工程探索

利用神经网络模型算法求解最速降线研究

贾小文 范海英

（联勤保障部队工程大学基础部，天津 300161）

摘 要 分析了神经网络模型求解最速降线问题的基本算法思路，利用 TensorFlow 深度学习框架的神经网络模块对最速降线问题进行了数值求解，给出了具体求解步骤，并讨论了神经网络超参数对求解结果的影响。与传统神经网络应用不同，研究了神经网络模型在变分函数拟合中的应用，为将神经网络等 AI 大模型技术应用于大学物理及实验教学和研究提供参考和借鉴。

关键词 神经网络；最速降线；TensorFlow

DOI：10.27024/j.wlygc.2025.10.09.03

RESEARCH ON SOLVING THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM USING NEURAL NETWORK MODEL ALGORITHM

JIA Xiaowen FAN Haiying

(Department of Basic Courses, Engineering University of the Joint Logistics Support Force, Tianjin 300161)

Abstract The basic algorithmic approach of neural network models for solving the brachistochrone problem was analyzed. The TensorFlow deep learning framework's neural network module was utilized to numerically solve the brachistochrone problem, with specific solution steps provided and the impact of neural network hyperparameters on the solution results discussed. Unlike traditional neural network applications, this study explored the application of neural network models in variational function fitting, offering references and insights for applying neural networks and other large AI models to university physics teaching, experiments, and research.

Key words neural network; brachistochrone; TensorFlow

最速降线问题最早由伽利略于 1630 年提出，物理图像非常简单，给定空间不同高度的两个位置，求小球只在重力作用下从其中一个点运动到另外一个点所需时间最小时运动轨迹的形状。这个问题看似简单，却有着十分深刻的物理内涵，对这个问题的研究促进了变分法这样一门新的数学分支的出现和发展。基于变分法研究泛函的极值问题的方法，已经成为一种处理数学、物理与工程等领域有关优化问题的一种最基本的数学技术。在变分优化过程中，一般可以借助欧拉-拉格朗日方程将泛函极值问题转化为微分方程，通过求解微分方程得到满足最优条件的函数。这是求解变分问题最常见的思路，也是很多数值求解变分问题的原理基础。通过转化为微分方程，求解参数得以减少，从而使求解过程变得容易[1-2]。这种方法属于解析求解。除了解析方法之外，还可以通

收稿日期：2025-10-09；**修回日期**：2025-10-14；**出版日期**：2026-03-30

通信作者：贾小文，2002jiaxiaowen@163.com。

引文格式：贾小文，范海英. 利用神经网络模型算法求解最速降线研究[J]. 物理与工程，2026，36(2)：173-178.

Cite this article：JIA X W, FAN H Y. Research on solving the brachistochrone problem using neural network model algorithm[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(2): 173-178. (in Chinese)

过数值方法对最速降线问题进行求解。文献中讨论了上述方程的数值求解过程，基本思路是两类，一类是与光学定律类比，借助折射定律进行求解；另一类是通过欧拉-拉格朗日法求解微分方程[3]。无论是解析方法还是数值方法，其本质都是一致的：通过对问题进行物理或者数学分析以获取曲线的细节信息（如曲线的形状，即曲线满足的微分方程），降低求解参数的个数，接下来通过边界条件就可以得到完整曲线。这要求对该问题的物理或数学本质有深刻的认识，方法相对要复杂一些。

神经网络技术的发展给数值求解变分问题带来了新的思路。神经网络模型可以看作一个万能的函数拟合器，理论上可以拟合任意函数。模型的参数化表示使得即使不知道被拟合公式的具体形式，也可以对该公式进行拟合。从数据处理的角度来讲，由于不需要引入变分法这类复杂的数学工具，无疑大大降低了问题的复杂性，同时也给复杂模型的数据拟合带来新的思路。本文研究了利用神经网络模型算法对最速降线进行求解的方法，并利用 TensorFlow 深度学习框架中的神经网络模块实现了该过程。本文的研究结论为将神经网络等 AI 大模型技术应用到大学物理及实验教学提供了一种新的视角和思路。

1 最速降线问题及求解

1.1 解析求解最速降线问题

给定竖直平面 xOy，设小球初始位置为 $A(x_A,y_A)$，目标位置为 $B(x_B,y_B)$，小球运动轨迹用 $y=y(x)$描述，则小球从 A 点到 B 点所用的时间为

$$t=\int_{x_A}^{x_B}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中，$g=9.801\mathrm{m/s^2}$ 表示重力加速度。这是一个非常典型的变分问题，时间 t 是 $y(x)$的泛函，当 $y(x)$取到最佳轨迹时，t 取极值。利用欧拉-拉格朗日方程可以解析求解该问题，结果如下

$$\begin{cases}x=r(\theta-\sin\theta)\\ y=r(1-\cos\theta)\end{cases} \tag{2}$$

这是一条过 A 点和 B 点的摆线，r 和 θ 表示参数，其含义是一个半径为 r 的圆从 A 点出发，则与 A 点接触的圆上点运动的轨迹就是所求的最佳曲线，如图 1 所示。

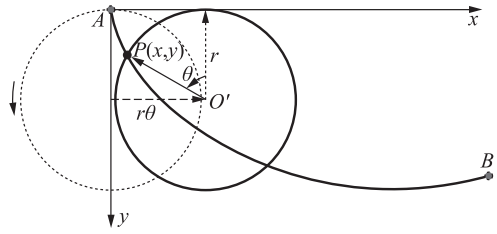


图 1 最速降线的理论值为摆线

1.2 利用神经网络模型求解最速降线问题

本文利用神经网络模型算法思路，结合微元法，提出一种新的获取最速降线曲线形状的方法：直接给定 x 从 A 点到 B 点的坐标分布 $x=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N\}$，然后假定与之对应的纵坐标为 $y(x)=\{y_1,y_2,y_3,\cdots,y_N\}$。相邻的 x_i 之间间隔足够小，则由 x 和 $y(x)$决定的曲线就是待求曲线的很好近似。将所有 y 看作未知参量，则所求时间 t 就是这些未知参量的一个多元函数，最速降线问题求解转化为如下的多元函数极值问题

$$t=F(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_N) \tag{3}$$

并满足边界条件 $y(x_1)=y_1=y_A,y(x_N)=y_N=y_B$。

使用传统的数据求极值方法对上式求解是非常困难的：一是解的形式 $y(x)$未知；二是求解参数的数量太多（可能超过千个）；三是无法给出求解参数的初始近似值（传统数据求极值算法要求给出较为准确的初始参数）。这些特性使得通过普通的数值求极值方法对式(3)进行数值求解基本不可能。神经网络模型算法给解决这个问题带来了新的思路。首先，众所周知，神经网络本质上就是一个极值计算过程，模型训练过程就是对损失函数的最优化过程（极小化），对于最速降线问题，所求时间可以直接视为损失函数；其次，神经网络是一个万能函数拟合器，理论上可以拟合任意的函数，自然也可以拟合出最速降线曲线对应的函数；最后，神经网络能够训练的参数规模都非常巨大，即使是一个比较简单的二层神经网络（每层神经元数假定为 64），即使不考虑输入层和输出层，拟合参数就已经达到了 4160 个，本文中最速降线曲线采样点数为 2000 左右，这个参数量利用神经网络算法来拟合是完全没有问题的。除此之外，利用神经网络模型算法，除了最基本的物理原理外（如小球运动速度和势能的关系），不需要对问题本身进行任何复杂的分析（如费马原理或变

分原理),计算方法具有一定的第一性原理特征。

2 神经网络模型算法及其在最速降线问题中的应用步骤

神经网络模型是一种受生物神经系统启发的机器学习模型,通过模拟人脑神经元之间的连接方式,实现对数据的处理、学习和模式识别。其核心是通过多层非线性变换,从输入数据中自动提取特征,完成分类、回归、生成等任务[4-6]。

神经网络是 AI 大模型的一种,结构如图 2 所示,由输入层、隐藏层和输出层组成。输入层接收数据,不进行计算。隐藏层位于输入层和输出层之间,通过激活函数对输入层进行非线性变换,抽取数据的特征,隐藏层是神经网络的"大脑"。输出层输出模型运算后的结果。神经元的输入信号 z 如下

$$z=\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i+b_i \tag{4}$$

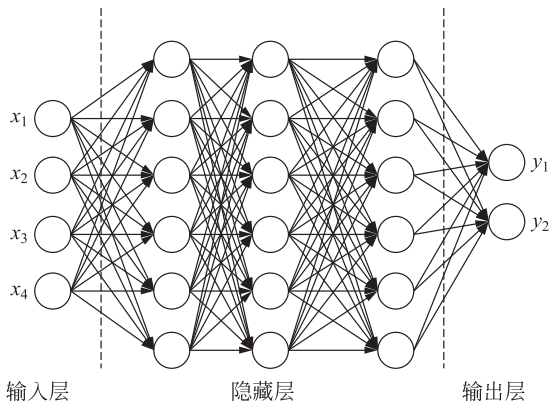


图 2 神经网络示意图

其中,x_i 表示第 i 个上游神经元的输出信号,ω_i 表示第 i 个上游神经元与该神经元的连接权重,b_i 表示偏置。神经元的输出信号如下

$$a=f(z) \tag{5}$$

其中,f 表示激活函数,常用的有 Relu、sigmoid、tanh 等。

假定神经网络的输出用 $y=\{\overline{y_i}\}$ 表示,预期输出用 $y=\{y_i\}$ 表示,可以定义损失函数如下(均方根)

$$L(\bar{y},y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{y_i}-y_i)^2 \tag{6}$$

神经网络模型算法就是通过训练 ω_i 和 b_i,以使得 $L(\bar{y},y)$ 取极小值。$L(\bar{y},y)$ 除了均方差外还有其他形式。$L(\bar{y},y)$ 极值的获取通过梯度下降法进行

$$\omega_{n+1}=\omega_n-\eta\nabla L(\omega_n) \tag{7}$$

其中,ω 表示待优化的参数(一般都是向量或矩阵),n 表示迭代次数,$\nabla L(\omega_n)$ 表示损失函数对 ω 的梯度在 ω_n 处取值,η 表示学习率。实际中 $\nabla L(\omega_n)$ 的求取和参数的更新迭代并不是很容易的。在误差反向传播技术发明后,$\nabla L(\omega_n)$ 的计算才得到了有效的解决,之后神经网络开始真正迅速发展。

本文利用了神经网络模型的算法原理,$x=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N\}$ 作为输入数据,选用一个每层有 128 个神经元的两层神经网络作为模型 model,这个抽象的神经模型包含了 $y(x)$ "这个函数" 的大多数细节。大多数细节含义指模型准确描述了曲线形状,但是未包含边界条件,即小球运动的初始位置和结束位置。为了满足边界条件 $y(x_1)=y_1$,$y(x_N)=y_N$,最终的 $y(x)$ 可按照如下形式定义

$$y(x)=(x-x_1)(x-x_N)\,\mathrm{model}(x)+y_1+\frac{y_N-y_1}{x_N-x_1}(x-x_1) \tag{8}$$

于是算法的目的就是求出 model 这个模型,然后再根据式(8)预测出 x 对应的 y,从而得到最速降线的数值求解结果。

神经网络的损失函数直接定义为需要的时间

$$L(x)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{9}$$

于是利用神经网络模型算法,最速降线问题求解分为如下 7 步:

Step 1:给定初始点 A 和 B,将 x_A 和 x_B 划分为均匀的网格数据 $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N\}$;

Step 2:构造神经网络模型;

Step 3:利用 $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N\}$,计算 model($x$),利用式(8)计算 $y(x)$ 的取值;

Step 4:利用 $y(x)$ 计算 y',利用式(9)计算 $L(x)$;

Step 5:利用误差反向传播计算 $L(x)$ 的梯度,并更新 x;

Step 6:从 step 3 开始迭代计算,直到输出结果收敛;

Step 7:将数据导出并显示。

3 利用 TensorFlow 神经网络模块求解过程

本文使用 TensorFlow 库构建神经网络并进行计算，利用 Igor Pro 导出数据并进行显示。TensorFlow 库是 Google 公司开发的深度学习框架，广泛应用于各类机器学习任务。Igor Pro 是一个科学绘图软件，广泛应用科学绘图和数据处理[7]。小球 A 点和 B 点位置取值见表 1，这里特意选取 B 点位置取值，使得求解结果区分包含上升段、不包含上升段以及能到达最低点(临界点)3种情况[3]。

表 1 小球 A 点和 B 点位置 单位：m

$A(x_A,y_A)$	$B(x_B,y_B)$	$-y_B/x_B$	轨迹特征
(0,0)	(1, −1)	1	无上升段
(0,0)	(1, −0.4)	0.4	有上升段
(0,0)	(1, $-2/\pi$)	$2/\pi$	到达最低点

求解结果如图 3 所示，实线为理论值，圆圈图形标记为神经网络求解结果，可以看到求解结果与理论预测值完全吻合。除此之外，还可以看到使用神经网络模型算法不需要考虑 y_1/x_1 的值(该值决定摆线是否存在上升段)，无论该值是大于 $2/\pi$ 还是小于 $2/\pi$，都可以给出正确的结果。在使用数值方法对微分方程求解时，必须要考虑该值以确定导数的符号变化[3]。这显示出神经网络方法具有更强的普适性。

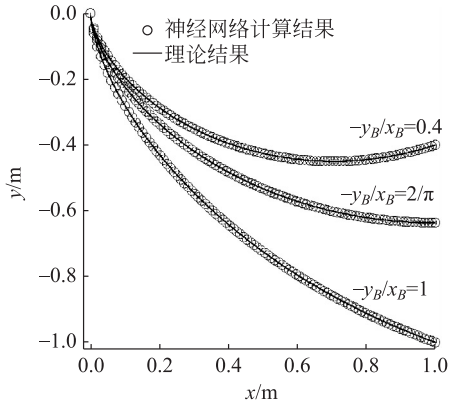


图 3 利用神经网络对最速降线的求解结果

图 4 给出了模型训练过程损失函数的变化情况，可以看到损失函数下降非常快，最终收敛于理论预期值，说明神经网络模型算法对于求解最速降线这类问题的变分极值是非常有效的。

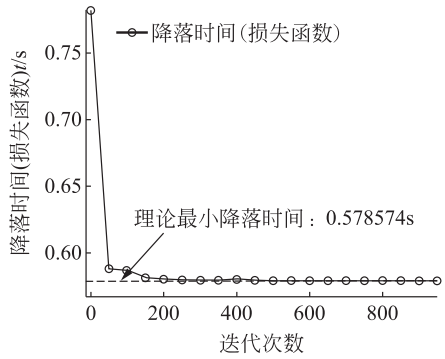


图 4 降落时间随迭代次数收敛示意图

4 分析讨论

本文数值求解算法本质是将所有输入数据视作待求参数，而不是传统的已知数学公式但参数待定的数学优化问题，从而使问题的描述和求解过程理解起来更为简单直接，但带来的问题也是显而易见的，那就是无法适用传统的数据拟合算法。文献中[3]使用数据拟合的方法解决这个问题，但也用到了变分法的结论，即由变分法得到了曲线满足的微分方程，本质上仍然可以归类到数学公式已知这种传统情况。神经网络模型算法给解决这个问题带来了新的思路。一是解决了算法问题，即使不知道显式的数学公式，仍然可以完成“数据拟合”；二是解决了计算复杂性的问题，即使参数量非常巨大，仍然可以保证求解的收敛。本文中，时间积分的导数以及迭代计算的梯度计算本来是很困难的，但是在 TensorFlow 库的深度学习框架下，这个问题得到了很好的解决。

本文算法采用的超参数有数据网格点数 N，x_2-x_1 取值，神经网络层数，激活函数以及迭代次数等。这些超参数的调整对于拟合的精度有较大影响，经过反复尝试，表 2 参数能够给出很好的计算结果。

表 2 本文最速降线神经网络求解超参数

N	x_2-x_1	层数	神经元数	激活函数	迭代次数
1000	0.0003	2	(128,128)	sigmoid/tanh	1000

对于本文，采用 2 层神经网络(每层 128 个神经元)已经足够，迭代次数大于 1000 时也能够满足要求。激活函数对于结果有较大影响，通过测

试发现，在神经网络训练中广泛使用 Relu 激活函数本文中效果很差，但 sigmoid 和 tanh 函数则可以给出很好的计算结果。值得注意的是，网格点第一个数的取值 $x[0]$对计算结果影响非常大。主要是由最速降线本身的数学结构导致的：在小球出发点，理论上斜率是无穷大，这表示 x_1 和 x_2 应距离非常近，理论上应该为零；但数值求解时 x_1 和 x_2 间隔必须取有限值，而此时小球速度几乎为零，这里就出现了有限值除以一个接近零的数值的情况，使得该点的解很容易发散，并影响整体求解（在数学上小球起始点是微分方程的一个奇点）。本文解决方法是将 x_2 的初始值设置为一个略大于 0 的小量（因为 $x_1=x_A=0$），实验发现该值的大小会显著影响计算精度，当 $N=1000$ 时，$x_2=0.0003$ 计算结果最好。图 5 给出了 x_2 取不同值时的计算结果。

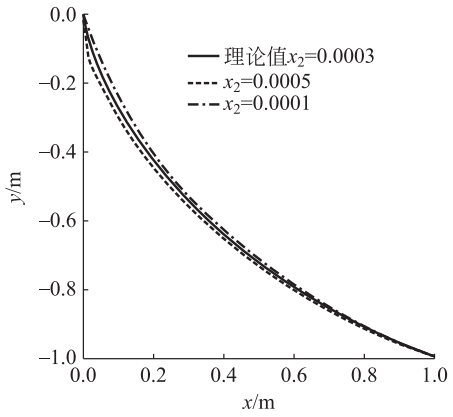


图 5 第一个网格点取值不同对计算结果的影响

传统的神经网络应用一般包含训练数据、标签数据，模型通过训练后能够实现相应的推理过程，如完成信号的识别和聚类分析等，模型的训练包括数据清洗和准备、数据划分、模型构建、数据训练、模型预测等步骤。为了保证训练的可靠性，训练数据和标签数据一般都非常巨大，如常见的用于神经网络学习的 Mnist 数据库就包含 60000 条训练数据和 10000 条测试数据。神经网络模型应用表现形式虽然复杂多样，但究其本质，都是一个“最优化”数学求解过程，通过对损失函数进行极值求解以达到某种最优解。

5 结语

本文利用了神经网络解决最速降线问题，与传统的神经网络模型应用不同，没有训练数据和标签数据，但其内在思路是完全一致的，仍然是通过对极值问题进行求解来得到参数的最佳估计值。也正是由于这种内在的一致性，除了数据准备和划分外，本文算法过程也和传统的神经网络模型应用过程完全相同。本文创新之处在于将神经网络模型这种算法拓展应用到“非传统神经网络应用”的地方，将函数视作参数，将变分函数视作损失函数，利用神经网络模型算法解决变分问题极值的求解。本文的研究方法对利用神经网络完成复杂数据拟合，如从包含积分的数据中提取信息、对二维谱中的色散进行直接拟合（即将色散直接当作参数拟合），解决反卷积以及数据退化等问题提供有益的思路。

2024 年诺贝尔物理学奖授予了 Hopfield 神经网络的发明者，神经网络使用物理学的基本概念和方法通过网络结构处理信息，对人工智能的发展带来革命性变革。2025 年全国大学生物理实验竞赛中命题类第 6 题题目为“AI＋物理实验”，要求将 AI 技术与物理实验相结合，是 AI 技术对大学物理教学领域带来影响的重要体现之一。本文利用神经网络解决经典的最速降线物理问题，其思路和方法可以作为将 AI 技术用于大学物理及实验教学和研究的参考和借鉴。

参 考 文 献

[1] 邵云. 质点沿最速降线和首尾固定的两相连线段下落问题的研究[J]. 大学物理，2019，38(12)：20-27.
SHAO Y. Study on the problem of a particle falling along the brachistochrone and two connected line segments with fixed starting and ending points[J]. College Physics, 2019, 38(12): 20-27. (in Chinese)

[2] 刘志勇，边军辉，刘培国. Mathematica 在最速降线问题中的应用[J]. 西安文理学院学报（自然科学版），2013，16(1)：91-94.
LIU Z Y, BIAN J H, LIU P G. Application of Mathematica in the brachistochrone problem[J]. Journal of Xi'an University (Natural Science Edition), 2013, 16(1): 91-94. (in Chinese)

[3] 贾小文，贺秀良，范海英. 利用 Igor Pro 对最速降线问题进行数值求解[J]. 大学物理，2020，39(12)：13-19，31.
JIA X W, HE X L, FAN H Y. Numerical solution of the brachistochrone problem using Igor Pro[J]. College Physics, 2020, 39(12): 13-19, 31. (in Chinese)

[4] 邱锡鹏. 神经网络与深度学习[M]. 北京：机械工业出版社，2022.

QIU X P. Neural network and deep learning[M]. Beijing: China Machine Press, 2022. (in Chinese)

[5] 刘升光,李宏升,刘雅新,等.人工智能在大学物理实验教学中的应用:以激光测水深实验为例[J].物理实验,2025,45(2):39-45.
LIU S G, LI H S, LIU Y X, et al. Application of artificial intelligence in college physics experiment teaching: Taking the laser water depth measurement experiment as an example[J]. Physics Experimentation, 2025, 45(2): 39-45. (in Chinese)

[6] 吴迪,马滟青.用物理学思维点亮人工智能的未来:解读2024年诺贝尔物理学奖[J].大学物理,2025,44(4):1-5,43.
WU D, MA Y Q. Enlightening the future of artificial intelligence with physical thinking: Interpretation of the 2024 Nobel Prize in Physics[J]. College Physics, 2025, 44(4): 1-5, 43. (in Chinese)

[7] 贾小文.Igor Pro在物理实验数据处理中的应用[J].实验室科学,2020,23(2):88-92,96.
JIA X W. Application of Igor Pro in data processing of physics experiments[J]. Laboratory Science, 2020, 23(2): 88-92, 96. (in Chinese)

(上接第172页)

[8] 唐亚楠,陈卫光,王志文,等.实训课程有效融入固体物理的教学研究[J].物理通报,2023(3):11-15,21.
TANG Y N, CHEN W G, WANG Z W, et al. Effective integration of practical training courses into solid physics teaching research[J]. Physics Bulletin, 2023(3): 11-15, 21. (in Chinese)

[9] 罗裕波.科学研究融入固体物理教学的探索与实践[J].大学物理,2024,43(1):22-25.
LOU Y B. Exploration and practice of integrating scientific research into solid state physics teaching[J]. College Physics, 2024, 43(1): 22-25. (in Chinese)

[10] 马荣,李斌,王璐.学科前沿融入固体物理教学的思考与实践[J].大学物理,2022,41(6):11-15,30.
MA R, LI B, WANG L. Reflection and practice on integrating the frontiers of disciplines into solid state physics teaching[J]. College Physics, 2022, 41(6): 11-15, 30. (in Chinese)

[11] 陈俊臣,于博,郭秉淑.问题驱动与虚拟仿真相结合的“固体物理”课程教学探索[J].教育教学论坛,2025(10):96-99.
CHEN J C, YU B, GUO B S. Exploration of “solid state physics” course teaching combining problem driven and virtual simulation[J]. Education and Teaching Forum, 2025(10): 96-99. (in Chinese)