

同频垂直简谐振动的合成 ——质点的运动曲线

陶玲玲 王先杰 刘志国

(哈尔滨工业大学物理学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要 对于同频、相互垂直简谐振动的合成,在相位差取特定值时的处理相对容易,运动曲线的形状及变化规律也可方便导出。当相位差取一般值时,则需要进行坐标变换,才能确定运动曲线的形状及其随相位差的变化规律。本文推导了合成振动质点的运动曲线,讨论了等振幅和非等振幅情况下的质点运动规律。等振幅情况下,若相位差不取特定值,运动曲线为长轴与 x 方向成 $\pi/4$ 或 $3\pi/4$ 角的椭圆;相位差越接近 0 或 π ,椭圆越扁。当振幅不相等时,椭圆的长轴随着相位差的改变发生转动,离心率在相位差接近 0 或 π 时较大。本文有助于加深对同频、相互垂直简谐振动合成的理解。

关键词 垂直振动合成;运动曲线;坐标变换

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.12.14.01

COMPOSITION OF TWO PERPENDICULAR HARMONIC OSCILLATIONS OF THE SAME FREQUENCY —MOTION CURVE OF MASS POINT

TAO Lingling WANG Xianjie LIU Zhiguo

(College of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001)

Abstract It is relatively easy to solve the composition of two perpendicular harmonic oscillations with the same frequency when the phase difference are some specific values, so are the curve shape and its variation. As for the general value of phase difference, coordinate transformation is usually required to give the curve shape and the variation on phase difference. The motion curve of the oscillating mass point is derived, then the motion at equal-amplitude and unequal-amplitude conditions is discussed. With equal amplitudes and general phase difference, the mass point moves on an ellipse whose major axis is at an angle of $\pi/4$ or $3\pi/4$ to the x -axis. The closer the phase difference is to 0 or π , the larger is the eccentricity of ellipse. If the amplitudes are not equal, the major axis of ellipse rotates when the phase difference varies, and the eccentricity becomes larger as the phase difference is close to 0 or π . This paper can enhance the understanding on the combination of two perpendicular harmonic oscillations of the same frequency.

Key words composition of two perpendicular oscillations; motion curve; coordinate transformation

收稿日期: 2025-12-14; 修回日期: 2026-03-19; 出版日期: 2026-05-20

基金项目: 哈尔滨工业大学第十批课程思政教育教学改革项目(本科课程: 固体物理, 230218); 黑龙江省高等教育教学改革研究重点项目(SJGZY2024012); 黑龙江省研究生课程思政课程建设项目(SZKC-2024006)。

通信作者: 刘志国, liuzhiguo@hit.edu.cn。

引文格式: 陶玲玲, 王先杰, 刘志国. 同频垂直简谐振动的合成——质点的运动曲线[J]. 物理与工程, 2026, 36(3): 103-108.

Cite this article: TAO L L, WANG X J, LIU Z G. Composition of two perpendicular harmonic oscillations of the same frequency—Motion curve of mass point[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(3): 103-108. (in Chinese)

同频率、一维简谐振动的合成相对比较容易,利用旋转矢量方法,很容易求出合成振动的表达式,其振幅和初相位都可根据平行四边形法则给出^[1-4]。同频率、相互垂直简谐振动的合成要复杂一些,与两个振动的振幅、相位差有关,质点的运动轨迹可以是直线、圆或椭圆^[1-4]。模拟实验的结果和理论相一致^[5-8]。一些教材既给出了质点运动曲线的方程,也给出了一些特定条件下曲线的形状^[1-4]。如果能给出影响运动曲线的一般因素,并做详细讨论,那么将会加深对同频、相互垂直简谐振动合成的理解,对该部分内容的教学具有积极的作用。

本文首先推导合成振动的质点运动轨迹,再利用坐标变换给出运动曲线的形状,并讨论其关键影响因素。

1 合成振动质点的运动曲线

设两个频率均为 ω 的简谐振动分别沿着 x 和 y 方向, t 时刻,其振动位移分别为

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, A_1 、 A_2 为振幅, φ_1 、 φ_2 为初相位。作如下变量代换

$$\begin{aligned} a &= x/A_1, \quad b = y/A_2 \\ \alpha &= \omega t + \varphi_1, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \end{aligned} \quad (2)$$

则式(1)变为

$$\begin{aligned} a &= \cos\alpha \\ b &= \cos(\alpha + \Delta\varphi) \\ &= \cos\alpha \cos\Delta\varphi - \sin\alpha \sin\Delta\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

进而可得

$$\sqrt{1-a^2} \sin\Delta\varphi = a \cos\Delta\varphi - b \quad (4)$$

将上式平方

$$(1-a^2) \sin^2\Delta\varphi = a^2 \cos^2\Delta\varphi - 2ab \cos\Delta\varphi + b^2 \quad (5)$$

移项后得

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi \quad (6)$$

根据式(2),可得合成振动质点的运动曲线为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi \quad (7)$$

可见,合成质点的运动轨迹取决于两个垂直振动的振幅和相位差。从式(7)可以看出,质点的运动轨迹为二次曲线。因为 x^2 和 y^2 系数的符号相

同,所以除去特殊的 $\Delta\varphi$ 值外,轨迹应为椭圆。

2 质点运动曲线的特征

由式(7)可知,当 $x=0$ 时, $y = \pm A_2 \sin\Delta\varphi$; 当 $y=0$ 时, $x = \pm A_1 \sin\Delta\varphi$; 当 $x = \pm A_1$ 时, $y = \pm A_2 \cos\Delta\varphi$; 当 $y = \pm A_2$ 时, $x = \pm A_1 \cos\Delta\varphi$ 。具体结果如图1所示。

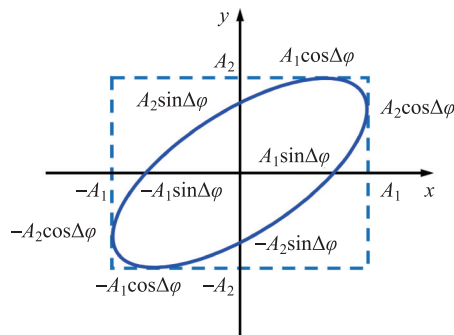


图1 合成振动质点的运动曲线(图中 $0 < \Delta\varphi < \pi/2$)

因为当 x 和 y 达到正负最大值后会向相反方向运动,所以质点的运动轨迹与两边长分别为 $2A_1$ 和 $2A_2$ 的矩形相切。

3 质点的运动方向

若合成质点的运动轨迹为椭圆,则质点的运动方向由相位差 $\Delta\varphi$ 决定。图2给出了振动合成的过程。

设 $t=0$ 时, x 方向振动的相位为零,其旋转矢量位于正向最大位移 A_1 处,沿着 x 轴正向;此时 y 方向振动的相位为 $\Delta\varphi$,其旋转矢量偏离 y 轴正向 $\Delta\varphi$ 角度。质点的位置由 x 坐标和 y 坐标决定,为图2(a)和图2(b)中的 P_0 点。

在下一时刻,沿 x 方向,质点从最大位移处返回,其 x 坐标减小。如果 $0 < \Delta\varphi < \pi$ (图2(a)),质点的 y 坐标相对 $t=0$ 时刻将变小,质点的位置为图2(a)中的 P_1 点;随着时间的推移,质点的位置将依次经过图2(a)中的 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 、 P_6 和 P_7 ,在一个振动周期后回到 P_0 点。如图2(a)所示,质点沿顺时针方向运动。

同理,当 $-\pi < \Delta\varphi < 0$ 时,从 $t=0$ 时刻开始,质点将依次经过图2(b)中的 P_0 、 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 、 P_6 和 P_7 ,完成一次全振动后回到 P_0 点,质点

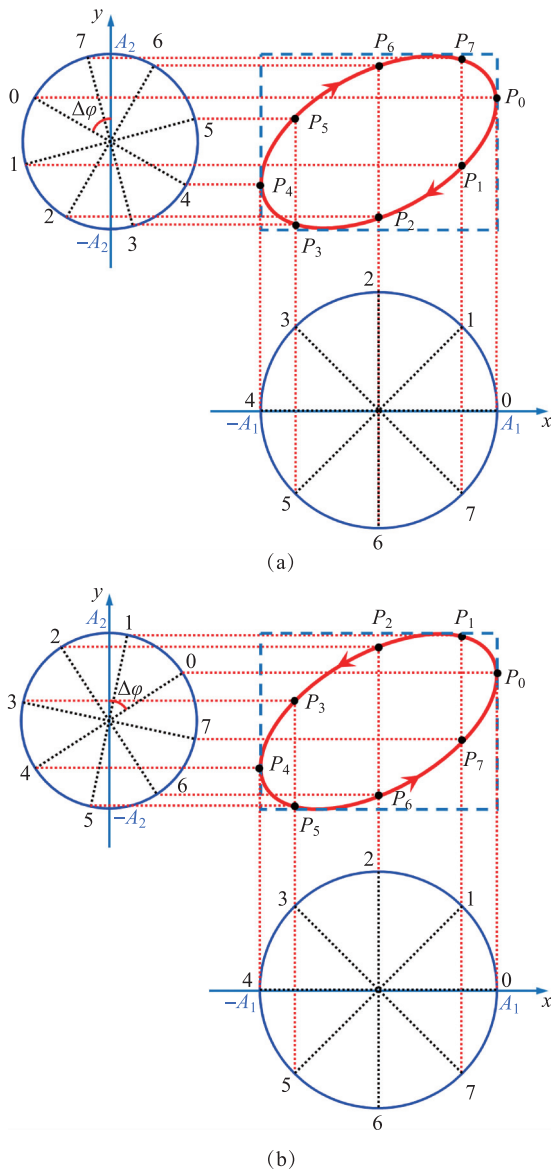


图2 同频、相互垂直简谐振动的合成

(a) $0 < \Delta\varphi < \pi$; (b) $-\pi < \Delta\varphi < 0$

沿逆时针方向运动。

4 相位差取特殊值的情形

当 $\Delta\varphi$ 取一些特殊值时,合成质点的运动曲线(式(7))可以得到简化,形状很容易确定^[1-4]。

4.1 $\Delta\varphi = 0$

根据式(7),运动曲线为

$$\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0 \quad (8)$$

质点沿着斜率为 A_2/A_1 、通过第 1、3 象限的直线作简谐振动,振幅为 $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 。

4.2 $\Delta\varphi = \pi$

运动曲线为

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0 \quad (9)$$

质点沿着斜率为 $-A_2/A_1$ 、通过第 2、4 象限的直线作简谐振动,振幅仍为 $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ 。

4.3 $\Delta\varphi = \pi/2$

将 $\Delta\varphi$ 代入式(7),运动曲线变为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (10)$$

质点沿着以坐标轴为主轴的椭圆作顺时针运动,椭圆的长轴和短轴长度分别为 $2A_1$ 、 $2A_2$ 。若 $A_1 = A_2$,运动轨迹就是圆。

4.4 $\Delta\varphi = -\pi/2$

运动曲线仍为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (11)$$

和 $\Delta\varphi = \pi/2$ 的情况类似,但质点作逆时针运动。

下面讨论 $\Delta\varphi$ 取其他值的一般情况。

5 等振幅的情形($A_1 = A_2$)

对于式(7)所示的曲线,可利用坐标变换确定其具体类型。设 $A_1 = A_2 = A$,则运动曲线方程变为

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\Delta\varphi = A^2\sin^2\Delta\varphi \quad (12)$$

写成矩阵相乘的形式为

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\Delta\varphi \\ -\cos\Delta\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^2\sin^2\Delta\varphi \quad (13)$$

经过坐标变换,将交叉项 $2xy\cos\Delta\varphi$ 消去,曲线的形状便确定了。这其实就是矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\Delta\varphi \\ -\cos\Delta\varphi & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

的对角化过程。

设矩阵 B 的特征值为 λ ,满足

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\cos\Delta\varphi \\ -\cos\Delta\varphi & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

求得 $\lambda = 1 \pm \cos\Delta\varphi$,代入式(14)求得特征向量分别为

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

由此可给出变量代换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中, x' 和 y' 是新的坐标变量, 代入式(13)可得合振动质点的轨迹方程为

$$\frac{x'^2}{A^2(1+\cos\Delta\varphi)} + \frac{y'^2}{A^2(1-\cos\Delta\varphi)} = 1 \quad (18)$$

这是一个椭圆的方程, 其半长轴和半短轴长度为

$$A'_1 = A\sqrt{1+\cos\Delta\varphi} = \sqrt{2}A\cos(\Delta\varphi/2)$$

$$A'_2 = A\sqrt{1-\cos\Delta\varphi} = \sqrt{2}A\sin(\Delta\varphi/2) \quad (19)$$

若 $-\pi/2 < \Delta\varphi < \pi/2$, 则 $A'_1 > A'_2$; 若 $-\pi < \Delta\varphi < -\pi/2$ 或 $\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$, 结果相反, $A'_1 < A'_2$; 两者的平方和保持不变, 为 $2A^2$ 。

式(17)的逆变换为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (20)$$

这对应于一个坐标轴的旋转, 即将 x 轴和 y 轴沿逆时针方向转动 $\pi/4$, 变换到 $Ox'y'$ 坐标系。如图 3 所示, 这个椭圆与边长为 $2A$ 的正方形相切, 长轴或短轴均沿着正方形的对角线方向。

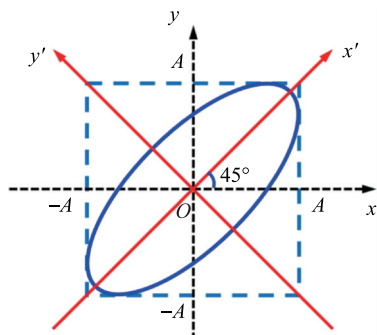


图 3 坐标变换后的坐标轴和运动曲线
(图中 $-\pi/2 < \Delta\varphi < \pi/2$)

显然, 这个椭圆的长轴和短轴长度都与 $\Delta\varphi$ 有关。根据式(19), 当 $\Delta\varphi = 0$ 时, 短轴长度为 0, 椭圆退化成斜率为 1 的直线, 如图 4 所示; 随着 $\Delta\varphi$ 的增加, 椭圆长轴长度 $2A'_1$ 逐渐减小, 短轴长度 $2A'_2$ 逐渐增大; 椭圆长轴位于第 1、3 象限; 当 $\Delta\varphi = \pi/2$ 时, 长短轴相等, 椭圆变为圆; 当 $\pi/2 < \Delta\varphi < \pi$ 时, 椭圆长轴位于第 2、4 象限, 随着 $\Delta\varphi$ 的增加, A'_1 逐渐变小, 对应轴成为短轴, 而 A'_2 逐渐变大, 对应轴变成长轴; 当 $\Delta\varphi = \pi$ 时, 椭圆退化成斜

率为 -1 的直线。当 $-\pi < \Delta\varphi < 0$ 时, 具有类似的变化规律。若 $0 < \Delta\varphi < \pi$, 质点顺时针运动, $-\pi < \Delta\varphi < 0$ 时质点逆时针运动。

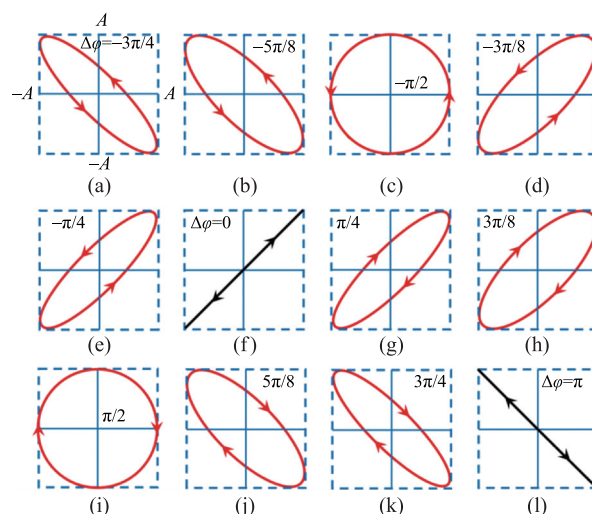


图 4 质点轨迹随相位差 $\Delta\varphi$ 的变化 ($A_1 = A_2 = A$)

当 $\Delta\varphi$ 变化时, 椭圆与正方形(图 4 中的虚线框)的切点位置在 $\pm A$ 之间连续变化, 椭圆的形状也在改变; 但是, 正方形上下和左右两边的切点变化是对称的, 长轴和短轴始终沿着正方形的对角线方向; 相位差 $\Delta\varphi$ 越接近 0 或 π , 椭圆越扁, 离心率越大。

6 不等振幅的情形 ($A_1 \neq A_2$)

根据上述过程, 可直接设坐标变换为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (21)$$

即坐标系 Oxy 逆时针转过 θ 角后就变换到坐标系 $Ox'y'$, 其逆变换为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (22)$$

代入式(7)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1^2}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + \frac{1}{A_2^2}(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 - \\ & \frac{2\cos\Delta\varphi}{A_1A_2}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) \\ & = \sin^2\Delta\varphi \end{aligned} \quad (23)$$

若变换合适, 则交叉项将消失, 即

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right) 2\sin\theta\cos\theta x'y' - \\ & \frac{2\cos\Delta\varphi}{A_1A_2} x'y' (\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

化简得

$$\tan 2\theta = \frac{2(A_2/A_1)}{1 - (A_2/A_1)^2} \cos \Delta\varphi = \tan 2\theta_0 \cos \Delta\varphi \quad (25)$$

其中

$$\tan \theta_0 = A_2/A_1 \quad (26)$$

并用到了公式

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2 \tan \theta_0}{1 - \tan^2 \theta_0} \quad (27)$$

去除交叉项后,式(23)变为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2 \theta}{A_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{A_2^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cos \Delta\varphi}{A_1 A_2} \right) x'^2 + \\ & \left(\frac{\sin^2 \theta}{A_1^2} + \frac{\cos^2 \theta}{A_2^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta \cos \Delta\varphi}{A_1 A_2} \right) y'^2 \\ & = \sin^2 \Delta\varphi \end{aligned} \quad (28)$$

若 $\Delta\varphi \neq 0$ 或 π , 合成振动质点的运动曲线仍为椭圆, 方程为

$$\frac{x'^2}{A_1'^2} + \frac{y'^2}{A_2'^2} = 1 \quad (29)$$

其半长轴和半短轴长度为

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{A_1 A_2 \sin \Delta\varphi}{\sqrt{A_1^2 \sin^2 \theta + A_2^2 \cos^2 \theta - 2 A_1 A_2 \sin \theta \cos \theta \cos \Delta\varphi}} \\ A_2' &= \frac{A_1 A_2 \sin \Delta\varphi}{\sqrt{A_1^2 \cos^2 \theta + A_2^2 \sin^2 \theta + 2 A_1 A_2 \sin \theta \cos \theta \cos \Delta\varphi}} \end{aligned} \quad (30)$$

当 $A_1 = A_2 = A$ 时, 由式(26)可知, $\theta_0 = \pi/4$, 式(28)变为

$$(1 - \cos \Delta\varphi) \frac{x'^2}{A^2} + (1 + \cos \Delta\varphi) \frac{y'^2}{A^2} = \sin^2 \Delta\varphi \quad (31)$$

与式(18)一致, 式(30)中的半长轴和半短轴长度也会回归到式(19)的形式。

图 5 给出了 $-\pi/2 < \Delta\varphi < \pi/2, A_1 > A_2$ ($\theta_0 < \pi/4$) 时的质点运动曲线以及坐标变换。

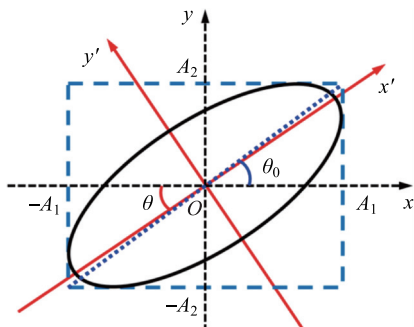


图 5 坐标变换后的坐标轴和运动曲线
(图中 $A_1 > A_2, -\pi/2 < \Delta\varphi < \pi/2$)

图 5 中的虚线框描绘出长和宽分别为 $2A_1$ 和 $2A_2$ 的矩形。根据式(8), 当 $\Delta\varphi = 0$ 时, 质点轨迹为第 1、3 象限内的一条直线, 如图 6 所示。当 $0 < \Delta\varphi < \pi/2$ 时, 由式(25), 易知椭圆的长轴并不沿着矩形的对角线方向, 其与 x 轴的夹角 θ 小于 θ_0 ($\cos \Delta\varphi < 1$)。与等振幅情况 (θ 始终保持为 $\pi/4$) 不同的是, 随着 $\Delta\varphi$ 的增加, 椭圆长轴与 x 轴的夹角 θ 逐渐减小, 且长轴逐渐缩短, 短轴逐渐增加。这一点从式(30)不容易看出, 但从图 1 中切点和交点的变化趋势容易确定。当 $\Delta\varphi = \pi/2$ 时, 椭圆的长轴和短轴分别与 x 轴和 y 轴重合; 若 $\Delta\varphi > \pi/2$, 则 $\cos \Delta\varphi < 0$, 故 $\theta < 0$, 椭圆长轴位于第 2、4 象限。随着 $\Delta\varphi$ 的进一步增大, 椭圆长轴与 x 轴的夹角变大; 当 $\Delta\varphi = \pi$ 时, 质点运动曲线变为第 2、4 象限内的一条直线(式(9))。与等振幅情况类似, 相位差 $\Delta\varphi$ 越接近 0 或 π , 椭圆越扁, 离心率越大; 越接近 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$, 椭圆的离心率越小。

因为 $\cos \Delta\varphi$ 为偶函数, 所以 $-\pi < \Delta\varphi < 0$ 时的情况与 $0 < \Delta\varphi < \pi$ 类似, 只不过质点的运动方向由顺时针变为逆时针。质点运动曲线随相位的变化规律如图 6 所示。

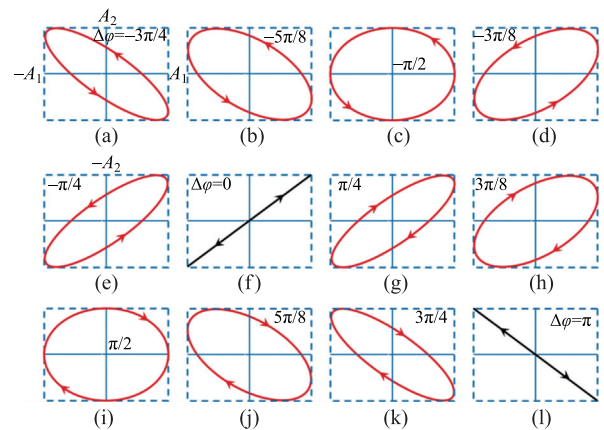


图 6 不同相位差 $\Delta\varphi$ 对应的质点运动曲线 ($A_1 > A_2$)

当 $A_1 < A_2$ 时, 情况略显复杂, 因为此时 $\theta_0 > \pi/4$ (式(26)), $2\theta_0 > \pi/2$, 超出了正切函数 $\tan \theta$ 的一个周期 ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$)。但是, 如果将 x 轴和 y 轴互换, 就可以采取和上面相同的处理方式, 并得到与 $A_1 > A_2$ 时类似的结果。在这种情况下, 椭圆的长轴比矩形对角线更靠近大振幅 A_2 方向的坐标轴。

除了相位差 $\Delta\varphi, A_1/A_2$ 显然也会影响到椭圆的离心率。在 $\Delta\varphi$ 不变的情况下, 比值 A_1/A_2 越

大或越小(和 1 比较),椭圆的离心率越大,比值 A_1/A_2 越接近 1,椭圆的离心率就越小。

7 结语

本文研究了同频、相互垂直简谐振动的合成,推导出质点的运动曲线。讨论了质点的运动范围,以及运动曲线与最大振幅框切点、与 x 轴和 y 轴交点随相位差变化的关系。当相位差不取特定值,即 0 、 $\pi/2$ 、 $3\pi/2$ 和 π 时,运动曲线为椭圆。两个垂直振动等振幅时,椭圆长轴沿与 x 轴成 $\pi/4$ 或 $3\pi/4$ 角方向,且不随相位差改变。若振幅不相等,则椭圆长轴将会随相位差发生转动。无论是哪种情况,相位差越接近 0 或 π ,椭圆就越扁,相应地,离心率也越大。若相位差在 0 和 π 之间,质点沿顺时针方向运动;在 $-\pi$ 和 0 之间时,沿逆时针方向运动。总之,相位差是决定质点运动曲线的关键因素。当相位差相同时,振幅比越远离 1,椭圆的离心率就越大。

在大学物理课程的教学过程中发现,大多数学生对同频、相互垂直简谐振动合成的理解,仅限于相位差为特殊值的情况;而当相位差取一般值时,物理图像比较模糊。本文从坐标变换出发,导出了运动曲线的方程,并给出了相关参数的变化规律。文中详细描绘了同频、相互垂直简谐振动合成的物理图像,将加深学生对该部分内容的理解,对提高教学效果,也会起到积极的作用。

参 考 文 献

- [1] 赵远,王晓鸥,张宇,等. 大学物理学,下册[M]. 北京:高等教育出版社,2012:11-15.
ZHAO Y, WANG X O, ZHANG Y, et al. University Physics, Volume II [M]. Beijing: Higher Education Press, 2012: 11-15. (in Chinese)
- [2] 张三慧. 大学物理学,第四册,波动与光学[M]. 2 版,北京:清华大学出版社,1999:36-40.
ZHANG S H. University physics, Volume 4: Waves and optics[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 1999: 36-40. (in Chinese)
- [3] 赵凯华. 新概念物理教程,力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2004:264-268.
ZHAO K H. New concept physics, mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2004: 264-268. (in Chinese)
- [4] 郑永令,贾起民,方小敏. 力学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2002:363-368.
ZHENG Y L, JIA Q M, FANG X M. Mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2002: 363-368. (in Chinese)
- [5] 叶善专,赵佳. “魔术风轮”的原理——互相垂直振动的合成[J]. 工科物理,1993(3):33-35.
YE S Z, ZHAO J. The principle of “Magic Windmill”—Composition of two mutually perpendicular oscillations[J]. Engineering Physics, 1993(3): 33-35. (in Chinese)
- [6] 李洁. 两个相互垂直振动合成的演示实验的改进[J]. 物理通报,1998(7):33.
LI J. Improvement of the demonstrative experiment on the composition of two perpendicular oscillations[J]. Physics Bulletin, 1998(7): 33. (in Chinese)
- [7] 栾其斌,王丰. 相互垂直的简谐振动合成及李萨如图形的渐进变化[J]. 物理与工程,2021,31(4):37-40.
LUAN Q B, WANG F. Composition of two mutually perpendicular harmonic oscillations and the evolution of Lissajous figures[J]. Physics and Engineering, 2021, 31(4): 37-40. (in Chinese)
- [8] 行小帅. 各种利萨如图形的演示实验[J]. 物理实验,1994(5):237.
XING X S. Demonstration experiments of various Lissajous figures[J]. Physics Experiment, 1994(5): 237. (in Chinese)