

【专家荐语】这篇论文参考了椭圆边界拉伸薄膜的振动模式求解的方法,求解了无限深椭圆形方势阱薛定谔方程。求解过程写得很清楚,解析能量本征值和本征态有助于深入理解该情景下的物理系统的属性。论文可以直接接收。建议把二维椭圆边界拉伸薄膜得到波动方程的过程补充上,以便读者理解经典力学和薛定谔波动方程之间的关系。

二维无限深椭圆方势阱中薛定谔方程的解析解

贺宇乐 付柯 王雅婷 李喜彬

(内蒙古师范大学物理与电子信息学院,内蒙古 呼和浩特 010022)

摘要 基于分离变量法与马丢(Mathieu)函数理论,严格求解了二维无限深椭圆势阱中的薛定谔方程,并得到了不同离心率 e_r 、不同量子态下的能级分布以及波函数。通过椭圆坐标系的分离变量,将波函数分解为径向马丢函数与角向马丢函数的乘积。结合角向周期性边界条件以及无限深势阱边界条件,得到离散能级的本征方程。通过分析不同宇称、量子数 m 状态下的零点分布图,数值计算了能级的分布,并详细分析了能级与离心率之间的关系。利用波函数的解析表达式,分析了不同量子态波函数的性质。

关键词 无限深椭圆势阱;薛定谔方程;马丢方程;能级分布;波函数

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.12.03.02

ANALYTICAL SOLUTION OF SCHRÖDINGER EQUATION IN TWO-DIMENSIONAL INFINITE DEPTH ELLIPTICAL SQUARE POTENTIAL WELL

HE Yule FU Ke WANG Yating LI Xibin

(College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia Normal University, Huhhot, Inner Mongolia 010022)

Abstract Based on the separation-of-variables method and Mathieu function theory, we rigorously solved the Schrödinger equation for a two-dimensional infinite-depth elliptical quantum well, obtaining the energy level distributions and corresponding wave functions for various eccentricities e_r and quantum states. By separating variables in elliptical coordinates, the wave function is expressed as the product of radial Mathieu functions and angular Mathieu functions. Combining the angular periodicity boundary condition with the infinite-well boundary condition, we derived the characteristic equation that determines the discrete energy eigenvalues. Through analysis of the zero-distribution patterns of Mathieu functions under different parities and angular quantum numbers m , the energy spectra were numerically computed, and the dependence of the energy levels on the eccentricity was investigated in detail. Using the analytical expressions for the wave functions, the properties of the wave functions in different

收稿日期: 2025-12-03; 修回日期: 2026-01-24; 出版日期: 2026-03-30

基金项目: 国家自然科学基金(12275143); 中央引导地方科技发展资金项目(2024ZY0113); 内蒙古自治区自然科学基金项目(2024SHZR0009); 内蒙古师范大学教学研究课题(2023sxjxzx23919); 高等学校数学物理方法课程教学研究项目(JZW-25-SL-11)。

通信作者: 王雅婷, ytwang@imnu.edu.cn; 李喜彬, lxbimnu@imnu.edu.cn。

引文格式: 贺宇乐, 付柯, 王雅婷, 等. 二维无限深椭圆方势阱中薛定谔方程的解析解[J]. 物理与工程, 2026, 36(2): 124-131.

Cite this article: HE Y L, FU K, WANG Y T, et al. Analytical solution of Schrödinger equation in two-dimensional infinite depth elliptical square potential well[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(2): 124-131. (in Chinese)

quantum states were thoroughly analyzed.

Key words Infinite depth elliptical well; Schrodinger equation; Mathuie functions; Energy levels; Wave functions

薛定谔方程是量子力学中描述微观粒子运动状态及演化规律的基本方程。构建无限深势阱这一理想模型,认为粒子被“无限高”势能壁束缚,通过求解其薛定谔方程,可展现微观粒子能量量子化及波函数特征。对于二维或者三维的模型,讨论的问题主要集中在无限深方势阱^[1]、无限深球方势阱^[2]等。文献[3]进一步对二维以及三维的无限深环形方势阱中的能级分布进行了解析计算,其中能级的特征方程为贝塞尔函数交叉乘积组合(cross-product combination of Bessel functions)问题。对于二维、三维有限深球方势阱,文献[4]解析求解了束缚态能级以及对应的波函数。

椭圆形量子围栏作为二维无限深势阱来处理,其解为马丢函数。本文使用椭圆坐标系下的分离变量法^[5],把求解薛定谔方程转化为求解角向马丢方程、径向马丢方程^[6-9]。马丢函数于1868年为求解椭圆边界拉伸薄膜的振动模式而定义^[10],此外在倒摆、漂浮物体的稳定等诸多领域^[11],马丢函数均有着广泛的应用。

1 薛定谔方程的分离变量

直角坐标系下,二维无限深椭圆方势阱可以表示为

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right) \\ \infty, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中, a 为椭圆势阱的长轴, b 为短轴,且 $a > b > 0$ 。势阱中的定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(x, y) \psi = E \psi(x, y), \quad E > 0 \quad (2)$$

其中, μ 为粒子质量。此时,上述薛定谔方程则可以表示为定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, k > 0; \\ |\psi(0, 0)| < \infty, \psi(x, y) \big|_{b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中,第一行定义了本征值 $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$,第二行第一项为波函数的自然边界条件,第二项为边界条件。

现引入椭圆坐标系

$$\begin{aligned} x &= c \cosh u \cos \varphi \\ y &= c \sinh u \sin \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

其中的 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 表示椭圆的焦距,相关变量的范围是 $0 \leq u < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ 。通过这种定义方式,长轴和短轴分别为 $a = c \cosh u_0, b = c \sinh u_0$,于是

$$u_0 = \operatorname{arctanh}(b/a) = \operatorname{arctanh}(\sqrt{1 - e_r^2}) \quad (5)$$

其中, $e_r = c/a$ 表示椭圆的离心率。此时的椭圆势阱的边界方程为

$$\frac{\cosh^2 u \cos^2 \varphi}{\cosh^2 u_0} + \frac{\sinh^2 u \sin^2 \varphi}{\sinh^2 u_0} = 1 \quad (6)$$

势阱(1)在椭圆坐标系下可表示为

$$V(x, y) = V(u) = \begin{cases} 0, & u < u_0 \\ \infty, & u > u_0 \end{cases} \quad (7)$$

在该坐标系内,拉普拉斯算符为^[5]

$$\nabla^2 = \frac{2}{c^2 (\cosh 2u - \cos 2\varphi)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (8)$$

代入定解问题式(3)中,得到新的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{c^2 k^2}{2} (\cosh 2u - \cos 2\varphi) \psi = 0 \\ \psi|_{u=0} < \infty, \psi|_{u=u_0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

对上述方程中的待定解进行分离变量: $\psi(u, \varphi) = R(u) \Phi(\varphi)$,同时引入新的参量 $q = c^2 k^2 / 4 = \mu E c^2 / 2 \hbar^2$,分别得到关于 R 和 Φ 的方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{du^2} - (s - 2q \cosh 2u) R = 0 \\ |R(0)| < \infty, R(u_0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

以及

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + (s - 2q \cos 2\varphi) \Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases} \quad (11)$$

其中, s 为任意实数。方程(10)被称为修正马丢方程(modified Mathieu equation)或径向马丢方程(radial Mathieu equation);方程(11)被称为马丢方程(Mathieu equation)或角向马丢方程(angular Mathieu equation),第二行表示周期性边界条件。

2 本征问题及能级的数值解

对于方程(11)中给定的非零参量 q , 并非所有的 s 都使得周期性边界条件成立, 只有特定的离散实数才会使其成立, 此类特定的实数被称为马丢方程(11)的特征值。由于势能(1)具有宇称对称性, 其解同样具有特定的宇称对称性; 按照文献[6-8]中的统一记法, 在满足周期性边界条件的前提下, 将得到偶宇称解所对应的特征值 s 记为 a_m , 其中 $m=0, 1, 2, \dots$; 反之, 将得到的奇宇称解对应的特征值 s 记为 b_m , 其中 $m=1, 2, 3, \dots$ 。显然, 特征值 a_m 和 b_m 依赖于参量 q , 具体的表达式为

$$\begin{aligned} a_0(q) &= -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6 + \\ &\quad \frac{68687}{18874368}q^8 + \dots \\ b_1(q) &= 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 - \\ &\quad \frac{11}{36864}q^5 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

这里我们仅给出了 a_0 和 b_1 两项, 其余特征值的具体表达式, 可参考文献[6]。

我们首先讨论角向波函数。马丢方程(11)中具有偶宇称对称性的解被称为余弦椭圆马丢函数(cosine-elliptic Mathieu function), 记为 $ce_m(\varphi, q)$; 反之, 奇宇称对称性的解则被称为正弦椭圆马丢函数(sine-elliptic Mathieu function), 记为 $se_m(\varphi, q)$ 。因此, 角向波函数的解为(未归一化)

$$\Phi_{em} = ce_m(\varphi, q), \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (13a)$$

$$\Phi_{om} = se_m(\varphi, q), \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (13b)$$

其中, $p=o$ 或 e 表示具有奇宇称或偶宇称对称性的波函数。Ince 定理^[10]指出: 除 $q=0$ 外, 对于同一 q 及 s , 函数(13a)和(13b)不可能同时为方程(11)的解。换言之, 函数 $ce_m + ise_m$ 不能作为马丢方程(11)的解, 即薛定谔方程(2)的解不能作为角动量算符的本征态。这是因为椭圆势阱(1)不再具有旋转对称性, 即系统不具有角动量守恒的内部对称性, 但是椭圆势阱仍保持着中心对称性, 所以波函数可以写为具有特定宇称对称性的形式。根据马丢函数的对称性, 有

$$ce_{2m}(z, q) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell}^{(2m)} \cos 2\ell z,$$

$$ce_{2m+1}(z, q) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell+1}^{(2m+1)} \cos(2\ell+1)z$$

$$se_{2m+1}(z, q) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{2\ell+1}^{(2m+1)} \sin(2\ell+1)z$$

$$se_{2m+2}(z, q) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{2\ell+2}^{(2m+2)} \sin(2\ell+2)z \quad (14)$$

其中 $m=0, 1, 2, \dots$ 。可见, ce_{2m} 和 se_{2m+2} 是以 π 为周期, 而 ce_{2m+1} 和 se_{2m+1} 是以 2π 为周期。系数 $A_{\ell}^{(m)}$ 与 $B_{\ell}^{(m)}$ 的递推关系见文献[6-7]。

接下来, 分析径向波函数对应的修正马丢方程(10), 其中的参量 s 正是马丢方程(11)的本征值, 即 a_m 或 b_m 。方程(10)的解为修正马丢函数(modified Mathieu function), 记为 $Ce_m(u, q)$ 、 $Se_m(u, q)$; 或者径向马丢函数(radial Mathieu function), 记为 $Mc_m^{(j)}(u, q)$ 、 $Ms_m^{(j)}(u, q)$ 。这里的 m 正是 a_m 、 b_m 中的指标。本文中, 我们采用后者作为方程(10)的解, 因为它们对应着不同类型贝塞尔函数(Bessel functions)的级数展开, 方便利用波函数的自然边界条件。在径向马丢函数中, $Mc_m^{(j)}(u, q)$ 对应着由本征值 a_m 确定的本征函数, 而 $Ms_m^{(j)}(u, q)$ 对应着由本征值 b_m 确定的本征函数, 其中 $j=1, 2, 3, 4$ 分别对应着第一类贝塞尔函数 J_n (Bessel function)、诺依曼函数 Y_n (Neumann function)、第一类汉克尔函数 $H_n^{(+)}$ (Hankel function) 和第二类汉克尔函数 $H_n^{(-)}$ 的级数展开形式。径向马丢函数的具体级数表达式为

$$\begin{aligned} Mc_{2m}^{(j)}(z, h) &= \frac{(-1)^m}{ce_{2m}(\pi/2, h^2)} \cdot \\ &\quad \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{2\ell}^{(2m)}(h^2) \mathcal{C}_{2\ell}^{(j)}(2h \sinh z) \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} Mc_{2m+1}^{(j)}(z, h) &= \frac{(-1)^{m+1} \coth z}{ce'_{2m+1}(\pi/2, h^2)} \cdot \\ &\quad \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) A_{2\ell+1}^{(2m+1)}(h^2) \cdot \\ &\quad \mathcal{C}_{2\ell+1}^{(j)}(2h \sinh z) \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} Ms_{2m+1}^{(j)}(z, h) &= \frac{(-1)^m}{se_{2m+1}(\pi/2, h^2)} \cdot \\ &\quad \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{2\ell+1}^{(2m+1)}(h^2) \mathcal{C}_{2\ell+1}^{(j)}(2h \sinh z) \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} \text{Ms}_{2m+2}^{(j)}(z, h) &= \frac{(-1)^{m+1} \coth z}{\text{se}_{2m+2}'(\pi/2, h^2)} \cdot \\ &\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+2) B_{2\ell+2}^{(2m+2)}(h^2) \cdot \\ &\mathcal{C}_{2\ell+2}^{(j)}(2h \sinh z) \end{aligned} \quad (15d)$$

其中, $h = \sqrt{q}$, $\mathcal{C}_{\mu}^{(1)} = J_{\mu}$, $\mathcal{C}_{\mu}^{(2)} = Y_{\mu}$, $\mathcal{C}_{\mu}^{(3)} = H_n^{(+)}$, $\mathcal{C}_{\mu}^{(4)} = H_n^{(-)}$ 。这里将采用 $j=1, 2$ 的线性组合作为方程(10)的通解, 即以 Mc_m 为例 $R = C_1 \text{Mc}_m^{(1)}(u, q) + C_2 \text{Mc}_m^{(2)}(u, q)$ 。再来看径向马丢函数的收敛性, 文献[6, 10]中指出, 只有当 $j=1$ 时, 函数(15a)~(15d)在整个实数域内收敛(关于变量 z); 而当 $j=2, 3, 4$ 时, 上述函数在 $z=0$ 处均发散。根据波函数的自然边界条件 $|R(0)| < \infty$, 可以确定 $C_2 = 0$ 。需要指出的是, $\text{Mc}_m^{(1)}/\text{Ms}_m^{(1)}$ 也被称为修正马丢函数, 存在对应关系

$$\text{Mc}_m^{(1)}(z, q) = \text{Ce}_m(z, q) = \text{ce}_m(iz, q) \quad (16a)$$

$$\text{Ms}_m^{(1)}(z, q) = \text{Se}_m(z, q) = -i \text{ce}_m(iz, q) \quad (16b)$$

其中, $\text{Ce}_m(z, q)$ 与 $\text{Se}_m(z, q)$ 表示修正马丢函数。下文我们仍采用 $\text{Mc}_m^{(1)}/\text{Ms}_m^{(1)}$ 的记法。

此时的波函数 R 可以写为关于偶宇称状态 e 的形式(未归一化)

$$R_{em}(u) = \begin{cases} \text{Mc}_m^{(1)}(u, q), & u < u_0 \\ 0, & u > u_0 \end{cases} \quad (17a)$$

或者奇宇称状态 o 的形式

$$R_{om}(u) = \begin{cases} \text{Ms}_m^{(1)}(u, q), & u < u_0 \\ 0, & u > u_0 \end{cases} \quad (17b)$$

将边界条件 $R(u_0) = 0$ 分别代入波函数(17a)和(17b)中, 得到不同宇称状态下的本征方程

$$\text{Mc}_m^{(1)}(u_0, q_{em}) = 0 \quad (18a)$$

$$\text{Ms}_m^{(1)}(u_0, q_{om}) = 0 \quad (18b)$$

其中, q_{pmn} 表示在给定宇称状态 p (e 或 o) 以及量子数 m 的前提下, 方程 $R_{pm}(u_0) = 0$ 的第 n 个零点。为更好展示特征值 q_{pmn} 的分布特点, 图 1 给出了不同宇称、量子数 m 状态下的零点分布。

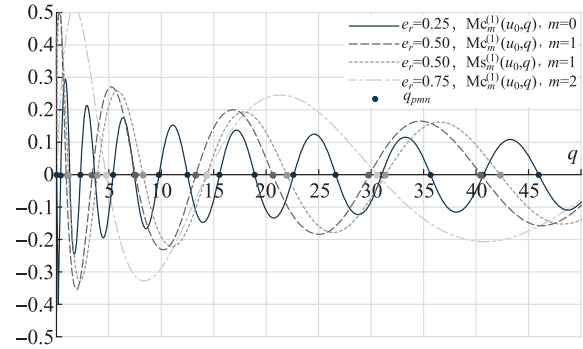


图 1 不同离心率、宇称状态以及量子数 m 取值情况下, 径向马丢函数 $\text{Mc}_m^{(1)}/\text{Ms}_m^{(1)}$ 关于参量 q 的变化曲线, 以及由本征方程(18a)、(18b)确定的本征值分布状态图

根据式(10)中对参量 q 的定义, 可以得到偶宇称和奇宇称状态的能级分别为

$$\begin{aligned} E_{em} &= \frac{2\hbar^2 q_{em}}{\mu c^2} = \frac{2\hbar^2 q_{em} (1 - e_r^2)}{\mu b^2 e_r^2}, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} E_{om} &= \frac{2\hbar^2 q_{om}}{\mu c^2} = \frac{2\hbar^2 q_{om} (1 - e_r^2)}{\mu b^2 e_r^2}, \\ m &= 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (19b)$$

这里我们假定固定短轴, 即 b 的大小固定, 通过改变长轴的长度 a 来调节离心率 e_r 的大小。表 1 列出了通过本征方程(18a)以及(18b)并利用数值方法得到的能级分布数据, 对应的能级图绘制在图 2 中, 采用的归一化条件为 $2\hbar^2/\mu b^2 = 1 \text{ eV}$ 。可见,

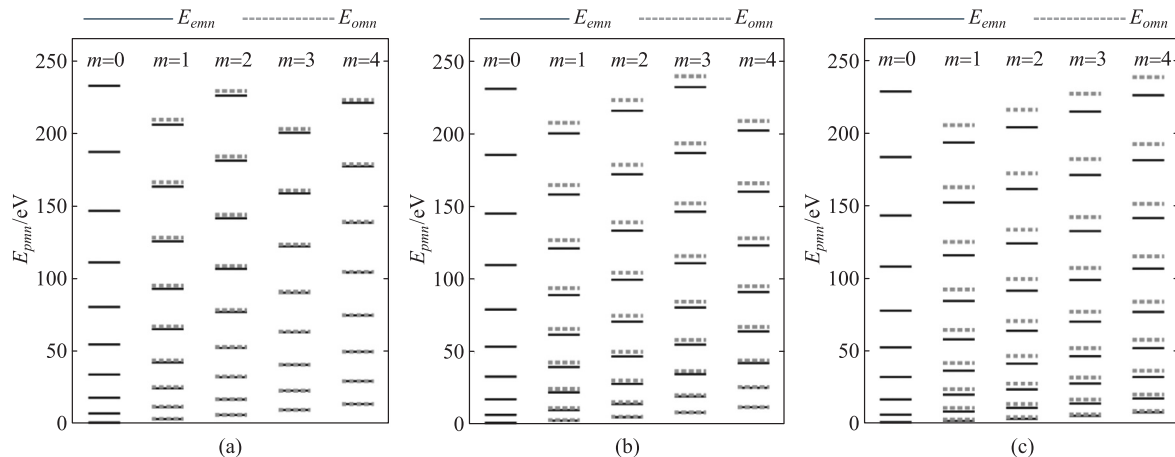


图 2 表 1 中数据对应能级示意图

依次对应 (a) $e_r = 0.25$; (b) $e_r = 0.5$; (c) $e_r = 0.75$ 的情况

表 1 不同离心率情况下的能级 E_{pmn} 分布数据 单位:eV

$e_r=0.25$									
$p=e$ 偶宇称					$p=o$ 奇宇称				
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$n=1$	1.3995	3.4980	6.3630	9.8430	13.9275	3.6120	6.3870	9.8445	13.9275
$n=2$	7.4025	11.7405	17.0310	23.0070	29.5935	12.1230	17.1735	23.0340	29.5965
$n=3$	18.2790	24.7470	32.3535	40.8120	49.8855	25.5285	32.7720	40.9455	49.9095
$n=4$	34.0950	42.5940	52.3815	63.2400	74.8305	43.8465	53.2260	63.6345	74.9415
$n=5$	54.8595	65.3685	77.2020	90.3165	104.3865	67.0905	78.5670	91.1430	104.7240
$n=6$	80.5650	93.1080	106.9230	122.1255	138.5415	95.2680	108.8205	123.5130	139.2960
$n=7$	111.2070	125.8050	141.6135	158.7870	177.3660	128.3790	144.0015	160.7775	178.6995
$n=8$	146.7855	163.4445	181.2825	200.4075	220.9815	166.4250	184.1160	202.9605	222.9780
$e_r=0.50$									
$p=e$ 偶宇称					$p=o$ 奇宇称				
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$n=1$	1.2642	2.9796	5.4519	8.5791	12.2499	3.4380	5.7603	8.7306	12.3048
$n=2$	6.9723	10.2987	14.5281	19.6404	25.5369	11.6853	15.7422	20.5602	26.1192
$n=3$	17.6493	22.5453	28.2738	34.9236	42.5493	24.8436	30.5469	37.0359	44.3283
$n=4$	33.2730	39.7959	47.1066	55.2489	64.2882	42.9360	50.2773	58.3965	67.3200
$n=5$	53.8332	61.9941	70.9290	80.6646	91.2312	65.9640	74.9451	84.6963	95.2398
$n=6$	79.3287	89.1303	99.6990	111.0552	123.2202	93.9270	104.5497	115.9368	128.1066
$n=7$	109.7595	121.2030	133.4091	146.3943	160.1766	126.8253	139.0905	152.1156	165.9174
$n=8$	145.1250	158.2116	172.0569	186.6756	202.0830	164.6583	178.5666	193.2321	208.6686
$e_r=0.75$									
$p=e$ 偶宇称					$p=o$ 奇宇称				
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
$n=1$	1.0337	2.1054	3.6462	5.6638	8.1503	3.1337	4.6791	6.6321	9.0036
$n=2$	6.4991	8.6077	11.1323	14.1019	17.5443	11.0989	13.7651	16.8350	20.3272
$n=3$	16.9330	20.1616	23.7883	27.8289	32.2964	24.0007	27.7939	31.9807	36.5750
$n=4$	32.3034	36.6613	41.4104	46.5617	52.1259	41.8390	46.7631	52.0761	57.7866
$n=5$	52.6089	58.0992	63.9761	70.2489	76.9261	64.6131	70.6697	77.1112	83.9463
$n=6$	77.8501	84.4737	91.4807	98.8797	106.6777	92.3214	99.5120	107.0852	115.0481
$n=7$	108.0263	115.7839	123.9226	132.4501	141.3728	124.9648	133.2893	141.9950	151.0872
$n=8$	143.1376	152.0291	161.3010	170.9587	181.0091	162.5431	172.0024	181.8406	192.0644

系统的基态能级为 E_{e01} ;相同 m 、 n 但不同宇称状态下的能级并不简并,奇宇称的能级略高于偶宇称,随着量子数 n 或离心率 e_r 的增大,这个差距会明显变大;当离心率增大时,相同量子态 pmn 的能级会降低。

3 能级与离心率的关系

式(19a)~(19b)给出了不同宇称条件下能级

与离心率的关系。首先,来看两种特殊情况(固定短轴 b): $e_r=0$ 及 $e_r=1$ 。前者对应的模型为二维无限深圆势阱

$$V(\rho)=\begin{cases} 0, & \rho < b \\ \infty & \rho \geq b \end{cases} \tag{20}$$

其离散能级为^[2]

$$E_{mn}^{(0)}=\frac{\hbar^2[x_n^{(m)}]^2}{2\mu b^2}, \quad m=0,1,2,\cdots,n=1,2,3,\cdots \tag{21}$$

其中, $x_n^{(m)}$ 表示 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个零点; 后者对应的模型为无限深势阱

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & |y| < b, \quad x \propto \mathbb{R} \\ \infty, & |y| \geq b, \quad x \propto \mathbb{R} \end{cases} \quad (22)$$

能级为

$$E_{n, p_x}^{(1)} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2\mu(2b)^2} + \frac{p_x^2}{2\mu}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, p_x \geq 0 \quad (23)$$

图 3 绘制了不同能级与离心率之间的变化关系, 归一化条件为 $2\hbar^2/\mu b^2 = 1\text{eV}$ 。可以发现, 当 $e_r \rightarrow 0$ 时, 态 ψ_{emn} 与 ψ_{omn} 发生简并, 对应的能级关系为

$$E_{pmn} \rightarrow \frac{\hbar^2 [x_n^{(m)}]^2}{2\mu b^2}, \quad e_r \rightarrow 0 \quad (24)$$

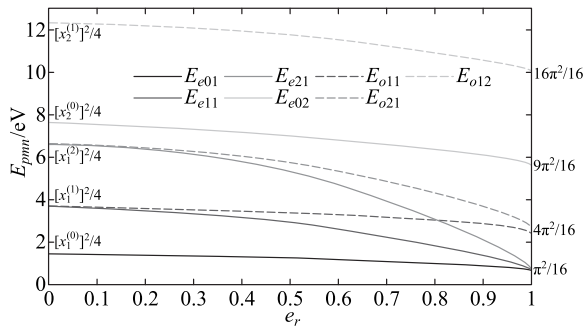


图 3 不同能级 E_{pmn} 随离心率 e_r 的变化关系。图中归一化条件为 $2\hbar^2/\mu b^2 = 1\text{eV}$, $x_n^{(m)}$ 表示 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个零点

当 $e_r \rightarrow 1$ 时, 能级仍存在简并, 通过数值分析发现, 对应的简并关系为

$$E_{pmn} \rightarrow \frac{(2n-p)^2 \pi^2 \hbar^2}{8\mu b^2}, \quad e_r \rightarrow 1 \quad (25)$$

其中, $p=1$ 表示偶宇称, $p=0$ 表示奇宇称。

4 波函数及其数值结果

如前文所述, 波函数 $R(u)$ 和 $\Phi(\varphi)$ 是整体波函数 $\psi(u, \varphi)$ 分离变量的结果, 因此薛定谔方程 (2) 的偶宇称和奇宇称的解分别为

$$\psi_{emn} = \begin{cases} C_{emn} \text{Mc}_m^{(1)}(u, q_{emn}) \text{ce}_m(\varphi, q_{emn}), & u < u_0 \\ 0, & u > u_0 \end{cases} \quad (26a)$$

和

$$\psi_{omn} = \begin{cases} C_{omn} \text{Ms}_m^{(1)}(u, q_{omn}) \text{se}_m(\varphi, q_{omn}), & u < u_0 \\ 0, & u > u_0 \end{cases} \quad (26b)$$

其中的归一化系数的积分表达形式分别为 (利用波函数的归一化条件)

$$|C_{emn}|^{-2} = \frac{b^2 e_r^2}{1 - e_r^2} \int_0^{u_0} du \int_0^{2\pi} d\varphi (\sinh^2 u + \sin^2 \varphi) \cdot [\text{Mc}_m^{(1)}(u, q_{emn}) \text{ce}_m(\varphi, q_{emn})]^2 \quad (27a)$$

$$|C_{omn}|^{-2} = \frac{b^2 e_r^2}{1 - e_r^2} \int_0^{u_0} du \int_0^{2\pi} d\varphi (\sinh^2 u + \sin^2 \varphi) \cdot [\text{Ms}_m^{(1)}(u, q_{omn}) \text{se}_m(\varphi, q_{omn})]^2 \quad (27b)$$

这里, $c^2(\sinh^2 u + \sin^2 \varphi)$ 表示椭圆坐标系下的积分测度^[5]。

图 4 绘制了不同离心率以及量子态下的波函数的概率密度分布 $(\sinh^2 u + \sin^2 \varphi) |\psi(x, y)|^2$, 坐标的归一化条件为 $b=1$ 。根据图中波函数的概率密度, 可以归纳出如下结论:

(1) 对于 $p=e, m=0$ 的状态, 在短轴方向形成 $2n-1$ 条干涉条纹, 且在长轴方向干涉相消;

(2) 随着离心率 e_r 的增大, 上述量子态在短轴方向的干涉效果愈明显;

(3) 对于相同量子数 m, n , 但宇称不同的量子态, 势阱内的反射条纹互补 (并不具备相加归一的结论, 只是干涉效果上的互补);

(4) 对于 $p=e, m=2k+1$ 的量子态, 在长轴方向产生干涉加强的效果, 而在短轴方向上概率密度几乎为零, 且长轴方向上的干涉条纹数量为 $2n$; 而对于 $p=e, m=2k$ 的量子态, 在短轴方向产生干涉加强的效果, 且在该方向上的干涉条纹数量为 $2n-1$ 。

(5) 对于 $p=o, m=2k+1$ 的量子态, 均在短轴方向产生干涉加强的效果, 而在长轴方向上概率密度几乎为零, 且在短轴方向上的干涉条纹数量为 $2n$; 反之, 对于 $m=2k$ 的量子态, 无论在长轴还是在短轴上, 概率密度均为零, 且沿短轴方向上的干涉条纹数量同样为 $2n$ 。

5 结语

本研究系统探讨了二维无限深椭圆势阱中薛定谔方程的解析解, 通过椭圆坐标系分离变量法将方程分解为径向和角向方程, 并引入马丢函数构造满足边界条件的波函数。结合波函数在势阱边界为零的条件, 求解马丢方程的本征值问题, 成

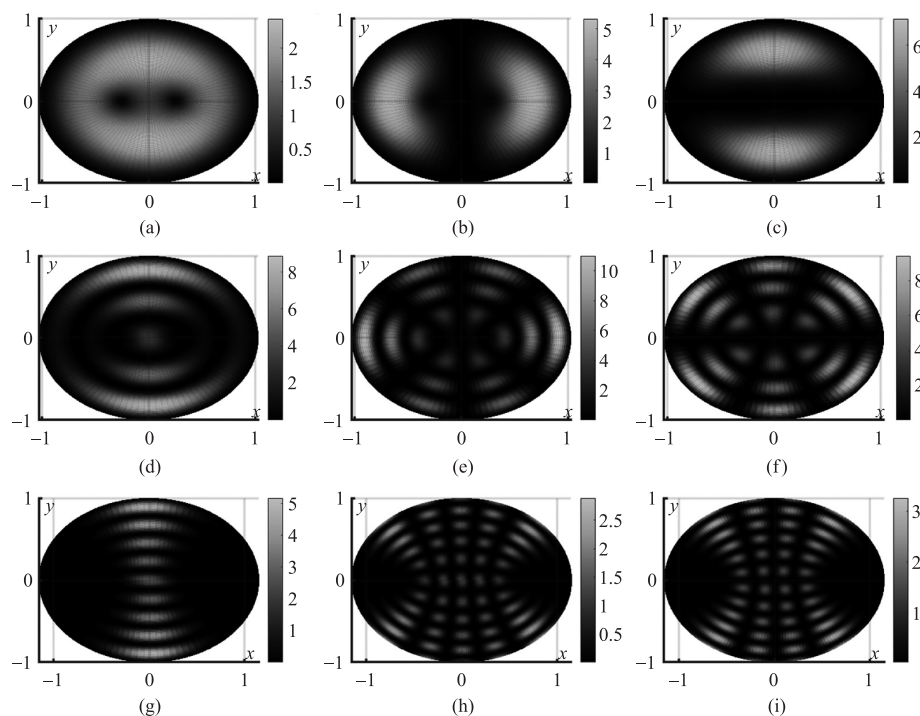


图4 椭圆无限深方势阱中不同量子态的概率密度分布示意图,参数的归一化条件为 $b=1$

(a) $e_r=0.25, p=e, m=0, n=1$; (b) $e_r=0.25, p=e, m=1, n=1$; (c) $e_r=0.25, p=o, m=1, n=1$; (d) $e_r=0.25, p=e, m=0, n=3$;
(e) $e_r=0.25, p=e, m=3, n=3$; (f) $e_r=0.25, p=o, m=3, n=3$; (g) $e_r=0.5, p=e, m=0, n=5$; (h) $e_r=0.5, p=e, m=4, n=5$;
(i) $e_r=0.5, p=o, m=4, n=5$

功求解出偶宇称态和奇宇称态的能级。提供了通过调控离心率和量子数可精确调控激发能级,概率密度分布的新思路。

研究结果表明:关于能级特性,椭圆势阱的能级呈现非简并特性,能级间隔随离心率增大而变化。通过数值计算绘制的能级图显示,量子数 n , m 和离心率 e_r 显著影响能级分布,宇称(偶/奇)进一步影响了不同量子态的能量结构。关于波函数与概率密度,概率密度分布图直观展示了量子态的局域化行为,离心率增大导致概率密度向短轴方向集中,量子数 n 决定了波函数的节点数。

通过求解此模型,可以帮助学生更好地掌握定态薛定谔方程的解法、理解马丢函数的性质等问题。

附录 椭圆薄膜振动的级数表达式

通过正文的计算,可知定态薛定谔方程本征态的含时解析表达式为

$$\psi(u, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{omn} e^{-iE_{omn}t/\hbar} \text{Mc}_m^{(1)}(u, q_{omn}) \text{ce}_m(\varphi, q_{omn}) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{omn} e^{-iE_{omn}t/\hbar} \text{Ms}_m^{(1)}(u, q_{omn}) \text{se}_m(\varphi, q_{omn}) \quad (28)$$

其中, $u < u_0$ 。为了更好地理解经典力学和薛定谔波动方程之间的区别,下面补充关于二维椭圆边界拉伸薄膜波动方程的简要求解过程^[10]。

设薄膜的长轴长度为 a ,短轴为长度为 b ,并假设薄膜边缘固定,则薄膜的运动方程为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \xi^2 \Delta v = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \quad (29)$$

其中, v 表示薄膜偏离平衡位置的位移,以及 $\xi^2 = T/\rho$ (ξ 表示薄膜中的声速), T 表示薄膜的内部张力, ρ 表示薄膜的质量密度。令 $v(u, \varphi, t) = w(u, \varphi) e^{\pm i\omega t}$,于是

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 \\ w|_{u=u_0} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

其中, $k = \omega/\xi$,以及 $u_0 = \arctan(b/a)$, u_0 定义与正文中的式(5)相同。方程(30)的求解方法与正文中完全一致,不再赘述,于是二维椭圆薄膜的运动方程的级数解为

$$\begin{aligned}
 v(u, \varphi, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \text{Mc}_m^{(1)}(u, q_{emn}) \cdot \\
 & \text{ce}_m(\varphi, q_{emn}) \sin(\omega_{emn}t + \phi_{emn}) + \\
 & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{mn} \text{Ms}_m^{(1)}(u, q_{omn}) \cdot \\
 & \text{se}_m(\varphi, q_{omn}) \sin(\omega_{omn}t + \phi_{omn})
 \end{aligned} \quad (31)$$

上式中 $\omega_{pmn} = 2\xi q_{pmn}^{1/2}/c$, 其中 c 表示椭圆的焦距; q_{pmn} 的含义与正文相同, 具体的定义见式(18a)~(18b)。式中的系数 $C_{mn}, S_{mn}, \phi_{emn}, \phi_{omn}$ 最终由系统的初始条件确定。

可见, 二维无限深椭圆势阱中的薛定谔方程和椭圆拉伸薄膜的解在关于空间部分的本征函数完全一致, 仅在时间传播部分存在差别。这种差别由控制方程关于时间偏导数的不同所决定。

参 考 文 献

- [1] 杨红卫, 孟珊珊, 高冉冉. 基于 GUI 的三维无限深势阱可视化研究[J]. 物理与工程, 2017, 27(6): 81-85.
WANG H W, MENG S S, GAO R R. Visualization research of three-dimensional infinite potential well based on GUI[J]. Physics and Engineering, 2017, 27(6): 81-85. (in Chinese)
- [2] 岳家兴. 量子围栏中的表面电子态[J]. 大学物理, 2006(6): 57-60.
YUE J X. The states of surface electron in the quantum corral[J]. College Physics, 2006(6): 57-60. (in Chinese)
- [3] 王玉凤, 付柯, 王跃超, 等. 二维、三维无限深环形势阱中波函数的求解与可视化[J]. 大学物理, 2023, 42(1): 55-59, 64.
WANG Y F, FU K, WANG Y C. Solution and visualization of wave functions in two-dimensional and three-dimensional infinite deep annular potential wells[J]. College Physics, 2023, 42(1): 55-59, 64. (in Chinese)
- [4] 刘乐平, 孙嘉泽, 李喜彬, 等. 二维、三维有限深球方势阱中的束缚态[J]. 物理与工程, 2025, 35(2): 38-45.
LIU L P, SUN J Z, LI X B, et al. Bound states in 2D and 3D finite deep spherical square potential wells[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(2): 38-45. (in Chinese)
- [5] WILLATZEN M, VOON L C L Y. Separable boundary-value problems in physics[M]. John Wiley & Sons, 2011.
- [6] OLVER F W, LOZIER D W, BOISVERT R F, et al. NIST handbook of mathematical functions[M]. Cambridge university press, 2010.
- [7] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of Integrals, Series and Products (Eighth Edition)[M]. Academic Press, Singapore, 2018.
- [8] 王竹溪. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
WANG Z X. Introduction to special function[M]. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese)
- [9] GUTIÉRREZ-VEGA J C, RODRIGUEZ-DAGNINO R M, MENESES-NAVA M A, et al. Mathieu functions, a visual approach[J]. American Journal of Physics, 2003, 71(3): 233-242.
- [10] MCLACHLAN N W, MAC LACHLAN N W. Theory and application of Mathieu functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1947.
- [11] RUBY L. Applications of the Mathieu equation[J]. American Journal of Physics, 1996, 64(1): 39-44.