒子数为 N , 则全部粒子可以分为基态上的粒子 N_0 和激发态上的粒子 N_e 之和, 即

$$N = N_0 + N_e \quad (22)$$

其中, 基态上的粒子数 N_0 为

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{kT}} - 1} \geq 0 \quad (23)$$

激发态上的粒子数 N_e 可以化为积分

$$N_e \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_l}{e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} - 1} = \int_0^{\infty} \frac{D(\epsilon) d\epsilon}{e^{\frac{(\epsilon - \mu)}{kT}} - 1} \quad (24)$$

积分中的 $D(\epsilon)$ 为态密度

$$D(\epsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad (25)$$

$N_0 \geq 0$ 等价于要求化学势只能为负且零度时的化学势为零, 即

$$-\mu \begin{cases} > 0, & T > 0 \\ \rightarrow 0, & T \rightarrow 0 \end{cases} \quad (26)$$

随温度下降,激发态上的粒子有一个极限值

$$N_e = \int_0^\infty \frac{D(\epsilon) d\epsilon}{e^{\frac{(\epsilon-\mu)}{kT}} - 1} \leq N_{e, \max} \equiv \int_0^\infty \frac{D(\epsilon) d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} \\ = V \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} 2.612 \quad (27)$$

如果温度继续下降, N_e 将为任意小。由于系统中的粒子数 N 是一个常数, 激发态上装不下的粒子就只能落到基态 N_0 上并逐渐累积到宏观可观测的程度, 就形成了玻色-爱因斯坦凝聚体。设这个温度为某个临界温度 T_c , 低于这个温度化学势变化缓慢, 不妨设为零, 即

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \mu(T) \rightarrow 0 \quad (28)$$

剩下的任务就是定量地求出 T_c , 通过一些标准的步骤就可以完成。

切触为临界温度 T_c 提供了完全不同的理解。在热力学极限

$$N \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad n \equiv \frac{N}{V} \text{ 有限} \quad (29)$$

下, 把式(22)的两边同时除以体积 V , 得两个宏观量 $n_0 \equiv N_0/V$ 和 $n_e \equiv N_e/V$ 。因此, 所谓 N_0 达到宏观可观测的程度, 即在热力学极限下, 基态粒子数密度 n_0

$$n_0 \equiv \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{N_0}{V} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{\frac{N_0}{N}}{\frac{V}{N}} = n \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_0}{N} \quad (30)$$

有限, 这要求 $N_0 \rightarrow \infty$ 。注意, 即使宏观上 $n_0 \approx 0$, N_0 也可以是很大的量。

为了清晰地看出切触的作用, 通过式(23)可知零温附近 $T \rightarrow 0^+$, 化学势 μ 通过比 $\mu(T)/T$ 进入 N_0 。由于 $n_0(T \rightarrow 0^+) \neq 0$, 从式(30)知 $N_0(T \rightarrow 0^+) \rightarrow \infty$, 故必有

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\mu(T)}{T} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{T \rightarrow 0^+} \rightarrow 0 \quad (31)$$

其中用到了洛必达法则。从式(31)可知, $T \rightarrow 0^+$ 时 $\mu(T)$ 和 T 轴发生了一阶切触, 见图3。因此, 简单的分析就可以知道一定存在一个较高的温度, 从零到这个温度的有限区间内化学势实际为零。实际上, $\mu(T)$ 和 T 轴有二阶切触, 温度远没有到零, 设为 $T_c > 0$, 化学势就已经实际为零。仅仅考虑化学势对温度的依赖关系, 形式上可以表达成

$$\mu(T_c) = \mu(0) = 0 \quad (32)$$

估计 T_c 的具体数值需要给 T_c 附加一个新的可

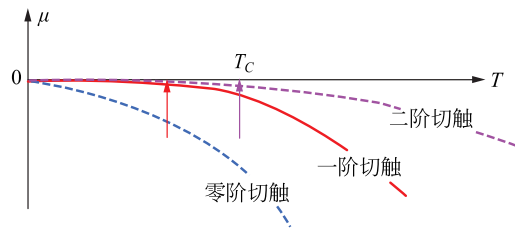


图3 理想玻色气体中的化学势随温度变化曲线。 $T=0$ 时化学势和横轴有二阶切触

能的性质, 即 T_c 是可能的相变点, 然后通过计算发现定容热容量的导数会发生突变。通过一些复杂的计算, 可以得到在 $T=0$ 时的两个结果为

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_{T \rightarrow 0^+} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 \mu}{\partial T^3} \right)_{T \rightarrow 0^+} \neq 0 \quad (33)$$

和 $T=T_c$ 时一个结果为

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{T=T_c} = -\frac{5}{2} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} k \neq 0 \quad (34)$$

其中, ζ 为黎曼 Zeta 函数。考虑到温度区间 $T \in (0, T_c)$ 内化学势 μ 的解析性, 化学势 $\mu(T)$ 在 $T \in (0, T_c)$ 之内并不是恒等于零 (identically zero)^[1], 可以马马虎虎地说等于零^[2], 也可以说在有效的意义上为零^[3], 或者实际意义上为零^[4], 或者近似为零^[5,6]。精确的描述必须用到切触。

5 讨论

物理学中常常要处理两个或者多个连续函数在某点处不仅相等还可以有高阶相切一类的问题, 埃伦菲斯特关于相变的分类、渐近分析等都会碰到这个问题。我们不仅注意到几何切触为这些高阶相切问题提供了严格的一个分类, 还为几何切触提供了物理学的解释, 即两个或者多个函数相等的物理区域性。正是由于 Nernst 无意且实际使用了切触, 才给出了热力学第三定律的 Nernst 表述; 由于历史上物理学没有引入切触, 使得从汤姆孙-贝特洛原理到热力学第三定律的建立, (多余) 花费了数十年的时间。即使在今天, 一些有经验的物理学工作者也不能理解为什么吉布斯函数极小判据和放热极大判据这两个不同的判据在零温到甚至室温这么宽的温度范围内会给出相似的预测。由于两个判据具有一阶切触, 这两个判据在一个低温区间内本来就是一个判据, 即最大功原理就够了。用切触分析零温附近理想玻

色气体的行为,发现一定存在一个非零的临界温度。只有高于这个临界温度,才可以认为基态上没有宏观数量上的粒子密度。如果没有切触,我们只能用含混的语言说 $\mu(T)$ 在 $T \in (0, T_c)$ 之内近似为零,区分不了 $\mu(0^+) \approx 0$ 和 $\mu(T_c^-) \approx 0$ 的不同,实际上,前者和 $\mu=0$ 有二阶切触,后者只有零阶切触。

6 结语

物理学和几何之间的联系甚至有些出人意料^[10,11]。本文系统地介绍了数学中的几何切触,把两个或者多个函数不同阶数的切触解释为他们相等具有不同的级别;定义了数学局域性和物理区域性;演示了在数学上认为一个点的性质在物理上是一个区域的性质。

参 考 文 献

- [1] KHOMSKII D I. Basic aspects of the quantum theory of solids order and elementary excitations[M]. New York: Cambridge University Press, 2010: 56.
- [2] KARDAR M. Statistical physics of particles[M]. New York: Cambridge University Press, 2007: 195.
- [3] MATTIS D C. Statistical mechanics made simple: A guide for students and researchers[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 2003: 99.
- [4] PATHRIA R K, BEALE P D. Statistical mechanics[M]. 3rd ed. New York: Butterworth-Heinemann, 2011: 183.
- [5] FEYNMANN R P. Statistical mechanics: A set of lectures[M]. Massachusetts: Benjamin, 1982: 32.
- [6] HELRICH C S. Modern thermodynamics with statistical mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 215.
- [7] KÜHNEL W. Differential geometry: Curves-surfaces-manifolds[M]. Rhode Island: Amer Mathematical Society, 2005: 12.
- [8] do CARMO M P. Differential geometry of curves and surfaces[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1976: 171.
- [9] CALLEN H B. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics[M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1985: 278.
- [10] 刘全慧. 懂几何者,在物理学中无往而不利[J]. 物理与工程, 2021, 31(3): 3-7.
LIU Q H. Geometry is beneficial to all physics students and researchers [J]. Physics and Engineering, 2021, 31(3): 3-7. (in Chinese)
- [11] 刘全慧. 几何视角下的热力学[J]. 大学物理, 2021, 40(8): 1-4.
LIU Q H. Thermodynamics and geometry [J]. College Physic, 2021, 40(8): 1-4. (in Chinese)