非近轴条件下单球面成像中光程的极值问题

王 蕊 杨炳方

(河南师范大学物理学院,河南 新乡 453007)

摘 要 费马原理指出了实际光程总取极值的特点,在此基础上,可以尝试进一步判断具体的极值类型。单球面成像作为曲面成像的典型,在近轴理想成像时,其实际光程取恒定值,但对于非近轴情况实际光程的极值类型,尚未有文献进行专门讨论。本文采用数学上求高阶导数的方法,着重讨论在非近轴条件下,主轴上一给定物点发出的光线经单球面反射或折射后,对应于给定像点的实际光程的极值类型,深化了对非近轴成像及费马原理的理解。

关键词 费马原理;非近轴条件;极值类型;球面成像

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.08.28.03

EXTREMUM PROBLEM OF OPTICAL PATH IN IMAGING BY A SINGLE SPHERICAL SURFACE UNDER NON-PARAXIAL CONDITIONS

WANG Rui YANG Bingfang

(School of Physics, Henan Normal University, Xinxiang, Henan 453007)

Abstract Fermat's principle indicates the characteristic that the actual optical path always takes an extremum. Based on this, it is possible to further determine the specific type of extremum. Single-spherical-surface imaging, as a typical example of curved-surface imaging, has a constant actual optical path in paraxial ideal imaging. However, for the non-paraxial case, the type of extremum of the actual optical path has not been specifically discussed in the literature. This paper uses the mathematical method of finding higher-order derivatives to focus on discussing the type of extremum of the actual optical path corresponding to a given image point after reflection or refraction of light rays emitted from a given object point on the principal axis under non-paraxial conditions, deepening the understanding of non-paraxial imaging and Fermat's principle.

Key words Fermat's principle; non-paraxial conditions; type of extremum; spherical surface imaging

费马原理是几何光学中的一个基本原理。费马原理可表述为"光在指定两点间传播时,实际光程总为一个极值"[1],其中的极值类型可以是极大值、极小值或恒定值。单球面反射和折射成像是几何光学成像问题中的一个重要内容。一般的光学教材根据费马原理得出了近轴理想成像时物像

收稿日期: 2025-08-28; **修回日期**: 2025-11-17; **出版日期**: 2026-03-30

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(项目批准号 232300421217)。

通信作者: 杨炳方,yangbingfang@htu.edu.cn。

引文格式: 王蕊,杨炳方. 非近轴条件下单球面成像中光程的极值问题[J]. 物理与工程,2026,36(2):142-151.

Cite this article: WANG R, YANG B F. Extremum problem of optical path in imaging by a single spherical surface under non-paraxial conditions[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(2): 142-151. (in Chinese)

之间等光程，即实际光程的极值类型为恒定值[2]，但未讨论非近轴条件下的具体极值类型。虽已有文献讨论了不同极值类型的光程出现的条件，但也仅考虑了平面界面和近轴条件，并只将极大光程看作是特例情况[3]。有不少文献基于等光程性来解决近轴球面理想成像问题，亦有文献讨论了折射等光程面在近轴情况下与球面成像的关系[4,5]，但尚未有利用等光程面对非近轴情况的讨论。此外，虽已有文献用费马原理证明了实际光线满足反射和折射定律，但多针对的是平面界面[2]。

在数学上，求出二阶导数及更高阶导数是判断极值类型的一种重要方法。本文基于费马原理，主要通过求出光程二阶导数的最终表达式，着重探讨主轴上一给定物点发出的任一光线，在非近轴条件下，经单球面反射和折射成像时，对应于不同给定像点时，实际光程应取哪种极值类型；并辅以反射等光程面，根据极值类型发展出了确定具体的反射点位置的几何方法；然后，借助费马原理和正弦定理，证明了光经球面界面反射或折射时，取极值的光线也满足反射和折射定律。最后从极值类型出发论述了非近轴条件下像点不唯一的特性。本研究澄清了非近轴单球面成像的极值特性，填补了该方面的研究空白，并为理解球差的来源和矫正像差提供了有益的参考。

1 相关物理量的符号规定

（1）本文统一使入射光线从左到右传播，所有图形中相关量的标注满足新笛卡儿符号法则；

（2）实物和虚物的定义：实物为发散的入射光束的顶点；虚物为会聚的入射光束的顶点；

（3）虚光程的规定：对于物像间没有实际光线通过的部分，即实际光线的延长线，规定其光程取负值，称为虚光程，并对虚物取物方折射率，对虚像取像方折射率，本文不考虑负折射率；

（4）曲率半径 $r<0$，为凹球面；$r>0$，为凸球面。

2 点光源球面折射成像的极值判定

2.1 单球面折射成实像

如图 1 和图 2 所示，P，P'分别为给定的物点和像点，半球面两侧介质的折射率分别为 n，n'，折射点 A 和曲率中心 C 的连线与主轴的夹角为 φ，半球面 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，球面曲率半径为 r，点 O 为顶点，物距为 s，像距为 s'，$PA=l$，$AP'=l'$。

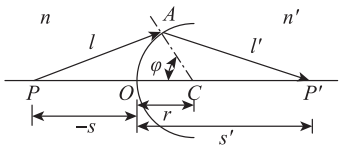

图 1 凸球面折射成实像（$n'>n$）

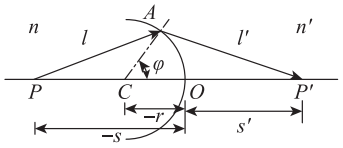

图 2 凹球面折射成实像（$n'<n$）

分析：由于此时光线经凸面和凹面折射均成实像，所以总光程均可以表示为 $\Delta=nl+n'l'$，则根据光路的可逆性原理，这两种情况的极值类型应是相同的。

具体计算如下：如图 1 和图 2 所示，在$\triangle PAC$和$\triangle P'AC$中，分别由余弦定理可得

$$l=AP=\sqrt{r^2+(r-s)^2-2r(r-s)\cos\varphi} \tag{1}$$

$$l'=AP'=\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\varphi} \tag{2}$$

凸面和凹面时 l，l'的表达式相同，且均成实像，则具有相同的光程表达式 $\Delta=nl+n'l'$，根据费马原理要求，物点 P 和像点 P'均给定，r，s，s'均为常量，φ 才是变量，则光程的一阶导数均为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\varphi}&=n\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\varphi}+n'\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}\varphi}=n\frac{1}{l}r(r-s)\sin\varphi-\\&\quad n'\frac{1}{l'}r(s'-r)\sin\varphi\\&=r\sin\varphi\left[\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}\right]\end{aligned} \tag{3}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left[\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}\right]\\&=n(r-s)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{l}\right)}{\mathrm{d}\varphi}-n'(s'-r)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{l'}\right)}{\mathrm{d}\varphi}\\&=n(r-s)\cdot\left(-\frac{1}{l^2}\right)\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\varphi}-n'(s'-r)\cdot\left(-\frac{1}{l'^2}\right)\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}\varphi}\\&=-r\sin\varphi\cdot\left[\frac{n(r-s)^2}{l^3}+\frac{n'(s'-r)^2}{l'^3}\right]\end{aligned}$$

则光程的二阶导数

$$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=r\cos\varphi\left[\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}\right]-r^2\sin^2\varphi\left[\frac{n(r-s)^2}{l^3}+\frac{n'(s'-r)^2}{l'^3}\right] \quad (4)$$

由费马原理得，实际光程总取极值，即$\frac{d\Delta}{d\varphi}=0$，得

$$\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}=0 \text{ 或 } \varphi=0$$

前者为非近轴单球面折射成实像的精确公式[6]，后者为轴上光线。

由$\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}=0$得$\frac{r-s}{l}=\frac{n'}{n}\cdot\frac{s'-r}{l'}$，故

$$\left(\frac{r-s}{l}\right)^2=\left(\frac{n'}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2$$

代入式(4)，可得取极值时光程的二阶导数

$$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=r\cdot\cos\varphi\cdot\left[\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}\right]-r^2\sin^2\varphi\cdot\left[n\cdot\left(\frac{n'}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot\frac{1}{l}+\frac{n'(s'-r)^2}{l'^3}\right]$$

$$=-r^2\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot n'\cdot\left[\frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}\right] \quad (5)$$

因为$n>0$，且$n'>0$(不考虑负折射率的情况)，所以

$$\frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}>0,\text{则}\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}<0$$

此时对凸面及凹面，非近轴光线的实际光程均取极大值。

由系统的旋转对称性可知，实际光线必然关于主轴成对称分布，同时，由连续函数的性质，两极大值之间必然存在一个极小值，故此时轴上光线($\varphi=0$)的光程应取对称分布的非近轴极大值光程之间过渡的极小值(见图3)。

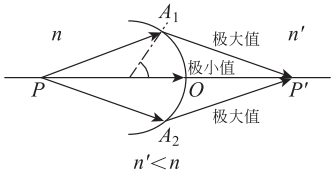

图3 非近轴和轴上光线的极值类型(凹球面折射成实像)

2.2 单球面折射成虚像

如图4至图7所示，在单球面折射成虚像的四种情况中，容易得到，l，l'的表达式分别与单球面折射成实像时的l，l'相同，均为

$$l=\sqrt{r^2+(r-s)^2-2r(r-s)\cos\varphi},$$

$$l'=\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\varphi}$$

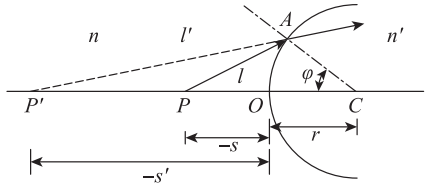

图4 凸球面折射成虚像($n'>n$)

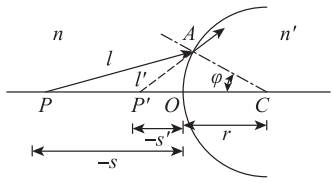

图5 凸球面折射成虚像($n'<n$)

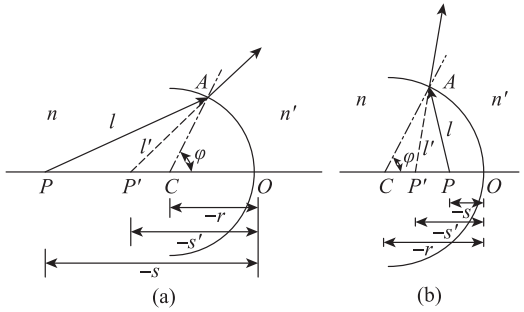

图6 凹球面折射成虚像($n'>n$)

(a) $l'<l$；(b) l和l'的大小关系不定

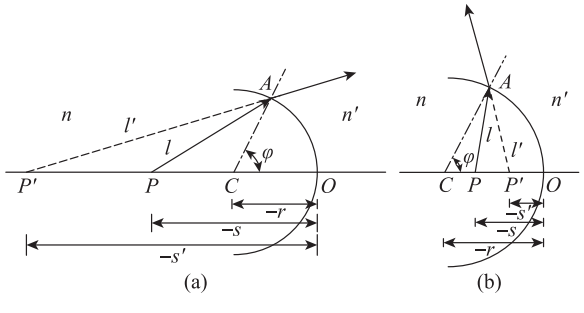

图7 凹球面折射成虚像($n'<n$)

(a) $l'>l$；(b) l和l'的大小关系不定

由于P'点均为虚像，虚光程应取负值，且虚光程的折射率是像方的，所以总光程均可以表示为$\Delta=nl-n'l'$，可以看作是单球面折射成实像时n'取为$-n'$时的情况(此处只是一种数学上的简化，成虚像时n'实际并不为负值)。根据光路可逆

性原理，可知图 4 与图 5 的极值情况是相反的，图 6 与图 7 的极值情况是相反的。

同理，由式(5)可得在折射成虚像情况下，取极值时光程的二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}\varphi^2}=-r^2\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot n'\cdot\left[\frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}\right] \tag{6}$$

因为该式中的 n' 为折射成实像时定义的 n'，为正值，则以下只需判断 $\delta=\frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}$ 的正负。

2.2.1 凸球面折射成虚像

对图 4，折射角＜入射角，则 $n'>n$，又因为 $l'>l$，则

$$\delta=\frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}=\frac{n'l'-nl}{nll'}>0$$

所以 $\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}\varphi^2}<0$，故此时实际光程取极大值；

对图 5，折射角＞入射角，则 $n'<n$，又因为 $l'<l$，则

$$\delta=\frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}=\frac{n'l'-nl}{nll'}<0$$

所以 $\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}\varphi^2}>0$，故此时实际光程取极小值，与图 4 情况相反。

2.2.2 凹球面折射成虚像

图 6 中，折射角＜入射角，则 $n'>n$，对图 6(a)，$l'<l$；对图 6(b)，l 和 l' 的大小关系不定；图 7 中，折射角＞入射角，则 $n'<n$，对图 7(a)，$l'>l$；对图 7(b)，l 和 l' 的大小关系不定；则此时 δ 的正负均不确定，需具体讨论 $n'l'-nl$ 的正负：

由折射定律可得，$\frac{n'}{n}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle P'AC}$，在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle P'AC$ 中，由正弦定理可得

$$\frac{l}{\sin\varphi}=\frac{CP}{\sin\angle PAC},\quad \frac{l'}{\sin\varphi}=\frac{CP'}{\sin\angle P'AC}$$

所以 $\frac{l'}{l}=\frac{CP'\cdot\sin\angle PAC}{CP\cdot\sin\angle P'AC}=\frac{CP'}{CP}\cdot\frac{n'}{n}$，

当 $\delta>0$，即 $n'l'-nl>0\Rightarrow\frac{n'l'}{nl}>1\Rightarrow\frac{CP'}{CP}\cdot\left(\frac{n'}{n}\right)^2>1\Rightarrow\frac{CP'}{CP}>\left(\frac{n}{n'}\right)^2$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}\varphi^2}<0$，此时实际光程取极大值；

当 $\delta<0$，即 $n'l'-nl<0\Rightarrow\frac{CP'}{CP}<\left(\frac{n}{n'}\right)^2$ 时，$\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}\varphi^2}>0$，此时实际光程取极小值。

若使 P' 点在所允许的范围内从左到右移动，例如：当 CP' 相对较大，满足 $\frac{CP'}{CP}>\left(\frac{n}{n'}\right)^2$ 时，此时 $n'l'-nl>0$，实际光程取极大值；对应于图 6(a)，此时 P' 相对靠近 P 点，而对应于图 7(a)，此时 P' 相对远离 P，故从物点与像点的相对位置关系看，图 6 与图 7 的极值情况是相反的。(注：两个(b)图的分析也同理。)

而对于轴上光线，则会取非近轴极大值光程之间过渡的极小值或非近轴极小值光程之间过渡的极大值。

当 $\delta=0$，即 $n'l'-nl=0$ 时，此时总光程 $\Delta=nl-n'l'$ 恒等于零，即实际光程取恒定值，给定物点 P 和给定像点 P' 为一对不产生球差的齐明点[7]。

3 点光源球面反射成像的极值判定

如图 8～图 10 所示，为点光源单球面反射时的所有成像情况，可以看出，只有凹球面反射时才能成实像，凸球面反射时只能成虚像，但凹球面反射也可成虚像。

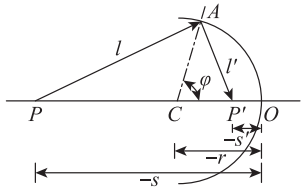

图 8 凹球面反射成实像

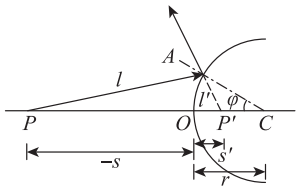

图 9 凸球面反射成虚像

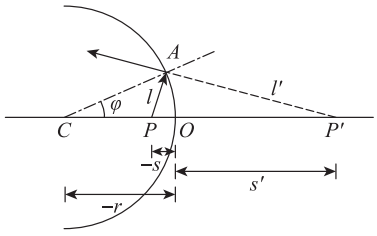

图 10 凹球面反射成虚像

图中 A 为反射点，由余弦定理可得

$l=\sqrt{r^2+(r-s)^2-2r(r-s)\cos\varphi}$，

$l'=\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\varphi}$

且分别与单球面折射成实像时的 l，l' 表达式相同。则单(凹)球面反射成实像时，总光程 $\Delta=nl+nl'$；单球面(凸球面和凹球面)反射成虚像时，因为 P' 点为虚像，AP' 段对应虚光程，则总光程 $\Delta=nl-nl'$。

同理，对比单球面折射成实像 $\Delta=nl+n'l'$ 时的情况，由于反射时 l，l' 的表达式与折射成实像时相同，所以单(凹)球面反射成实像可以看作是折射成实像时 $n'=n$ 的情况，单球面反射成虚像可以看作是折射成实像时 $n'=-n$(此处负号只是一种数学简化)的情况。

于是，由折射成实像时的二阶导数 $\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=-r^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot n'\cdot\left[\frac{n'}{n}\cdot\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}\right]$，即式(5)，可以用于判定反射情况下光程的极值类型。

3.1 单球面反射成实像

因为 $n>0$，$l>0$，$l'>0$，则

$$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=-nr^2\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}\right)<0 \tag{7}$$

所以此时实际光线的光程取极大值。而轴上光线($\varphi=0$)则取光程极大值之间过渡的极小值。

3.2 单球面反射成虚像

因为 $n>0$，对凸球面，由几何关系易得，$l>l'$，$\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}<0$，则

$$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=-nr^2\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot\left[\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}\right]>0 \tag{8}$$

所以此时实际光线的光程取极小值。对凹球面，$l<l'$，$\frac{1}{l}-\frac{1}{l'}>0$，则 $\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}<0$，此时实际光线的光程取极大值。而轴上光线($\varphi=0$)则分别取光程极小值之间过渡的极大值(凸球面)和光程极大值之间过渡的极小值(凹球面)。

3.3 反射点具体位置的确定

反射等光程面总共有三种：旋转椭球面、旋转双曲面、旋转抛物面。由成像特点和光程表达式可知，点光源经凹面反射和凸面反射的等光程面分别对应旋转椭球面和旋转双曲面(平行光反射成实像对应旋转抛物面)。给定物点及像点时，在相应等光程面的辅助下，已知极值类型，可以求出非近轴实际光线反射点的具体位置。

3.3.1 单球面反射成实像——旋转椭球面

单球面反射成实像时，球面界面只能为凹球面。对应等光程面应为旋转椭球面，且该旋转椭球面以给定物点 P 和像点 P' 为焦点。在三维空间，反射点 A 应位于旋转椭球面与球面的交点，在二维平面，A 点应位于椭圆与圆的交点。凹球面反射成实像时，实际光程取极大值；根据凹球面相对于 P 点和 P' 点的位置，由几何关系易得，此时考虑的是椭圆的右半部分。

由椭圆的几何性质：椭圆外一点到两焦点的距离之和大于椭圆上一点到两焦点的距离之和，椭圆内一点到两焦点的距离之和小于椭圆上一点到两焦点的距离之和(椭圆的内外划分如图 11 所示)。故若要使光程取极大值，即要求反射点为圆上所有点中到给定两焦点的距离之和最大的点，则此时反射点 A 必须为椭圆外切于圆的切点，即此时相应椭圆应外切于圆，同时对应旋转椭球面应外切于球面镜，如图 12 和图 13 所示。

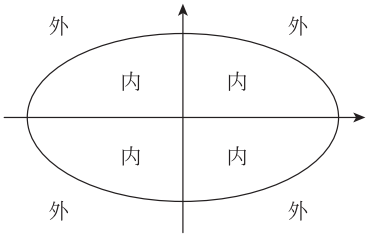

图 11 椭圆的内外区域划分

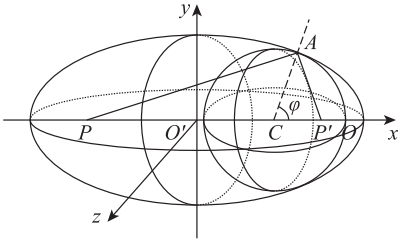

图 12 旋转椭球面外切于球面镜

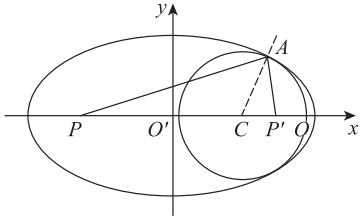

图 13 椭圆外切于圆

则由旋转椭球面和球面关于主轴的旋转对称性，可得反射点 A 应分布在一个垂直于主轴的圆周上，且该圆周必须为对应旋转椭球面外切于圆的切点轨迹。容易证明，实际反射点轨迹是唯一的。

3.3.2 单球面反射成虚像——旋转双曲面

此时的等光程面应为旋转双曲面，且该旋转双曲面以给定物点 P 和像点 P' 为焦点。在二维平面上，反射点 A 应在双曲线与圆的交点上。

凸球面反射成虚像时，实际光程取极小值；因为 $\Delta=nl-nl'$，且 $l>l'$，所以此时等光程面相当于 $AP-AP'=C_1(C_1>0)$，所以考虑的是双曲线的右支。

根据双曲线的几何性质：双曲线外一点到两焦点的距离之差小于双曲线上一点到两焦点的距离之差，双曲线内一点到两焦点的距离之差大于双曲线上一点到两焦点的距离之差（双曲线的内外划分见图 14）。故对于凸球面，若要保证光程取极小值，即要求反射点为圆上所有点中到给定两焦点的距离之差最小的点，则此时反射点 A 必须为双曲线外切于圆的切点，即此时相应双曲线应外切于圆，同时对应旋转双曲面应外切于球面镜，如图 15 和图 16 所示。（注意与椭圆的区别。）

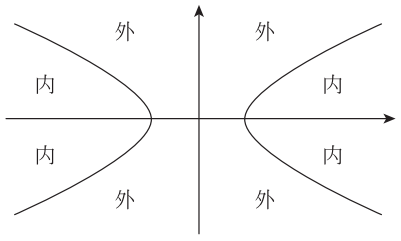

图 14 双曲线的内外区域划分

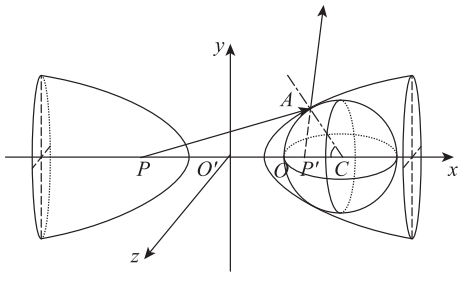

图 15 旋转双曲面外切于球面镜

凹球面反射成虚像时，实际光程取极大值；因为 $\Delta=nl-nl'$，但 $l<l'$，所以此时等光程面相当于是 $AP'-AP=C_2(C_2>0)$，所以此时考虑的应是双曲线的左支，且实际光程的相反数应取极小值，所以对应旋转双曲面应也应外切于球面镜。

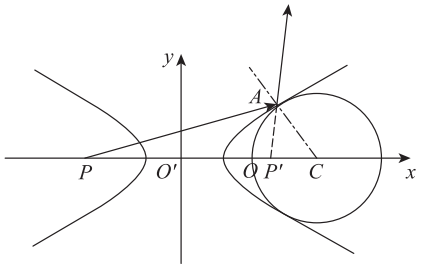

图 16 双曲线外切于圆

由旋转双曲面和球面关于主轴的旋转对称性可得，点光源经单球面反射成虚像时，对应于给定物点 P 和给定像点 P'，反射点 A 应分布在一个垂直于主轴的圆周上，且该圆周必须为对应的旋转双曲面外切于球面的切点的轨迹。

由于单球面反射时，无论成实像还是成虚像，实际反射点的轨迹是一个关于主轴有旋转对称性的圆周，所以，在非近轴条件下，虽然像点不唯一，但对于同一给定物点和像点之间的实际光线的光程是相等的。

（平行光凹面反射成实像时，反射等光程面为旋转抛物面，步骤与上述一致，本文不再赘述。）

4 平行光线球面成像的极值判定

以上讨论的情况中光源均为点光源，下面讨论平行光入射的情况。图 17 至图 22 给出了平行光单球面成像的所有成像情况。平行光可以看作是点光源位于无穷远处的情况，所以平行光的成像情况可以归类于点光源的成像中。具体计算如下：

单球面折射成实像时，对点光源，在光程取极值，即 $\dfrac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\varphi}=0$ 时，光程的二阶导数为式(5)。

对于平行光，相当于物距 $s\to-\infty$，且 $l\to\infty$，$\dfrac{1}{l}\to0$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}\varphi^2}\to-r^2\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot n'\cdot\frac{1}{l'}<0$$

所以实际光程取极大值，与点光源在单球面折射成实像时极值情况相同。

单球面折射成实像

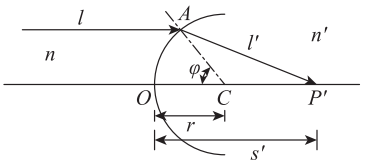

图 17 凸球面折射成实像($n'>n$)

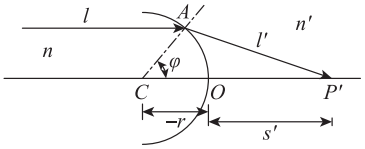

图 18 凹球面折射成实像($n'<n$)

单球面反射成实像

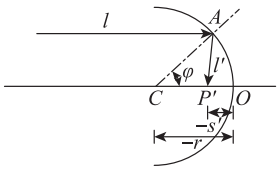

图 19 凹球面反射成实像

单球面折射成虚像

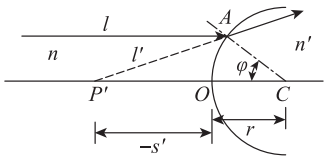

图 20 凸球面折射成虚像($n'<n$)

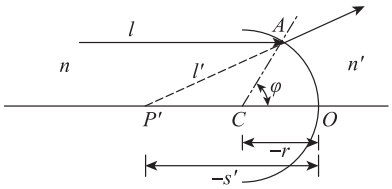

图 21 凹球面折射成虚像($n'>n$)

单球面反射成虚像

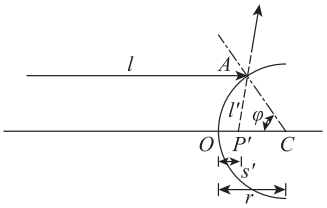

图 22 凸球面反射成虚像

同理,单球面折射成虚像时,$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=r^2\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot n'\cdot\frac{1}{l'}>0$,实际光程取极小值。与点光源折射成虚像时相比,缺少了取极大值和恒定值的情况,这可以理解为是平行光物距为无穷大这一条件在一定程度上限制了物距与像距的大小关系,所以此时少了几种物距相对较小时的情况。

同理,单(凹)球面反射成实像时,$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=-nr^2\cdot\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot\frac{1}{l'}<0$,实际光程取极大值;单(凸)球面反射成虚像时,$\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}=nr^2\sin^2\varphi\cdot\left(\frac{s'-r}{l'}\right)^2\cdot\frac{1}{l'}>0$,实际光程取极小值。此时与点光源反射成像相比,缺少了物距相对较小时的凹球面反射成虚像的情况。

综上所述,平行光经球面成像时的极值类型如表 1 所示。

表 1 平行光经球面成像时的极值类型

成像情况	平行光经球面成像			
	单球面折射成实像	单球面折射成虚像	单球面反射成实像	单球面反射成虚像
极值类型	极大值	极小值	极大值	极小值

5 虚物球面成像的极值判定

虚物成像与实物成像之间存在着诸多联系,可以看出,取实物成像时光线的延长线,并以 A 点为基准点将光线方向逆过来,即可由实物成像得到虚物成像(注:绘图时仍坚持入射光线从左到右传播的原则)。此时物的虚实互换,同时像的虚实互换,则实际光程的极值类型也互换(极小值与极大值互换)。极值类型的互换可以理解为是由虚光程为负的规定造成的。同时,球面的凸凹也互换,但物和像的相对位置不变。

以实物经凸球面折射成实像(图 23)和虚物经凹球面折射成虚像(图 24)的关系为例:

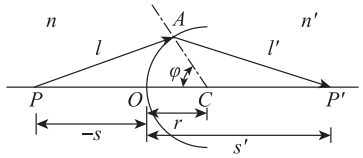

图 23 实物经凸面折射成实像

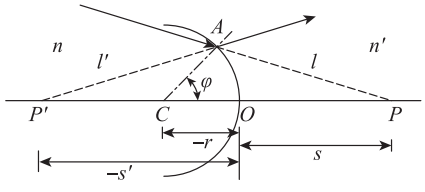

图 24 虚物经凹球面折射成虚像

由前面计算可知,实物成像时,经凸球面折射

成实像，实际光程取极大值，则其对应的虚物成像时，经凹球面折射成虚像，实际光程应取极小值。这也可以对其总光程 $\Delta=-nl-n'l'$ 求二阶导数得到。类比之前的计算，很明显，可以判断 $\frac{d^2\Delta}{d\varphi^2}>0$，所以虚物经凹球面折射成虚像时，实际光程取极小值。

6 在球面成像时取极值的光线满足反射定律或折射定律

在这一部分，将证明经球面反射或折射时的实际光线满足反射定律或折射定律。

6.1 点光源单球面折射成实像时

以凸球面折射成实像时为例：

如图 25，$PC=r-s$，$CP'=s'-r$，$AP=l$，$AP'=l'$，入射角为 $\angle PAD$，折射角为 $\angle CAP'$。

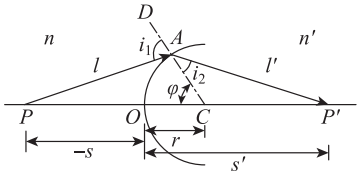

图 25 点光源经凸球面折射成实像（$n'>n$）

当光程 Δ 取极值时，由式(3)，即 $\frac{d\Delta}{d\varphi}=r\sin\varphi\cdot\left[\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}\right]=0$，可得

$$\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}=0 \text{ 或 } \sin\varphi=0。$$

(1) 由 $\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}=0\Rightarrow\frac{n(r-s)}{l}=\frac{n'(s'-r)}{l'}$，即

$$n\frac{PC}{AP}=n'\frac{CP'}{AP'} \tag{9}$$

在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ACP'$ 中，由正弦定理，分别得

$$\frac{PC}{AP}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle ACP},\quad \frac{CP'}{AP'}=\frac{\sin\angle CAP'}{\sin\angle ACP'} \tag{10}$$

所以

$$n\frac{CP}{AP}=n'\frac{CP'}{AP'}\Rightarrow n\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle ACP}=n'\frac{\sin\angle CAP'}{\sin\angle ACP'} \tag{11}$$

又因为 $\sin\angle ACP=\sin\angle ACP'$，$\sin\angle PAC=\sin\angle PAD$，

所以

$$n\sin\angle PAD=n'\sin\angle CAP'$$

即 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$，此即折射定律的第三条内容。

(2) $\sin\varphi=0\Rightarrow$ 此时 $i_1=i_2=0$，$\sin i_1=\sin i_2=0$，所以仍有 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$，仍然满足折射定律。

综上可得，点光源经单球面折射成实像时，取极值的光线始终满足折射定律（即实际光线始终满足折射定律），得证。

6.2 平行光单球面反射成实像时

如图 26 所示，$CP'=s'-r$，$AP=l$，$AP'=l'$，入射角为 $\angle DAC$，反射角为 $\angle CAP'$。

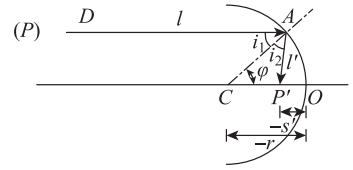

图 26 平行光经凹球面反射成实像

平行光经单球面反射成实像时，总光程 $\Delta=nl+nl'$，相当于点光源单球面折射成实像时 $n'=n$，且物距 $s\to-\infty$，$l\to\infty$，代入式(3)，则 $\frac{r-s}{l}\to1$，取极值时，即 $\frac{d\Delta}{d\varphi}\to nr\sin\varphi\left(1-\frac{s'-r}{l'}\right)=0$ 时，可得

$$1-\frac{s'-r}{l'}=0 \text{ 或 } \varphi=0$$

(1) $1-\frac{s'-r}{l'}=0\Rightarrow s'-r=l'\Rightarrow CP'=AP'$，在 $\triangle ACP'$ 中，由正弦定理得，$\frac{CP'}{AP'}=\frac{\sin\angle CAP'}{\sin\angle ACP'}$，故 $\angle CAP'=\angle ACP'$，又因为 $AD/\!/CO$，则 $\angle DAC=\angle ACP'$，所以 $\angle DAC=\angle CAP'$，即 $i_1=i_2$，此即反射定律的第三条内容。

(2) $\varphi=0$，此时 $i_1=i_2=0$，仍然满足反射定律。

综上可得，平行光经单球面反射成实像时，取极值的光线始终满足反射定律（即实际光线始终满足反射定律），得证。

6.3 其他情况

表 2 给出了点光源经球面成像时，所有情况下取极值光线（实际光线）的物像关系式。

表 2 点光源在非近轴条件下的物像关系式

单球面反射成实像	单球面折射成实像
$\frac{r-s}{l}-\frac{s'-r}{l'}=0$	$\frac{n(r-s)}{l}-\frac{n'(s'-r)}{l'}=0$
单球面反射成虚像	单球面折射成虚像
$\frac{r-s}{l}+\frac{s'-r}{l'}=0$	$\frac{n(r-s)}{l}+\frac{n'(s'-r)}{l'}=0$

虽然表达式略有不同，结合前文具体图像可以看出，这些表达式均可以化简为

$$\frac{nCP}{AP}=\frac{n'CP'}{AP'}$$

即式(9)。该式在近轴条件下可以推出或回到高斯公式$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$和牛顿公式$xx'=ff'$。对该式，反射时(无论实虚)相当于$n'=n$，折射时(无论实虚)$n'$都是像方折射率，故推导过程与上述几乎完全一致。因此可以证明，所有情况下，取极值的光线都满足反射或折射定律。虚物球面成像时同理，分析步骤几乎完全一致。

注意：本文中对所有情况所做的折射率的不同简化都只是一种数学简化。

表 3 给出了平行光线经球面成像时，所有情况下取极值光线(实际光线)的物像关系式，对于平行光，只是相当于物距趋于无穷远而已，其分析步骤同理，具体过程其实更为简单。

表 3 平行光在非近轴条件下的物像关系式

单球面反射成实像	单球面折射成实像
$1-\frac{s'-r}{l'}=0$	$n-\frac{n'(s'-r)}{l'}=0$
单球面反射成虚像	单球面折射成虚像
$1+\frac{s'-r}{l'}=0$	$n+\frac{n'(s'-r)}{l'}=0$

这些物像关系式准确来说是由一阶导数$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}\varphi}=0$得来的，通过上述给出的反射时的物像关系式，并代入$l$和$l'$的表达式，也可以求解出具体反射点的位置(解出来具体的φ角)。

7 非近轴成像时像点和焦点的唯一性讨论

本文主要研究了单球面反射和折射成像时的极值类型，对两个球面进行组合，就可以实现对透镜成像的研究；具体来说，当两个球面成像实际光程都取极大值时，则透镜成像的实际光程也取极大值；当两个球面成像实际光程都取极小值时，则透镜成像的实际光程也取极小值；当一个球面成像取极大值，另一个球面成像取极小值时，整个透镜的实际光程取鞍点的位置。

非近轴条件下单球面或透镜成像时，给定两点间的实际光程往往取的是极大值或极小值，由于不可能所有的光线都取极大值或极小值，此时只有特定的φ角对应的光线才是实际光线。事实上，物点可以向任意方向发射光线，所以唯一的可能是光源发出的其他φ角的光线对应的是其他像点，即像点是不唯一的，系统不能理想成像；如果用平行光入射，结论也是一样的，即焦点也是不唯一的。

对于近轴情况，可认为所有的实际光线对应同一个极大值或极小值，即取恒定值，或者物像之间是等光程的，像点唯一，系统能理想成像。

由此，我们也获得了一种从极值类型的角度来理解像差(特别是球差的来源)的新方法。

8 结语

本文基于费马原理对实际光程取极值的要求，通过纯数学求导的方法得到了非近轴条件下单球面成像中光程的极值类型。首先分析了主轴上一点光源在单球面折射成实像时实际光程取极值的类型，并通过与其他成像情况之间的关系，进一步导出单球面折射成虚像及反射成像时实际光程的极值类型。接着，根据已知的极值类型，辅以反射等光程面和旋转对称性，采用几何的方法得出了在给定物点及像点时反射情况下反射点的具体位置。然后，通过分析平行光线和虚物与点光源之间的关系，得出了入射平行光和虚物成像在各种成像情况下的极值类型。并证明了在非近轴单球面成像时取极值的光线也满足反射或折射定律，进一步印证了几何光学基本定律的普适性。最后，对非近轴成像时像点和焦点的唯一性进行了讨论，获得了理解球差的新方法。至此，相对完整地解释了在非近轴条件下，单球面成像时实际光程的极值类型及特点。

本文填补了非近轴条件下单球面成像中光程极值问题的研究空白，丰富了人们对光程取极值

类型的认识，深化了对费马原理的理解，并为理解球差提供了新视角。此外，本文所研究的单球面成像还可以拓展至多球面组合的光学系统，如各种透镜及其组合，为实际光学系统中的光程极值问题研究奠定了基础。

参 考 文 献

[1] 姚启钧. 光学教程[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2019：107-124.
YAO Q J. Optics textbook[M]. 6th ed. Beijing：Higher Education Press，2019：107-124. (in Chinese)

[2] 赵凯华. 新概念物理教程(光学)[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2021：15-16，28-29.
ZHAO K H. New conceptual physics textbook (Optics)[M]. 2nd ed. Beijing：Higher Education Press，2021：15-16，28-29. (in Chinese)

[3] 陈敬德，唐建新. 浅析费马原理中“光程平稳”表述的含义[J]. 广西物理，2022，43(4)：20-26.
CHEN J D，TANG J X. Analysis of the meaning of “stationary optical path” in Fermat's principle[J]. Guangxi Physics，2022，43(4)：20-26. (in Chinese)

[4] 王勇. 从物像等光程性探讨光成像规律及其推广应用[J]. 物理教师，2023，44(11)：94-97.
WANG Y. Exploring the laws of optical imaging and their extended applications from the equal optical path length of object and image[J]. Physics Teacher，2023，44(11)：94-97. (in Chinese)

[5] 邢容，吴良丞. 折射等光程面与傍轴成像球面之间的关系[J]. 物理通报，2020(3)：31-34.
XING R，WU L C. The relationship between the aplanatic surface for refraction and the paraxial imaging spherical surface[J]. Physics Bulletin，2020(3)：31-34. (in Chinese)

[6] 毕会英，贺国珠. 非近轴光线单球面折射成像的精确公式及应用[J]. 物理通报，1999(5)：13-14.
BI H Y，HE G Z. Exact formula and its application for non-paraxial ray refraction imaging at a single spherical surface[J]. Physics Bulletin，1999(5)：13-14. (in Chinese)

[7] 科学出版社名词室合编. 物理学词典(光学分册)[M]. 北京：科学出版社，1988：32.
Compilation Committee of Science Press. Dictionary of physics (Optics Volume)[M]. Beijing：Scientific Press，1988：32. (in Chinese)

(上接第135页)

LI X Y，HUANG H F，MA S C，et al. Research on the quality of talent cultivation under the “Top-notch Program” at Lanzhou University：From the perspectives of student learning engagement，learning psychology and learning outcomes[J]. Journal of Lanzhou University，2018，5：188-197. (in Chinese)

[10] 王晓红，李志强. 拔尖创新人才成长规律与培养模式研究[J]. 高等教育研究，2021，42(3)：78-85.
WANG X H，LI Z Q. Research on the growth law and cultivation model of top-notch innovative talents[J]. Journal of Higher Education，2021，42(3)：78-85. (in Chinese)

[11] 张明远，陈思雨. 应用物理学专业学生认知特征与教学策略[J]. 物理与工程，2022，32(2)：112-118.
ZHANG M Y，CHEN S Y. Cognitive characteristics and teaching strategies for applied physics majors[J]. Physics and Engineering，2022，32(2)：112-118. (in Chinese)

[12] 李雄鹰，毛雅昕，孙瑾. “拔尖计划”学生心理弹性与创造力的关系研究-学习适应性的中介效应[J]. 高等理科教育，2022，161(1)：73-81.
LI X Y，MAO Y X，SUN J. Research on the relationship between resilience and creativity of students in the “Top-notch Program”：The mediating effect of learning adaptability[J]. Higher Education of Sciences，2022，161(1)：73-81. (in Chinese)

[13] 阎琨. 中国大学拔尖人才培养项目内部冲突实证研究[J]. 清华大学教育研究，2018，39(5)：63-74.
YAN K. An empirical study on internal conflicts in top-notch talent cultivation programs in Chinese universities[J]. Tsinghua Journal of Education，2018，39(5)：63-74. (in Chinese)