

## 量纲分析在弹性力学教学中的认知价值与应用案例

袁学波

(西南交通大学力学与航空航天学院, 四川 成都 610031)

**摘 要** 量纲分析是连接物理直觉与数学形式的重要桥梁,在弹性力学教学中具有独特的认知价值。本文从教学视角探讨量纲分析在应力公式建立中的应用,旨在帮助学生通过物理量关系理解弹性力学方程的本质。以三个典型问题为例——楔形重力坝问题、楔形体楔面受分布力问题、楔形体受顶端集中力及力偶问题——展示量纲分析在不依赖复杂推导情况下,如何直观推测应力特征形式。教学实践表明,该方法能有效激发学生的物理思维,促进由公式记忆向物理理解的认知转化。

**关键词** 弹性力学;量纲分析;应力分析

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.10.23.03

## COGNITIVE VALUE AND APPLICATION CASES OF DIMENSIONAL ANALYSIS IN THE TEACHING OF ELASTIC MECHANICS

YUAN Xuebo

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031)

**Abstract** Dimensional analysis is an important bridge connecting physical intuition and mathematical form, and it has unique cognitive value in the teaching of elasticity mechanics. This paper explores the application of dimensional analysis in the establishment of stress formulas from a teaching perspective, aiming to help students understand the essence of elasticity mechanics equations through the relationships of physical quantities. Taking three typical problems as examples including the problem of a wedge-shaped gravity dam, the problem of a wedge-shaped body with a wedge surface subjected to distributed forces, and the problem of a wedge-shaped body subjected to concentrated forces and couples at the top, this paper demonstrates that dimensional analysis can intuitively speculate the form of stress characteristics without relying on complex derivations. Teaching practice shows that this method can effectively stimulate students' physical thinking and promote the cognitive transformation from formula memorization to physical understanding.

**Key words** elasticity mechanics; dimensional analysis; stress analysis

弹性力学<sup>[1,2]</sup>是工程类专业的核心课程之一,其理论体系严密、推导过程复杂、物理内涵深刻。学生在学习中常能熟记公式,却难以真正理解公

式的来源与适用条件。在应力求解问题的推导中,烦琐的数学符号往往掩盖了公式背后的物理意义,使学习陷入“只知其形、不知其理”的状态。

收稿日期: 2025-10-23; 修回日期: 2025-12-06; 出版日期: 2026-03-30

基金项目: 西南交通大学高水平育人课程教改项目(GK20240112), 2024—2026年四川省高等教育人才培养质量和教改项目“教育数智化转型背景下教学新形态的探索与实践——以力学核心课程为例”, 国家自然科学基金(12402114)。

通信作者: 袁学波, yuanxb@swjtu.edu.cn。

引文格式: 袁学波. 量纲分析在弹性力学教学中的认知价值与应用案例[J]. 物理与工程, 2026, 36(2): 78-85.

Cite this article: YUAN X B. Cognitive value and application cases of dimensional analysis in the teaching of elastic mechanics[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(2): 78-85. (in Chinese)

如何引导学生从物理量关系出发,建立对公式的直观理解,是弹性力学教学面临的问题之一。

量纲分析<sup>[3,4]</sup>是一种基于物理量维度平衡的推理方法,可在不求解复杂方程的前提下揭示变量间的本质关系。它在流体力学<sup>[5]</sup>、传热学<sup>[6,7]</sup>等课程中被广泛用于相似准则与无量纲化处理,但在弹性力学教学中应用不足。事实上,许多经典弹性力学问题的应力特征关系<sup>[8]</sup>均可通过量纲分析得到启发,为学生理解力学公式提供了自然的切入点。

从认知心理学角度看,学生对抽象物理规律的理解通常经历“感性认知—表征转化—概念建构”三个阶段。量纲分析正是实现“从感性到理性”的重要桥梁。它能够帮助学生在面对复杂的数学推导时,先形成对问题物理量关系的感性认识,再通过量纲推理获得应力、位移等未知量的数学结构,从而在心智结构中构建更稳固的物理图景。因此,将量纲分析方法引入力学课程教学<sup>[8-10]</sup>,不仅具有知识传授的意义,更具认知启发价值。

本文探讨量纲分析在弹性力学教学中的应用与认知价值。通过选取三个具有代表性的经典问题:(1)楔形重力坝受重力与液体压力问题;(2)楔形体在楔面受分布力问题;(3)楔形体在顶端受集中力与力偶问题——展示量纲分析在理解应力公式来源、判断控制变量及形成物理直觉方面的教学潜力。研究旨在为弹性力学教学提供一种从物理量关系出发的启发式教学路径,促进学生由公式记忆向物理理解的转化。本文期望为弹性力学课程提供一种兼具理论性与直观性的教学路径,使学生能够在“从物理量关系到应力公式推导”的过程中,真正体会儿学的科学思维方式,增强学习的主动性与创新意识。

## 1 量纲分析方法概述

量纲分析是力学研究中一种重要的理论工具,它以物理量的基本量纲为基础,通过分析不同物理量之间的量纲一致性关系,揭示问题中隐含的相似性规律与变量之间的依赖关系。其核心思想在于:任何合理的物理方程都必须满足量纲一致性原则,即等式两边各物理量在基本量纲上的指数组合应完全相同。

在弹性力学教学中,量纲分析不仅是一种辅助计算或检验公式合理性的手段,更是一种引导学生从物理本质理解基本未知量与载荷、材料、几何参数之间关系的重要认知工具。学生通过量纲分析,可以从“公式记忆”转向“物理推理”,实现从定性认知到定量推导的认知跃迁。

### 1.1 基本原理与步骤

在国际单位制中,力学问题以长度  $L$ 、质量  $M$  和时间  $T$  为基本量纲(热学问题加上温度量纲  $\Theta$ 、电学问题加上电流量纲  $I$ )。力学问题中其他常见物理量量纲为导出量纲。常见物理量的量纲见表 1。

表 1 常见物理量的量纲

| 物理量名称        | 量纲        | 物理量名称                                     | 量纲              |
|--------------|-----------|-------------------------------------------|-----------------|
| 面积 $S$       | $L^2$     | 加速度 $g$                                   | $LT^{-2}$       |
| 体积 $V$       | $L^3$     | 力 $F$                                     | $MLT^{-2}$      |
| 惯性矩 $J$      | $L^4$     | 力矩、力偶 $M$                                 | $ML^2T^{-2}$    |
| 速度 $v$       | $LT^{-1}$ | 压力 $P$ 、应力 $\sigma$ 、<br>面力 $f_s$ 、模量 $E$ | $ML^{-1}T^{-2}$ |
| 角速度 $\omega$ | $T^{-1}$  | 体力 $f_b$                                  | $ML^{-2}T^{-2}$ |
| 密度 $\rho$    | $ML^{-3}$ | 功、能量 $W$                                  | $ML^2T^{-2}$    |

量纲分析的一般步骤包括。

#### 1) 确定控制变量

分析问题中涉及的主要物理量,包括载荷参数  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , 以及材料和几何参数  $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ 。

#### 2) 建立量纲方程

将目标物理量(如应力分量  $\sigma$ )表示为控制变量的函数形式,即

$$\sigma = f(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (1)$$

其中,  $f$  是未确定的函数。由于弹性力学具有小变形和线弹性等基本假定,单个载荷作用下的应力分量与相应载荷成正比,且最终应力分量的解答是单个载荷作用下应力分量之和(即叠加原理),故

$$\sigma = p_1 f_1(q_1, q_2, \dots, q_m) + p_2 f_2(q_1, q_2, \dots, q_m) + \dots + p_n f_n(q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (2)$$

其中,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  是待定函数。

#### 3) 建立量纲平衡条件

将式(2)代入量纲,确保等式两边量纲相同,即

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\sigma}{p_1} \right] &= [f_1(q_1, q_2, \dots, q_m)] \\ \left[ \frac{\sigma}{p_2} \right] &= [f_2(q_1, q_2, \dots, q_m)] \\ &\dots \\ \left[ \frac{\sigma}{p_n} \right] &= [f_n(q_1, q_2, \dots, q_m)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

4) 确定待定函数  $f_1, f_2, \dots, f_n$

对于任一函数  $f_i(q_1, q_2, \dots, q_m)$ , 材料和几何参数  $(q_1, q_2, \dots, q_m)$  中  $m$  个物理量往往可以组成  $m-r$  个独立的无量纲组合量  $(H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, \dots, H_r^{(i)})$ , 如

$$\begin{aligned} &f_i(q_1, q_2, \dots, q_m) \\ &= H_1^{(i)}(q_1, q_2, \dots, q_{m-r}) q_{m-r+1} + \\ &H_2^{(i)}(q_1, q_2, \dots, q_{m-r}) q_{m-r+2} + \dots + \\ &H_r^{(i)}(q_1, q_2, \dots, q_{m-r}) q_m \end{aligned} \quad (4)$$

$H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, \dots, H_r^{(i)}$  的函数形式并不能由式(4)直接预言, 需要通过解析、仿真或实验才能确定。

## 1.2 典型应用意义

量纲分析方法在弹性力学中的应用主要体现在以下几个方面:

(1) 物理关系的快速识别: 通过量纲关系, 可迅速判断应力等未知变量与几何尺寸、载荷及材料参数的依赖形式, 从而为解析推导提供启发。

(2) 公式正确性的验证: 学生在推导复杂应力方程时, 容易出现遗漏或错误项。量纲检验可作为直观且有效的自检手段。

(3) 培养学生的物理直觉: 通过量纲平衡推导出应力公式的过程, 能使学生认识到公式背后的物理约束, 从而从“符号操练”走向“物理解释”。

在教学设计上, 教师可将量纲分析作为连接物理思维与数学推导的“中介桥梁”。例如, 在讲授楔形坝受力分析前, 先让学生思考“应力与哪些物理量有关? 模量、密度、重力加速度、几何参数如何影响?” 进而引导学生用量纲分析构建应力表达式, 为后续推导埋下思维伏笔。通过这种方式, 学生在尚未进行复杂微分方程求解之前, 已能获得应力分布的定性规律, 实现“以物理启发代替数学推演”的教学效果。

## 2 量纲分析在弹性力学典型教学案例中的应用

此处选取三个具有代表性的楔形体问题, 通

过量纲分析方法进行应力标度推导与物理规律探讨, 展示量纲分析在弹性力学中的应用价值。案例按难度递进, 由体力控制的重力坝问题, 到分布力作用的楔体, 再到集中力与力偶问题。

### 2.1 案例 A: 楔形重力坝受重力与液体压力(直角坐标解答)

#### 1) 问题描述

考虑二维楔形重力坝, 受自身重力及静水压力作用, 如图 1 所示。坝体假设为无限高, 左边界平行于铅垂方向, 右边界的坡度为  $\alpha$ 。坝体密度  $\rho$ , 水密度  $\gamma$ , 重力加速度  $g$ 。坝体弹性模量为  $E$ , 泊松比为  $\mu$ 。直角坐标系的原点  $O$  为楔形坝体顶点,  $x$  正方向沿水平向右,  $y$  正方向沿竖直向下。求应力分量  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ 。

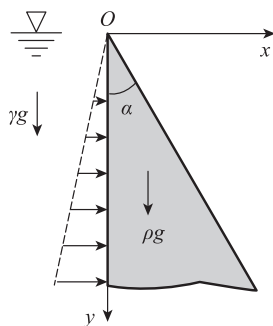


图 1 楔形重力坝受重力与液体压力的力学分析示意图

#### 2) 关键物理量

该问题的关键物理量及其量纲见表 2。

表 2 案例 A 的关键物理量

| 物理量名称                                | 量纲                             |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| 应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ | $\text{ML}^{-1} \text{T}^{-2}$ |
| 坐标量 $x, y$                           | L                              |
| 重度密度 $\rho, \gamma$                  | $\text{ML}^{-3}$               |
| 加速度 $g$                              | $\text{LT}^{-2}$               |
| 模量 $E$                               | $\text{ML}^{-1} \text{T}^{-2}$ |
| 泊松比 $\mu$                            | 1                              |
| 角度 $\alpha$                          | 1                              |

#### 3) 量纲分析

坝体左边界受液体压力, 沿  $x$  方向的面力为  $\gamma g y$ ,  $y$  方向的面力为 0。坝体受重力作用, 沿  $x$  方向的体力为 0,  $y$  方向的体力为  $\rho g$ 。该问题的载荷参数即为  $\rho g$  (坝体重度) 与  $\gamma g$  (水重度)。

由于楔形坝体是单连通体, 左、右边界均为应

力边界,所受体力均为常体力,因此该问题的所有控制方程及边界条件均不含有模量  $E$  和泊松比  $\mu$ ,故最终的应力分量解答也不含有  $E$  和  $\mu$ 。因而,该问题的基本未知量  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  均具有如下形式

$$\sigma_x = \rho g f_1(x, y, \alpha) + \gamma g f_2(x, y, \alpha) \quad (5)$$

$$\sigma_y = \rho g f_3(x, y, \alpha) + \gamma g f_4(x, y, \alpha) \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \rho g f_5(x, y, \alpha) + \gamma g f_6(x, y, \alpha) \quad (7)$$

其中,  $f_1 \sim f_6$  是待定函数。为确保式(5)~(7)两边量纲相同,应有

$$\begin{aligned} [f_1(x, y, \alpha)] &= [f_3(x, y, \alpha)] = [f_5(x, y, \alpha)] \\ &= \left[ \frac{\sigma}{\rho g} \right] = L \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [f_2(x, y, \alpha)] &= [f_4(x, y, \alpha)] = [f_6(x, y, \alpha)] \\ &= \left[ \frac{\sigma}{\gamma g} \right] = L \end{aligned} \quad (9)$$

函数  $f_1 \sim f_6$  的变量中只有  $x$  与  $y$  可提供长度量纲。若应力分量具有多项式解答,  $f_1 \sim f_6$  则必须是  $x$  和  $y$  的线性组合,因此

$$f_i(x, y, \alpha) = H_1^{(i)}(\alpha)x + H_2^{(i)}(\alpha)y \quad (10)$$

其中,  $H_1^{(i)}, H_2^{(i)}$  是  $\alpha$  的函数。故应力分量也应为  $x$  和  $y$  的线性组合

$$\begin{aligned} \sigma_x &= [\rho g H_1^{(1)}(\alpha) + \gamma g H_1^{(2)}(\alpha)]x + \\ &\quad [\rho g H_2^{(1)}(\alpha) + \gamma g H_2^{(2)}(\alpha)]y \\ &= A(\alpha)x + B(\alpha)y \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= [\rho g H_3^{(1)}(\alpha) + \gamma g H_3^{(2)}(\alpha)]x + \\ &\quad [\rho g H_4^{(1)}(\alpha) + \gamma g H_4^{(2)}(\alpha)]y \\ &= C(\alpha)x + D(\alpha)y \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= [\rho g H_5^{(1)}(\alpha) + \gamma g H_5^{(2)}(\alpha)]x + \\ &\quad [\rho g H_6^{(1)}(\alpha) + \gamma g H_6^{(2)}(\alpha)]y \\ &= R(\alpha)x + T(\alpha)y \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha), D(\alpha), R(\alpha), T(\alpha)$  为待定函数,可由坝体左、右应力边界条件、平衡微分方程以及用应力分量表示的相容方程完全确定。

#### 4) 应力求解

式(11)~(13)的应力分量自动满足应力分量表示的相容方程  $(\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0)$ 。将式(11)~(13)代入如下平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

得

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) + T(\alpha) &= 0 \\ D(\alpha) + R(\alpha) + \rho g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

左边界( $x=0$ )与右边界( $x=y \tan \alpha$ )的应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{x=0} &= -\gamma g y \\ (\tau_{xy})_{x=0} &= 0 \\ \cos \alpha (\sigma_x)_{x=y \tan \alpha} - \sin \alpha (\tau_{xy})_{x=y \tan \alpha} &= 0 \\ \cos \alpha (\tau_{xy})_{x=y \tan \alpha} - \sin \alpha (\sigma_y)_{x=y \tan \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式(11)~(13)代入边界条件可得

$$\left. \begin{aligned} B(\alpha)y &= -\gamma g y \\ T(\alpha)y &= 0 \\ \cos \alpha [A(\alpha)y \tan \alpha + B(\alpha)y] - \\ \sin \alpha [R(\alpha)y \tan \alpha + T(\alpha)y] &= 0 \\ \cos \alpha [R(\alpha)y \tan \alpha + T(\alpha)y] - \\ \sin \alpha [C(\alpha)y \tan \alpha + D(\alpha)y] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

联立式(15)、(17)可求得

$$\left. \begin{aligned} A(\alpha) &= 0 & B(\alpha) &= -\gamma g \\ C(\alpha) &= \rho g \cot \alpha - 2\gamma g \cot^3 \alpha & D(\alpha) &= \gamma g \cot^2 \alpha - \rho g \\ E(\alpha) &= -\gamma g \cot^2 \alpha & T(\alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

故应力分量可求解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\rho_2 g y \\ \sigma_y &= (\rho_1 g \cot \alpha - 2\rho_2 g \cot^3 \alpha)x + \\ &\quad (\rho_2 g \cot^2 \alpha - \rho_1 g)y \\ \tau_{xy} &= -\rho_2 g x \cot^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式即为弹性力学教材中经典的莱维解答。

## 2.2 案例 B: 楔形体在楔面受分布力(极坐标解答)

### 1) 问题描述

先考虑如图 2(a)所示的楔形体,右楔面受均匀分布的压力  $q$ ,不计体力。楔形体假设为无限高,右楔面平行于铅垂方向,左楔面的坡度为  $\alpha$ 。

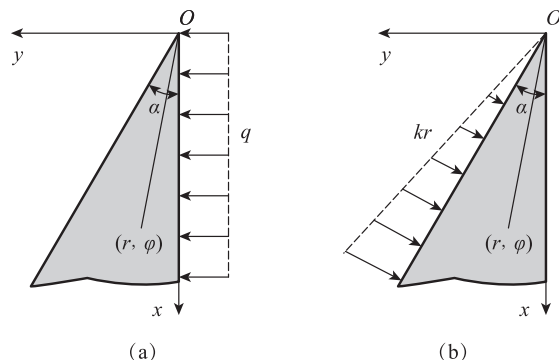


图 2 楔形体在楔面受分布力的示意图

(a) 右楔面受均匀压力; (b) 左楔面受线性压力

坐标系原点  $O$  为楔形体顶点, 极半径为  $r$ , 极角为  $\varphi$ 。求应力分量  $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi})$ 。

## 2) 关键物理量

该问题的关键物理量及其量纲见表 3。

表 3 案例 B 的关键物理量

| 物理量名称                                            | 量纲                            |
|--------------------------------------------------|-------------------------------|
| 应力分量 $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$ | $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ |
| 极半径 $r$                                          | $\text{L}$                    |
| 角度 $\alpha$ , 极角 $\varphi$                       | 1                             |
| 压力 $q$                                           | $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ |

## 3) 量纲分析

与案例 A 类似, 应力分量与模量、泊松比无关。该问题的基本未知量  $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi})$  具有如下形式

$$\sigma_r = q f_1(r, \alpha, \varphi) \quad (20)$$

$$\sigma_\varphi = q f_2(r, \alpha, \varphi) \quad (21)$$

$$\tau_{r\varphi} = q f_3(r, \alpha, \varphi) \quad (22)$$

其中,  $f_1 \sim f_3$  是待定函数。为确保式 (20) ~ (22) 两边量纲相同, 应有

$$\begin{aligned} [f_1(r, \alpha, \varphi)] &= [f_2(r, \alpha, \varphi)] = [f_3(r, \alpha, \varphi)] \\ &= \left[ \frac{\sigma}{q} \right] = 1 \end{aligned} \quad (23)$$

$r$  具有长度量纲, 而角度  $\alpha$  与  $\varphi$  的量纲为 1, 因此函数  $f_1 \sim f_3$  必须均与  $r$  无关, 即

$$\begin{aligned} f_1(r, \alpha, \varphi) &= H_1(\alpha, \varphi), f_2(r, \alpha, \varphi) = H_2(\alpha, \varphi) \\ f_3(r, \alpha, \varphi) &= H_3(\alpha, \varphi) \end{aligned} \quad (24)$$

因此, 三个应力分量可表达为

$$\sigma_r = q H_1(\alpha, \varphi), \sigma_\varphi = q H_2(\alpha, \varphi), \tau_{r\varphi} = q H_3(\alpha, \varphi) \quad (25)$$

其中,  $H_1, H_2, H_3$  为待定函数, 由平衡微分方程、用应力分量表示的相容方程以及应力边界条件完全确定。

## 4) 应力求解

由应力分量表示的相容方程和平衡微分方程分别为

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\varphi) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\varphi) = 0 \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + F_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + F_\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

将式 (25) 和  $F_r = F_\varphi = 0$  代入式 (26) 和 (27) 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_2(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^2} &= 0 \\ \frac{\partial H_3(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi} + H_1(\alpha, \varphi) - H_2(\alpha, \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial H_2(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi} + 2H_3(\alpha, \varphi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

该微分方程组可求解得

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= C_1(\alpha) + C_2(\alpha)\varphi - C_3(\alpha)\sin 2\varphi - \\ &\quad C_4(\alpha)\cos 2\varphi \\ H_2 &= C_1(\alpha) + C_2(\alpha)\varphi + C_3(\alpha)\sin 2\varphi + \\ &\quad C_4(\alpha)\cos 2\varphi \\ H_3 &= -C_2(\alpha)/2 - C_3(\alpha)\cos 2\varphi + C_4(\alpha)\sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

该问题的左楔面 ( $\varphi = \alpha$ ) 与右楔面 ( $\varphi = 0$ ) 的应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\varphi)_{\varphi=0} &= -q, (\tau_{r\varphi})_{x=0} = 0 \\ (\sigma_\varphi)_{\varphi=\alpha} &= 0, (\tau_{r\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0 \\ (H_2)_{\varphi=0} &= -1, (H_3)_{x=0} = 0 \\ (H_2)_{\varphi=\alpha} &= 0, (H_3)_{\varphi=\alpha} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \quad (30)$$

进而可求出

$$\left. \begin{aligned} C_1(\alpha) &= 1 + \frac{1}{2} \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \alpha} \\ C_2(\alpha) &= -\frac{1}{\tan \alpha - \alpha} \\ C_3(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\tan \alpha - \alpha} \\ C_4(\alpha) &= -\frac{1}{2} \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

故应力分量求解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -q + \frac{\tan \alpha (1 + \cos 2\varphi) - (2\varphi + \sin 2\varphi)}{2(\tan \alpha - \alpha)} q \\ \sigma_\varphi &= -q + \frac{\tan \alpha (1 - \cos 2\varphi) - (2\varphi - \sin 2\varphi)}{2(\tan \alpha - \alpha)} q \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{(1 - \cos 2\varphi) - \tan \alpha \sin 2\varphi}{2(\tan \alpha - \alpha)} q \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

该解答与经典弹性力学教材中通过半逆解法所得解答完全一致。

## 5) 楔形体在楔面受线性分布压力问题的量纲分析思路

考虑如图 2(b) 所示的楔形体, 左楔面受线性分布的压力  $kr$ , 不计体力。楔形体假设为无限高, 右楔面平行于铅垂方向, 左楔面的坡度为  $\alpha$ 。坐标



系原点  $O$  为楔形体顶点, 极半径为  $r$ , 极角为  $\varphi$ 。

在该问题中, 基本未知量  $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi})$  具有如下形式

$$\begin{aligned}\sigma_r &= k f_1(r, \alpha, \varphi), \sigma_\varphi = k f_2(r, \alpha, \varphi), \\ \tau_{r\varphi} &= k f_3(r, \alpha, \varphi)\end{aligned}\quad (33)$$

其中,  $f_1 \sim f_3$  是待定函数。  $k$  的量纲为  $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$ 。式(33)中三个式子的两边量纲相同, 应有

$$\begin{aligned}[f_1(r, \alpha, \varphi)] &= [f_2(r, \alpha, \varphi)] = [f_3(r, \alpha, \varphi)] \\ &= \left[ \frac{\sigma}{k} \right] = \text{L}\end{aligned}\quad (34)$$

$r$  具有长度量纲, 而角度  $\alpha$  与  $\varphi$  的量纲为 1, 因此函数  $f_1 \sim f_3$  可表达为

$$\begin{aligned}f_1(r, \alpha, \varphi) &= r H_1(\alpha, \varphi), f_2(r, \alpha, \varphi) = r H_2(\alpha, \varphi), \\ f_3(r, \alpha, \varphi) &= r H_3(\alpha, \varphi)\end{aligned}\quad (35)$$

进而应力分量可写为

$$\begin{aligned}\sigma_r &= k r H_1(\alpha, \varphi), \sigma_\varphi = k r H_2(\alpha, \varphi), \\ \tau_{r\varphi} &= k r H_3(\alpha, \varphi)\end{aligned}\quad (36)$$

其中,  $H_1, H_2, H_3$  为待定的无量纲函数, 由平衡微分方程、用应力分量表示的相容方程以及应力边界条件完全确定。

将式(36)代入控制方程(式(26)、(27))得

$$\left. \begin{aligned}\left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1 \right) [H_1(\alpha, \varphi) + H_2(\alpha, \varphi)] &= 0 \\ \frac{\partial H_3(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi} + 2H_1(\alpha, \varphi) - H_2(\alpha, \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial H_2(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi} + 3H_3(\alpha, \varphi) &= 0\end{aligned}\right\}\quad (37)$$

进而求得

$$\left. \begin{aligned}H_1 &= -C_1(\alpha) \sin 3\varphi - C_2(\alpha) \cos 3\varphi + \\ &\quad \frac{1}{3}C_3(\alpha) \sin \varphi + \frac{1}{3}C_4(\alpha) \cos \varphi \\ H_2 &= C_1(\alpha) \sin 3\varphi + C_2(\alpha) \cos 3\varphi + \\ &\quad C_3(\alpha) \sin \varphi + C_4(\alpha) \cos \varphi \\ H_3 &= -C_1(\alpha) \cos 3\varphi + C_2(\alpha) \sin 3\varphi - \\ &\quad \frac{1}{3}C_3(\alpha) \cos \varphi + \frac{1}{3}C_4(\alpha) \sin \varphi\end{aligned}\right\}\quad (38)$$

$C_1 \sim C_4$  可由左楔面 ( $\varphi = \alpha$ ) 与右楔面 ( $\varphi = 0$ ) 的应力边界条件完全确定

$$\left. \begin{aligned}(\sigma_\varphi)_{\varphi=0} &= 0, (\tau_{r\varphi})_{x=0} = 0 \\ (\sigma_\varphi)_{\varphi=\alpha} &= -kr, (\tau_{r\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0 \\ (H_2)_{\varphi=0} &= 0, (H_3)_{x=0} = 0 \\ (H_2)_{\varphi=\alpha} &= -1, (H_3)_{\varphi=\alpha} = 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad (39)$$

此处不再展示该问题的应力解答。

## 2.3 案例 C: 楔形体在楔顶受集中力与集中力偶

### 1) 问题描述

考虑如图 3 所示楔形体, 在楔顶  $O$  受集中力  $F$  (与  $x$  轴正方向的夹角为  $\beta$ ) 和集中力偶  $M$ , 不计体力。楔形体假设为无限高, 左楔面与右楔面的坡度为  $\alpha/2$ 。楔顶  $O$  为坐标系原点, 极半径为  $r$ , 极角为  $\varphi$ 。求应力分量  $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi})$ 。

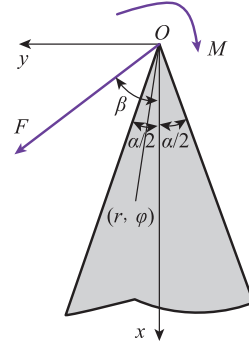


图 3 楔形体在楔顶受集中力与集中力偶的力学分析示意图

### 2) 关键物理量

该问题的关键物理量及其量纲见表 4。

表 4 案例 C 的关键物理量

| 物理量名称                                            | 量纲                            |
|--------------------------------------------------|-------------------------------|
| 应力分量 $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$ | $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ |
| 极半径 $r$                                          | $\text{L}$                    |
| 角度 $\alpha, \beta$ , 极角 $\varphi$                | 1                             |
| 集中力 $F$                                          | $\text{MT}^{-2}$              |
| 集中力偶 $M$                                         | $\text{MLT}^{-2}$             |

### 3) 量纲分析

该问题的基本未知量  $(\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi})$  具有如下形式

$$\sigma_r = F f_1(r, \varphi, \alpha, \beta) + M f_2(r, \varphi, \alpha, \beta) \quad (40)$$

$$\sigma_\varphi = F f_3(r, \varphi, \alpha, \beta) + M f_4(r, \varphi, \alpha, \beta) \quad (41)$$

$$\tau_{r\varphi} = F f_5(r, \varphi, \alpha, \beta) + M f_6(r, \varphi, \alpha, \beta) \quad (42)$$

其中,  $f_1 \sim f_6$  是待定函数。为确保式(40)~(42)两边量纲相同, 应有

$$\begin{aligned}[f_1(r, \varphi, \alpha, \beta)] &= [f_3(r, \varphi, \alpha, \beta)] \\ &= [f_5(r, \varphi, \alpha, \beta)] = \left[ \frac{\sigma}{F} \right] = \text{L}^{-1}\end{aligned}\quad (43)$$

$$\begin{aligned}[f_2(r, \varphi, \alpha, \beta)] &= [f_4(r, \varphi, \alpha, \beta)] \\ &= [f_6(r, \varphi, \alpha, \beta)] = \left[ \frac{\sigma}{M} \right] = \text{L}^{-2}\end{aligned}\quad (44)$$

$r$  具有长度量纲, 而角度  $\varphi, \alpha, \beta$  的量纲为 1, 因此

函数  $f_1 \sim f_6$  可写为

$$f_1 = \frac{H_1(\varphi, \alpha, \beta)}{r}, f_3 = \frac{H_3(\varphi, \alpha, \beta)}{r},$$

$$f_5 = \frac{H_5(\varphi, \alpha, \beta)}{r} \quad (45)$$

$$f_2 = \frac{H_2(\varphi, \alpha, \beta)}{r^2}, f_4 = \frac{H_4(\varphi, \alpha, \beta)}{r^2},$$

$$f_6 = \frac{H_6(\varphi, \alpha, \beta)}{r^2} \quad (46)$$

因此,三个应力分量表达为

$$\sigma_r = \frac{F}{r} H_1(\varphi, \alpha, \beta) + \frac{M}{r^2} H_2(\varphi, \alpha, \beta) \quad (47)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{F}{r} H_3(\varphi, \alpha, \beta) + \frac{M}{r^2} H_4(\varphi, \alpha, \beta) \quad (48)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{F}{r} H_5(\varphi, \alpha, \beta) + \frac{M}{r^2} H_6(\varphi, \alpha, \beta) \quad (49)$$

其中,  $H_1 \sim H_6$  为待定函数,由平衡微分方程、用应力分量表示的相容方程以及应力边界条件完全确定。

#### 4) 应力求解

将式(47)~(49)代入控制方程(式(26)、(27)),其对所有  $(r, \varphi)$  均满足,可得

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1 \right) [H_1(\varphi, \alpha, \beta) + H_3(\varphi, \alpha, \beta)] &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 4 \right) [H_2(\varphi, \alpha, \beta) + H_4(\varphi, \alpha, \beta)] &= 0 \\ \frac{\partial H_5(\varphi, \alpha, \beta)}{\partial \varphi} - H_3(\varphi, \alpha, \beta) &= 0 \\ \frac{\partial H_3(\varphi, \alpha, \beta)}{\partial \varphi} + H_5(\varphi, \alpha, \beta) &= 0 \\ \frac{\partial H_6(\varphi, \alpha, \beta)}{\partial \varphi} - H_2(\varphi, \alpha, \beta) - H_4(\varphi, \alpha, \beta) &= 0 \\ \frac{\partial H_4(\varphi, \alpha, \beta)}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

进而求得

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= C_1(\alpha, \beta) \sin \varphi + C_2(\alpha, \beta) \cos \varphi \\ H_2 &= C_7(\alpha, \beta) \sin 2\varphi + C_6(\alpha, \beta) \cos 2\varphi - \\ &\quad C_8(\alpha, \beta) \\ H_3 &= C_3(\alpha, \beta) \sin \varphi + C_4(\alpha, \beta) \cos \varphi \\ H_4 &= C_8(\alpha, \beta) \\ H_5 &= -C_3(\alpha, \beta) \cos \varphi + C_4(\alpha, \beta) \sin \varphi \\ H_6 &= \frac{1}{2} C_6(\alpha, \beta) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} C_7(\alpha, \beta) \cos 2\varphi + \\ &\quad C_5(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

楔形体的左楔面( $\varphi = -\alpha/2$ )与右楔面( $\varphi = \alpha/2$ )的应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\varphi)_{\varphi=\pm\alpha/2} &= 0 \\ (\tau_{r\varphi})_{\varphi=\pm\alpha/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (H_3)_{\varphi=\pm\alpha/2} &= 0, (H_4)_{\varphi=\pm\alpha/2} = 0 \\ (H_5)_{\varphi=\pm\alpha/2} &= 0, (H_6)_{\varphi=\pm\alpha/2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

楔顶附近半径为  $r$  处取一圆柱截面边界,应力与集中力  $F$ 、集中力偶  $M$  平衡,满足如下边界条件

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sigma_r r \cos \varphi d\varphi - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \tau_{r\varphi} r \sin \varphi d\varphi + F \cos \beta &= 0 \\ \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sigma_r r \sin \varphi d\varphi + \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \tau_{r\varphi} r \cos \varphi d\varphi + F \sin \beta &= 0 \\ \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \tau_{r\varphi} r^2 d\varphi + M &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

式(53)对所有  $(r, \varphi)$  均满足。将式(47)~(49)、(51)代入式(52)、(53),可求得

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2 \sin \beta}{\sin \alpha - \alpha} \\ C_2 &= -\frac{2 \cos \beta}{\sin \alpha + \alpha} \\ C_5 &= \frac{1}{\tan \alpha - \alpha} \\ C_7 &= \frac{2}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \\ C_3 &= C_4 = C_6 = C_8 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

应力分量最终求解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2F}{r} \left( \frac{\cos \beta \cos \varphi}{\sin \alpha + \alpha} + \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\alpha - \sin \alpha} \right) + \\ &\quad \frac{2M}{r^2} \frac{\sin 2\varphi}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \\ \sigma_\varphi &= 0 \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{M}{r^2} \frac{\cos 2\varphi - \cos \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

该解答即为弹性力学教材中米切尔解答与英格里斯解答的叠加。

### 3 教学启示与总结

量纲分析不仅是一种数学技巧,更是一种物理建模思维。通过典型案例教学,学生能够在理解力学本质、掌握公式来源、提升分析能力和创新意识等方面受益。对于教师而言,将量纲分析融入弹性力学课程,不仅能优化教学结构、强化理论

与应用的衔接,也为培养具备物理直觉和工程判断力的力学人才提供了有效路径。

### 3.1 帮助学生建立“物理量关系—应力公式”的认知链条

传统弹性力学教学多强调从控制方程出发的严格推导,学生往往机械记忆公式,缺乏对其来源与适用范围的理解。而通过量纲分析,学生可以在推导前预判结果的形式与依赖关系,例如明确应力应与载荷、几何等关键物理量之间的组合关系。这种由物理直觉出发、再回到数学推导的双向思维路径,有助于学生形成“由宏观现象—物理量联系—公式结构”的整体认知框架。

### 3.2 为复杂问题建立“简化—近似—求解”的逻辑框架

在三个案例中,量纲分析并未直接给出完整的应力分布,但能提供公式的尺度关系与结构形式,为后续解析或数值解法指明方向。这种从量纲出发、逐步过渡到近似方程与最终求解的教学设计,帮助学生掌握了处理复杂问题的系统思维流程,即:物理认识→量纲推断→数学模型→数值/解析求解。这一逻辑框架能有效提升学生的建模能力与独立思考能力。

### 3.3 激发学习兴趣与跨学科思维

量纲分析方法形式简洁、推理直观,能帮助学生短时间内获得分析结论,增强学习成就感。结合工程实例(如重力坝或楔形体结构)进行讲解,还可激发学生从“书本公式”向“工程问题”迁移的兴趣。同时,量纲分析强调变量关系与无量纲化思想,能自然地与流体力学、传热学、材料力学等课程衔接,促进学生形成跨学科的物理建模能力。

## 参 考 文 献

- [1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社, 2016.  
XU Z L. Elasticity[M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2016. (in Chinese)
- [2] 吴家龙. 弹性力学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2016.  
WU J L. Elasticity[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2016. (in Chinese)
- [3] 梁灿彬, 曹周键, 陈陟陶. 量纲分析简介[J]. 大学物理, 2017, 36(12): 1-5.  
LIANG C B, CAO Z J, CHEN Z T. Introduction to dimensional analysis[J]. College Physics, 2017, 36(12): 1-5. (in Chinese)
- [4] 孙博华. 量纲分析以及应用[J]. 物理与工程, 2016, 26(6): 11-20.  
SUN B H. Dimensional analysis and applications[J]. Physics and Engineering, 2016, 26(6): 11-20. (in Chinese)
- [5] 龙天渝, 童思陈. 流体力学[M]. 3版. 重庆: 重庆大学出版社, 2018.  
LONG T Y, TONG S C. Fluid Mechanics[M]. 3rd ed. Chongqing: Chongqing University Electronic Audio-Visual Publishing House, 2018. (in Chinese)
- [6] 蓝善权, 陈建明. 量纲分析在大学物理热力学部分中的教学应用[J]. 大学物理, 2020, 39(1): 18-22.  
LAN S Q, CHEN J M. Teaching application of dimensional analysis in the thermodynamics part of college physics[J]. College Physics, 2020, 39(1): 18-22. (in Chinese)
- [7] 王明美. 黑体辐射公式的量纲分析[J]. 大学物理, 2009, 28(2): 21.  
WANG M M. Dimensional analysis of formula of blackbody radiation[J]. College Physics, 2009, 28(2): 21. (in Chinese)
- [8] 刘章军. 一类新的弹性力学量纲分析方法及其应用[J]. 三峡大学学报, 2007, 29(2): 129-132.  
LIU Z J. A new class of elasticity dimensional analysis method and its application[J]. Journal of China Three Gorges, 2007, 29(2): 129-132. (in Chinese)
- [9] 谈庆明. 说说“量纲”和“量纲一”[J]. 力学与实践, 2009, 31(1): 107.  
TAN Q M. On “Dimension” and “Dimensionless”[J]. Mechanics in Engineering, 2009, 31(1): 107. (in Chinese)
- [10] 黄行蓉, 李敏, LAINE J P. 旋量理论及其在材料力学中的应用[J]. 力学与实践, 2024, 46(6): 1262-1270.  
HUANG X R, LI M, LAINE J P. Torsor theory and its application in the strength of materials[J]. Mechanics in Engineering, 2024, 46(6): 1262-1270. (in Chinese)