

# 对第 39 届全国中学生物理竞赛决赛第一题的研究 ——刚性细杆在抛物线轨道约束下的微振动问题探析

付 宇 郭 彪

(苏州工业园区星海实验高级中学, 江苏 苏州 215127)

**摘 要** 第 39 届全国中学生物理竞赛决赛第一题设计了刚性细杆在抛物线轨道约束下的微振动情境, 本文首先对原题中的三个问题进行了分析与解答, 为了厘清问题情境背后的物理原理, 对细杆的平衡位置、不同平衡位置附近的微振动频率、不同平衡位置的受力情况等进行了研究与讨论, 并用图像说明了相关的物理规律。

**关键词** 细杆; 抛物线轨道; 约束; 微振动; 物理原理

**DOI:** 10.27024/j.wlygc.2025.09.23.02

## RESEARCH ON THE FIRST QUESTION OF THE 39TH NATIONAL HIGH SCHOOL PHYSICS COMPETITION FINAL —ANALYSIS OF MICROVIBRATION PROBLEMS OF RIGID THIN RODS CONSTRAINED BY PARABOLIC TRACKS

FU Yu GUO Biao

(Suzhou Industrial Park Xinghai Experimental Senior High School, Suzhou, Jiangsu 215127)

**Abstract** The first question of the final round of the 39th National Middle School Physics Competition was designed around the context of the micro vibration of a rigid slender rod constrained by a parabolic track. This paper first analyzes and answers the three questions in the original problem. To clarify the physical principles behind the problem context, the balance position of the slender rod, the micro vibration frequency near different balance positions, and the force conditions at different balance positions are studied and discussed, with graphs illustrating the relevant physical laws.

**Key words** thin rod; parabolic trajectory; constraints; micro vibration; principles of physics

### 1 原题呈现

**例题:** 如图 1 所示, 一段抛物线形状的刚性金属丝固定在竖直平面内, 抛物线方程为  $y = ax^2$  ( $y$  轴竖直向上,  $a$  为待定常量); 一长度为  $2l$  的匀质

刚性细杆的两端  $A$ 、 $B$  各有一个小圆孔, 两圆孔都套在金属丝上。圆孔和金属丝之间非常光滑, 摩擦力可忽略。若给细杆一个冲量, 使其运动; 经过足够长的时间, 细杆静止于平衡位置, 此时细杆与水平方向之间的夹角  $\theta = 30^\circ$ 。已知重力加速度大小为  $g$ 。

收稿日期: 2025-09-23; 修回日期: 2025-11-21; 出版日期: 2026-03-30

通信作者: 郭彪, guobiao@mails.ccnu.edu.cn。

引文格式: 付宇, 郭彪. 对第 39 届全国中学生物理竞赛决赛第一题的研究——刚性细杆在抛物线轨道约束下的微振动问题探析[J]. 物理与工程, 2026, 36(2): 235-239.

Cite this article: FU Y, GUO B. Research on the first question of the 39th National High School Physics Competition Final—Analysis of micro-vibration problems of rigid thin rods constrained by parabolic tracks[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(2): 235-239. (in Chinese)

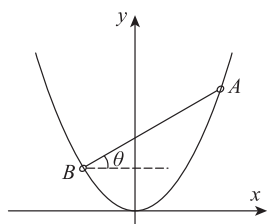


图1 原题配图

(1) 求待定常量  $a$ ;

(2) 若杆在上述平衡位置附近小幅振动,求振动的频率;

(3) 细杆静止在上述平衡位置。现有一只小白鼠,从静止开始由杆底端沿杆往上爬。在爬杆的过程中,细杆始终保持静止;假设小白鼠可视为质点,且小白鼠在杆端不接触金属丝。求小白鼠在时刻  $t$  (以小白鼠开始爬杆的时刻为时刻零点) 沿细杆的位移  $s(t)$ ,小白鼠是否可以爬到细杆顶端? 如果可以,小白鼠爬到细杆顶端,最少用时多少?

## 2 分析

首先关注题中所给条件:抛物线轨道、细杆长度  $2l$ 、平衡角度  $30^\circ$ 、忽略摩擦,因此待定常量  $a$  一定与平衡状态密切相关。从力学思路分析,根据共点力的原理可知,过端点的两法线(切线)交点一定与质心在同一竖直线上,但运算过程烦琐,本文不再呈现,有研究者给出了具体的计算过程<sup>[1]</sup>;从能量思路分析,系统平衡位置一定是势能的极值点,因此只要找出重力势能与角度的关系式,再令一阶导数为零,即可求得  $a$ 。

对于振动频率的求解,自然也是基于能量思路,写出细杆在平衡位置附近的动能和势能表达式,再建立能量守恒定律的微分方程,进而解出结果。

对于第(3)问,当小白鼠沿杆运动时,为使杆依然静止,那么小白鼠与杆之间的作用力与杆所受到的弹力、重力必定交于一点。画出小白鼠的受力示意图,可以发现力的矢量三角形与图中几何三角形相似,从而建立微分方程求解。

## 3 解答

(1) 对于杆来说,势能只有质心的重力势能。

因此设质心坐标为  $(x, y)$ 。则根据几何关系可得 A、B 两点的坐标

$$\begin{cases} x_A = x + l \cos \theta \\ y_A = y + l \sin \theta \\ x_B = x - l \cos \theta \\ y_B = y - l \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

再代入抛物线方程可得

$$\begin{cases} y + l \sin \theta = a(x + l \cos \theta)^2 \\ y - l \sin \theta = a(x - l \cos \theta)^2 \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中两式相减右边使用平方差公式,则可以直接求出  $x$ ,进而求得  $y$

$$\begin{cases} x = \frac{\tan \theta}{2a} \\ y = \frac{\tan^2 \theta}{4a} + al^2 \cos^2 \theta \end{cases} \quad (3)$$

选取  $\theta$  为变量,先求质心重力势能的变化率

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mg \frac{dy}{d\theta} = mg \sin 2\theta \left( \frac{\sec^4 \theta}{4a} - al^2 \right) \quad (4)$$

在平衡位置  $\theta_0 = 30^\circ$  重力势能的变化率必定为 0,因此  $a$  的合理解为

$$a = \frac{2}{3l} \quad (5)$$

(2) 细杆在平衡位置附近小幅振动,由机械能守恒得

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2 + mgy = E \quad (6)$$

在平衡位置附近,质心速度为水平方向,因此第二项为零。第一项和第三项之和表示在平衡位置附近的动能

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{m}{2} \left( \frac{\sec^4 \theta_0}{4a^2} + \frac{l^2}{3} \right) \dot{\theta}^2 \quad (7)$$

规定平衡位置为势能零点,将第四项在平衡位置附近展开并保留到二次项

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dE_p}{d\theta} \right) \bigg|_{\theta=\theta_0} (\Delta\theta)^2 \\ &= mg \left[ \frac{\tan^2 \theta_0 \sec^2 \theta_0}{a} + \cos 2\theta_0 \left( \frac{\sec^4 \theta_0}{4a} - al^2 \right) \right] \cdot (\Delta\theta)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

将  $\theta_0 = 30^\circ$  代入式(7)、(8),并联立式(5)得

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{2ml^2}{3} \dot{\theta}^2 \quad (9)$$

$$E_p = \frac{2mgl}{3} (\Delta\theta)^2 \quad (10)$$

由于  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ , 因此  $\Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}$ , 所以方程(6)等价于

$$\frac{2ml^2}{3}\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{2mgl}{3}(\Delta\theta)^2 = E \quad (11)$$

方程两边对时间求导

$$\Delta\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\Delta\dot{\theta} = 0 \quad (12)$$

易得振动频率

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (13)$$

(3) 如图2所示, 过两端点作出法线交于一点D, 由于细杆一直处于静止状态, 因此杆的重力、小白鼠与杆之间的作用力F的方向一定经过D点。

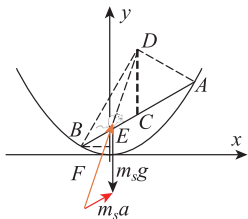


图2 小白鼠的受力分析示意图

写出过A点的法线方程

$$y - y_A = -\frac{1}{2ax_A}(x - x_A) \quad (14)$$

首先根据式(1)得到A点的坐标:  $x_A = \frac{3\sqrt{3}}{4}l$ ,  $y_A = \frac{9}{8}l$ 。再根据式(3)计算出质心坐标:  $x_C = \frac{\sqrt{3}}{4}l$ ,  $y_C = \frac{5}{8}l$ 。由于D、C两点在同一竖直线上, 可将  $x = \frac{\sqrt{3}}{4}l$  代入式(14)即可解出D点纵坐标:  $y_D = \frac{13}{8}l$ 。因此D、C间的距离为

$$y_D - y_C = l \quad (15)$$

对小白鼠来说, F与重力的合力一定沿杆, 如图2所示, 力的矢量三角形和几何三角形DCE始终相似, 设小白鼠沿杆的位移为s, 有

$$\frac{m_s \ddot{s}}{l - s} = \frac{m_s g}{l} \quad (16)$$

即

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}(s - l) = 0 \quad (17)$$

这说明小白鼠从杆左端开始的运动服从简谐运动规律, 且当  $\dot{s} = 0$  时,  $s = l$ 。这说明平衡位置刚好是杆的中点, 因此振幅为l, 根据简谐运动的周期性, 小白鼠爬到顶端的最短时间为周期的一半

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18)$$

## 4 拓展讨论

### 4.1 对平衡位置的讨论

将式(3)中的角度消去, 可求出质心的轨迹方程

$$y = ax^2 + \frac{al^2}{4a^2x^2 + 1} \quad (19)$$

杆的质心在平衡位置的斜率一定为零。因此令  $y' = 0$  并将质心横坐标  $x_0 = \frac{\tan\theta_0}{2a}$  代入, 可得

$$(2la\cos^2\theta_0 - 1)\tan\theta_0 = 0 \quad (20)$$

这是杆平衡时的角度必须满足的条件,  $\theta_0$  的解要分两种情况:

(1) 如果  $2la \leq 1$ , 则  $\theta_0 = 0$ , 即杆只有唯一的平衡位置;

(2) 如果  $2la > 1$ , 则  $\theta_0 = 0$  或满足  $\sec^2\theta_0 = 2la$ , 即杆有三个平衡位置。

为了判定平衡位置的稳定性(即函数的凹凸性), 可求式(19)的二阶导数, 并将  $x_0 = \frac{\tan\theta_0}{2a}$  代入, 得

$$y'' = 2a + 8a^3l^2(3 - 4\cos^2\theta_0)\cos^4\theta_0 \quad (21)$$

(1) 如果  $2la < 1$ , 将  $\theta_0 = 0$  代入,  $y'' = 2a(1 - 4a^2l^2) > 0$ , 说明在  $\theta_0 = 0$  附近的图线向上凹, 即该平衡位置是稳定的。

(2) 如果  $2la > 1$ , 将  $\theta_0 = 0$  代入,  $y'' = 2a(1 - 4a^2l^2) < 0$ , 说明在  $\theta_0 = 0$  附近的图线向上凸, 即该平衡位置是不稳定的; 将  $\sec^2\theta_0 = 2la$  代入,  $y'' = 8a\left(1 - \frac{1}{2la}\right) > 0$ , 说明在  $\theta_0 = \pm\sqrt{\arccos\frac{1}{2la}}$  附近的图线向上凹, 即该平衡位置是稳定的。

(3) 如果  $2la = 1$ , 将  $\theta_0 = 0$  代入,  $y'' = 2a(1 - 4a^2l^2) = 0$ , 说明在  $\theta_0 = 0$  附近的图线是平缓的, 在一定的微扰范围内, 细杆处于随遇平衡状态。

下面通过数值模型进行验证, 不妨令  $l = 1\text{m}$ , 分别取  $a_1 = 0.2\text{m}^{-1}$ 、 $a_2 = 0.5\text{m}^{-1}$ 、 $a_3 = 0.8\text{m}^{-1}$ 、

$a_4 = 1.1\text{m}^{-1}$ , 画出细杆质心轨迹方程的图线为图3中的实线, 虚线为对应的轨道曲线。可以发现,  $a_1, a_2$  对应轨道下, 细杆的质心只存在一个稳定平衡位置;  $a_3, a_4$  对应轨道下, 细杆的质心在  $x=0$  处存在一个不稳定平衡位置, 在两侧存在一对稳定平衡位置。

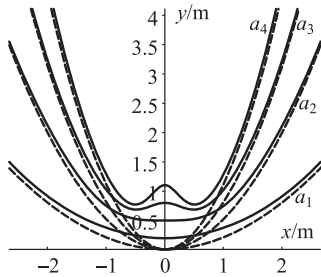


图3 不同轨道下质心的运动轨迹

#### 4.2 不同平衡位置附近的微振动频率的讨论

(1) 如果  $2la < 1$ , 将  $\theta_0 = 0$  代入式(7)、(8)得

$$E_k = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{4a^2} + \frac{l^2}{3} \right) \dot{\theta}^2 \quad (22)$$

$$E_p = mg \left( \frac{1}{4a} - al^2 \right) (\Delta\theta)^2 \quad (23)$$

可进一步求得振动频率

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6al(1 - 4a^2l^2)}{3 + 4a^2l^2} \frac{g}{l}} \quad (24)$$

(2) 如果  $2la > 1$ , 将  $\sec^2\theta_0 = 2la$  代入式(7)、(8)得

$$E_k = \frac{2ml^2}{3} \dot{\theta}^2 \quad (25)$$

$$E_p = 2mgl(2al - 1)(\Delta\theta)^2 \quad (26)$$

可进一步求得振动频率

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{3(2al - 1) \frac{g}{l}} \quad (27)$$

也可以把变量换成  $\theta_0$ , 则  $f = \frac{\tan\theta_0}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{l}}$ 。这

说明, 如果杆长一定, 那么微振动频率正好与杆平衡时的斜率成正比。

(3) 如果  $2la = 1$ , 随遇平衡条件下, 微振动周期应该无穷大, 即  $f = 0$ 。

式(24)、(27)说明, 微振动的频率由  $a$  与  $l$  的乘积决定, 因此可以画出  $f-al$  图线, 如图4所示,

其中  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$ 。当  $al = 0.27$  时,  $f/f_0$  取极大值 0.59; 当  $al = 0.5$  时,  $f = 0$ , 这与微扰下的随遇

平衡相符合; 当  $al > 0.5$ ,  $f/f_0$  随  $al$  单调增加。

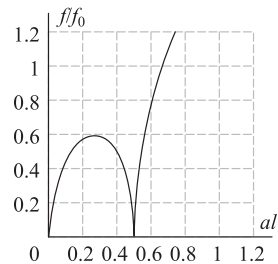


图4 振动频率与  $al$  的关系

#### 4.3 不同平衡位置的受力情况的研究

当  $2la \leq 1$ , 杆平衡时一定处于水平面内, 杆的受力情况比较简单, 这里不再赘述。本文主要讨论当  $2la > 1$  时, 杆处于稳定平衡状态的受力情形, 如图5所示, 杆两端的弹力方向延长线与重力线必然交于一点  $D$ , 这个点也是杆经过平衡位置时的瞬心, 注意到杆经过平衡位置时的动能表达式(25)可写为

$$E_k = \frac{1}{2} \left( \frac{ml^2}{3} + ml^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (28)$$

其中,  $\frac{ml^2}{3}$  表示杆相对于中点的转动惯量, 根据转动惯量计算的平行轴定理,  $ml^2$  这一项表示杆的中点与瞬心  $D$  (旋转中心) 的距离为  $l$ , 这说明瞬心  $D$  与杆的两端点共圆, 即杆在平衡位置时两端法线(或切线)必然垂直。这个结论也可以通过平面解析几何的研究方法, 证明端点的两法线(切线)的斜率乘积为  $-1$ , 有兴趣的读者可自行证明, 这里略去。

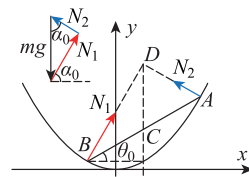


图5 细杆平衡时的受力分析

由于对称性, 下面只讨论杆的质心平衡点在第一象限的情形, 设  $N_1$  与水平方向的夹角为  $\alpha_0$ , 则根据几何关系容易求出

$$\alpha_0 = \arctan \frac{l + l \sin\theta_0}{l \cos\theta_0} = \arctan(\sec\theta_0 + \tan\theta_0) \quad (29)$$

为了探究  $\alpha_0$  与  $\theta_0$  的变化关系, 可以进行求导运算, 结果发现  $\frac{d\alpha_0}{d\theta_0} = \frac{1}{2}$ , 这说明  $\alpha_0$  与  $\theta_0$  呈线性

关系,如图6所示,可知 $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}$ 。接下来写出 $N_1$ 、 $N_2$ 大小的表达式

$$N_1 = mg \sin \alpha_0 = mg \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (30)$$

$$N_2 = mg \cos \alpha_0 = mg \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (31)$$

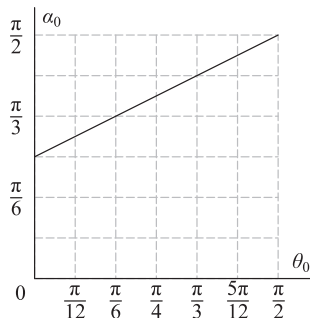


图6  $\alpha_0$  与  $\theta_0$  的关系

图7展示了 $N_1$ 、 $N_2$ 随平衡角度 $\theta_0$ 变化的函数图像。

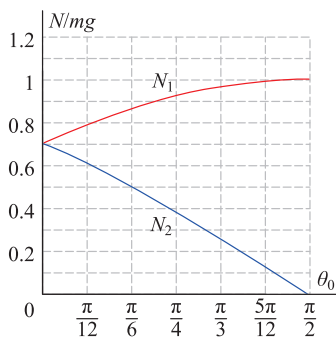


图7  $N_1$ 、 $N_2$  与  $\theta_0$  的关系

查了刚性细杆的微振动问题,约束条件是竖直面内的固定抛物线轨道。在此之前,类似的问题一般是质点在圆弧轨道<sup>[2]</sup>或抛物线轨道<sup>[3]</sup>内的振动问题,也有杆在圆弧轨道约束下的振动问题<sup>[4]</sup>。抛物线轨道的新情境对学生的物理思维能力和数学推算水平提出了更高的要求。本文在给出解答的基础上,对相关问题进行了深入讨论,厘清了问题情境背后的物理原理,供竞赛师生参考,如有不妥之处,恳请读者批评指正。

### 参 考 文 献

- [1] 毛先富,吕庆. 一道竞赛决赛题的多种解法[J]. 物理通报, 2023(9): 69-71.  
MAO X F, LYU Q. Multiple solutions to a competition final problem[J]. Physics Bulletin, 2023(9): 69-71. (in Chinese)
- [2] 赵清锋. 小球在圆弧轨道上滚动与滑动的对比分析[J]. 物理教师, 2018, 39(7): 96-97.  
ZHAO Q F. Comparative analysis of rolling and sliding of a small ball on a circular Arc track[J]. Physics Teacher, 2018, 39(7): 96-97. (in Chinese)
- [3] 沈卫. 运用导数求解简谐运动周期的分析探讨[J]. 物理教学, 2021, 43(6): 56-58.  
SHEN W. Analysis and discussion on using derivatives to solve the period of simple harmonic motion[J]. Physics Teaching, 2021, 43(6): 56-58. (in Chinese)
- [4] 王树平. 均质细杆在纯滚动圆环内的运动[J]. 物理教师, 2021, 42(5): 86-88.  
WANG S P. Motion of a homogeneous thin rod in a purely rolling ring[J]. Physics Teacher, 2021, 42(5): 86-88. (in Chinese)

## 5 结语

第39届全国中学生物理竞赛决赛第一题考