

一类 $2 \times n$ 阶 K 形电阻网络的等效电阻研究

谭震

(南通大学信息科学技术学院, 江苏 南通 226019)

摘要 电路结构通常复杂多样,不少电路网络问题充满了挑战性。文章分析探索了一类多参数 $2 \times n$ 阶 K 形电阻网络模型,采用创造性思维与严密的计算导出了一个等效电阻解析式。文章所采用的研究方法包括三种:一是建立电路网络的三个等效模型,二是建立递推差分方程,三是采用变量代换技术求解差分方程。文章讨论了等效电阻的一些特殊情形,并且将特殊情形的结论与其他相关结果进行了比较与验证。本文的研究工作对促进教学与科研协同发展具有积极意义,对培养大学生的科学探究能力与创造性思维能力具有较好的指导意义。

关键词 K 形网络;等效模型;变量代换;差分方程;等效电阻

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.07.21.01

A STUDY ON THE EQUIVALENT RESISTANCE OF A CLASS OF $2 \times N$ ORDER K-SHAPED RESISTOR NETWORKS

TAN Zhen

(School of Information Science and Technology, Nantong University, Nantong, Jiangsu 226019)

Abstract Circuit structures are usually complex and diverse, and many circuit network problems are full of challenges. This paper analyzes and explores a class of multi-parameter $2 \times n$ order K-shaped resistor network models. By using creative thinking and rigorous calculations, an analytical expression for the equivalent resistance is derived. The research methods employed in this paper include three aspects: first, establishing three equivalent models for the circuit network; second, setting up a recursive difference equation; and third, using variable substitution techniques to solve the difference equation. The paper discusses some special cases of the equivalent resistance and compares and verifies the conclusions of these special cases with other related results. The research work in this paper has positive significance in promoting the coordinated development of teaching and scientific research, and it provides good guidance for cultivating college students' scientific inquiry and creative thinking abilities.

Key words K-shaped network; equivalent model; variable substitution; differential equation; equivalent resistance

电路课程是理工科大学学生的一门重要课程,在现代科技领域有着重要的基础与应用价值。众

所周知,各种电器设备的电路纷繁复杂,从直流电路到交流电路,从电阻电路到复阻抗电路等等,其

收稿日期: 2025-07-21

基金项目: 南通大学引进人才启动资金项目(编号:135424630060); 2025 年南通市自然科学青年项目(编号:JC2024046); 教育部产学研合作协同育人项目(编号:2504210044; 250403492210637)。

通信作者: 谭震, zhztan@hotmail.com; zhen.tan@ntu.edu.cn。

引文格式: 谭震. 一类 $2 \times n$ 阶 K 形电阻网络的等效电阻研究[J]. 物理与工程, 2026, 36(1): 220-224.

Cite this article: TAN Z. A study on the equivalent resistance of a class of $2 \times n$ order K-shaped resistor networks[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(1): 220-224. (in Chinese)

解题思路充满了技巧与智慧。目前,人们已经将一些电路问题拓展为电路网络模型^[1],并且可以应用于解决一些科学难题^[2-8]。电路网络模型实际上是人们将抽象的问题转化为可视化的模型。我们在教学与科研工作中发现电阻网络模型比较适合于理工科大学生开展科学探究活动,以此用于培养大学生的科学探究能力,也可以帮助老师们开展学术研究工作^[9-14],促进教学与科研的协同发展。文章中的模型构建,电路变换,等等,对培养大学生的创造性与发散思维能力具有很好的实践意义。

文献研究表明,学术界能够解决有限和无限电阻网络模型的基本理论主要有美籍华人伍法岳于2004年建立的拉普拉斯方法^[2],以及中国学者谭志中教授于2011年建立的递推-变换(RT)理论^[1]。关于N阶电阻网络的等效电阻问题已经积累了不少研究成果^[7-13],文献[13,14,15]研究了两种 $2 \times n$ 电路网络,许多复杂网络的研究基本上都是利用递推-变换(RT)理论。文献[7,8,11,12]研究了内部含有复杂结构的 n 阶电阻网络问题,巧妙地采用变换技术解析了这些难题。文献[18,19]提出了两种新的电路网络模型,取得了新的研究进展。特别说明,电阻网络模型是电路网络研究的提升(从具体问题上升到模型),其理论研究通常不涉及具体问题,但是可以被应用于各类跨学科的研究与仿真。目前国内外关于电阻网络模型的研究已经取得了不少新的研究进展^[1-19]。人们明白电阻网络内部结构的任何改变都将带来计算的复杂性,从而可能出现一些新问题并且期待人们去研究与解决。

文献[13,14]为了研究电渗析装置中布水槽/集水槽热效应,通过建立 $2 \times n$ 阶电阻网络模型有效地揭示了热效应机制。本文拟研究一类含有内部结构的多参数 $2 \times n$ 阶电阻网络模型,如图1所示。由于它的单元结构像一个“K”字,因此本文将此命名为一类对称的 $2 \times n$ 阶K形电阻网络模型。该研究工作主要是对文献[13]~文献[17]所研究

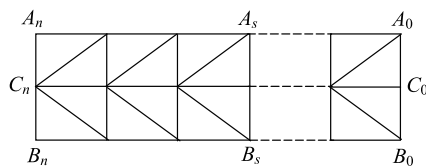


图1 一类对称的 $2 \times n$ 阶K形电阻网络模型

模型的推广,例如当网络模型中的 $r_1 \rightarrow \infty$ 时图1的网络模型即退化为文献[13-17]中研究的电阻网络。

图1为一类 $2 \times n$ 阶K形电阻网络模型,其单元结构上的电阻参数如图2所示,包含有4种独立的电阻元件: r, r_0, r_1 与 r_2 。本文拟研究这类电路网络的等效电阻 $R_{A_n, B_n}(n)$ ($0 \leq x \leq n$),并且探讨结论的一些特殊情形。

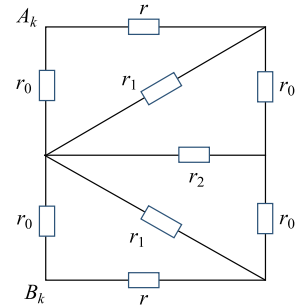


图2 K形电阻网络单元的电阻参数图

1 等效电阻解析式

在图1与图2所示的 $2 \times n$ 阶K形电阻网络模型中,节点编号从右向左计数, n 为任意自然数。则节点 A_n 与 B_n 之间的等效电阻解析式为

$$R_{A_n, B_n}(n) = \frac{(2r_0 + \beta)P_{n+1} - bP_n}{(2r_0 + \beta)P_n - bP_{n-1}} - \beta \quad (1)$$

其中定义

$$\beta = 2r_1(r_0 + r)/(r_0 + r + r_1) \quad (2)$$

$$P_k = (\lambda^k - \mu^k)/(\lambda - \mu) \quad (3)$$

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 - b}, \mu = a - \sqrt{a^2 - b} \quad (4)$$

$$a = \frac{2r_0r_1 + r(r_0 + r_1)}{r_0 + r + r_1}, b = \left(\frac{2r_0r_1}{r_0 + r + r_1}\right)^2 \quad (5)$$

公式(1)是本文第一次给出,属于原创性成果,适用于 r_0, r 和 r_1, r_2 为任意电阻的情形。下面将给出以上结果的详细推导过程。

2 计算与方法

2.1 建立等效模型简化电路

分析图1与图2电路的结构特点,该电路网络具有上下对称性,由此可以采用以下思路建立等效模型。设在图1网络中通入电流,并且电流 I 从 A_k 输入再从 B_k 输出(k 为任意自然数),那么可以设 $V_{A_k} = +U, V_{B_k} = -U$,则 $V_{A_k} + V_{B_k} = 0$ 。

根据图1结构的对称性,必然得到 $V_{C_k} = 0 (k=0, 1, 2, \dots, n)$, 因此中间的水平轴线上电阻不影响 A_k 与 B_k 之间的等效电阻, 基于此分析我们可以直接去掉中间的水平电阻。接着依据递推规律, 可以将图1的网络等效为图3的简单模型。图3模型的物理意义是: 如果从左端向右端看过去其等效电阻为 R_n , 那么去掉左边的一个单元之后的等效电阻为 R_{n-1} 。

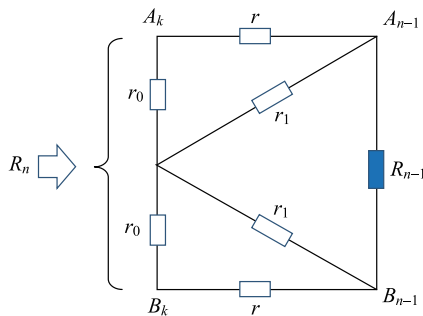


图3 含有等效电阻的等效网络模型

2.2 内部 Δ 型与 Y 型电路的变换

直接计算图3中的等效电阻之间的关系仍然有一些困难, 可以继续将图3电路进行等效与简化。这里将图3中的 Δ 型电路采用 Δ 型与 Y 型电路的变换方法, 将图3结构变换为图4所示电路。

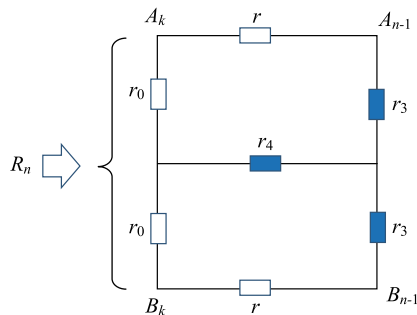


图4 关于图3的等效电路模型

依据图4的等效模型即可建立关于等效电阻 R_n 与 R_{n-1} 之间的递推关系。

2.3 构建差分方程模型

从图3~图4的等效电路变换主要是 Δ 型与 Y 型结构的变换, 容易得到

$$r_3 = \frac{r_1 R_{n-1}}{2r_1 + R_{n-1}}, \quad r_4 = \frac{r_1^2}{2r_1 + R_{n-1}} \quad (6)$$

而图4的电路也是上下对称, 因此当计算等效电阻 R_n 时可以去掉 r_4 , 依据图4的等效电路计算得

$$R_n = (2r_0) // (2r + 2r_3) = \frac{2r_0(r + r_3)}{r_0 + r + r_3} \quad (7)$$

那么, 将方程(6)代入式(7)计算得到

$$R_n = \frac{2r_0[2rr_1 + (r + r_1)R_{n-1}]}{2r_1(r_0 + r) + (r_0 + r + r_1)R_{n-1}} \quad (8)$$

其中的初始项 $R_0 = 2r_0$ 。

通过文献调研与探索, 求解方程(8)的基本方法是变量代换^[7,8,11], 此技术由文献[1]提出。设存在待定数列 $\{y_k\}$, 使得

$$R_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} - \beta \quad (9)$$

其中, $\beta = 2r_1(r_0 + r)/(r_0 + r + r_1)$, 并且由此确定初始项

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 2r_0 + \beta \quad (10)$$

建立方程(9)的目的是将方程(8)变换为一个简单的二阶线性差分方程, 以便求解它的通解。

2.4 求解差分方程及等效电阻

将方程(9)递推得到 $R_n = y_{n+1}/y_n - \beta$, 将此递推式与方程(9)一起代入方程(8)化简导出

$$y_{n+1} = 2ay_n - by_{n-1} \quad (11)$$

其中

$$a = \frac{2r_0 r_1 + r(r_0 + r_1)}{r_0 + r + r_1}, \quad b = \left(\frac{2r_0 r_1}{r_0 + r + r_1} \right)^2 \quad (12)$$

依据文献[1]的理论求解差分方程(11)得到

$$y_n = y_1 P_n - y_0 b P_{n-1} \quad (13)$$

其中, $P_n = (\lambda^n - \mu^n)/(\lambda - \mu)$, 并且 λ, μ 是方程(11)的特征方程 $y^2 = 2ay - b$ 的根, 即

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 - b}, \quad \mu = a - \sqrt{a^2 - b} \quad (14)$$

将初始条件式(10)代入方程(13)得

$$y_n = (2r_0 + \beta) P_n - b P_{n-1} \quad (15)$$

由式(15)递推得 $y_{n+1} = (2r_0 + \beta) P_{n+1} - b P_n$, 将此递推式及式(15)一起代入式(8)得到

$$R_n = \frac{(2r_0 + \beta) P_{n+1} - b P_n}{(2r_0 + \beta) P_n - b P_{n-1}} - \beta \quad (16)$$

此即为前面所提公式(1), 至此公式(1)得到证明。

为了便于读者理解本文研究的结论, 下面将给出公式(1)的3个特殊情形, 同时比较与验证相关结果的正确性。

3 特例与比较

1) 情形1

验证 $n=0$ 时公式(1)的正确性。当 $n=0$ 时由公式(1)计算得到

$$R_{A_0B_0}(0) = \frac{(2r_0 + \beta)P_1 - bP_0}{(2r_0 + \beta)P_0 - bP_{-1}} - \beta \quad (17)$$

由方程(3)可知 $P_1=1, P_0=0, P_{-1}=-1/b$, 代入式(17)得到 $R_{A_0B_0}(0)=2r_0$ 。

另外, 当 $n=0$ 时的电路退化为图 5 所示的简单电路, 显然 $R_{A_0B_0}(0)=2r_0$ 与实际电路的电阻完全相同, 验证了 $n=0$ 时公式(1)的正确性。

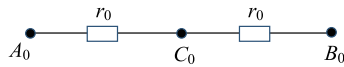


图 5 简单的 $0 \times n$ 阶电阻网络(旋转 90°)

2) 情形 2

当 $n=\infty$ 时, 由于 $0 < \mu < 1$, 则 $\mu^\infty=0$, 取 $n=\infty$ 可导出 $P_{n+1}/P_n=\lambda$, 所以由公式(1)取 $n=\infty$ 导出

$$R_{A_nB_n}(\infty) = \frac{(2r_0 + \beta)\lambda - b}{(2r_0 + \beta) - \mu} - \beta \quad (18)$$

显然是一个有限值, 表明公式(1)是收敛的。

3) 情形 3

当 $r_1=\infty$ 时, 图 1 的模型退化为一个常见的 $2 \times n$ 阶网络模型, 如图 6 所示。

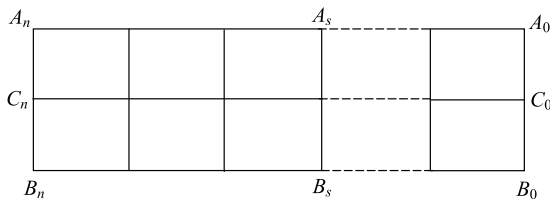


图 6 一类 $2 \times n$ 阶矩形电阻网络模型

当 $r_1=\infty$ 时, 对关系式(2)~式(5)取极限得到 $\beta=2(r_0+r), b=4r_0^2$, 并且

$$\begin{aligned} \lambda &= 2r_0 + r + \sqrt{r^2 + 4rr_0} \\ \mu &= 2r_0 + r - \sqrt{r^2 + 4rr_0} \end{aligned} \quad (19)$$

于是公式(1)退化为

$$R_{A_nB_n}(n) = \frac{(2+h)P_{n+1} - 2r_0P_n}{(2+h)P_n - 2r_0P_{n-1}} - 2(r_0+r) \quad (20)$$

其中, $h=r/r_0, P_k=(\lambda^k - \mu^k)/(\lambda - \mu)$ 。

此结论(20)与文献[15-17]中的结论完全一致, 再次验证了公式(1)的正确性。

4 小结与评论

内部含有多参数的电阻网络模型通常是一类

复杂的问题, 文章创造性地采用三次电路模型变换与一次差分方程变换技术, 导出了一个比较简洁的等效电阻解析式, 其结果具有原创性。文章探讨了公式(1)的三个特殊情形, 验证了结论的正确性。众所周知, 如何培养大学生的实践研究能力和创新思维能力一直是高等院校努力探索的问题。本文通过对具体的一类多参数的 $2 \times n$ 阶 K 形电阻网络模型作为实践探索对象, 采用发散思维与聚合思维相结合的策略开展实践探索(差分方程模型构建, 电路变换, 变量代换求解方程, 等等), 成功地导出了 $2 \times n$ 阶 K 形电阻网络的等效电阻解析式, 实现了教学与科研的协同发展。本文的电阻网络模型实际上也是对文献[13, 14]中的网络模型的一种推广。目前电阻网络模型的研究无论是国内(如文献[1, 9-16])还是国际(如文献[2-8, 17-19])都有比较大的研究进展, 也体现了电阻网络模型研究的重要性。如果仅采用目前教材中的理论, 通常不足以解决本文提出的网络模型。基于本文的研究不难看出依据具体网络模型开展科学探究与研究型教学, 不仅能够引导学生开展创新研究与探索, 而且能够让老师们利用教学资源开展科学研究, 最终实现科研与教学的协同发展。这种教学与科研协同发展的思路值得广大理工科老师思考与探索。

参 考 文 献

[1] 谭志中. 电阻网络模型[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2011, 12: 3-70.
 TAN Z Z. Resistance network model[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2011, 12: 3-70. (in Chinese)
 [2] WU F Y. Theory of resistor networks: the two-point resistance[J]. Journal of Physics A: Math. Gen. 2004, 37: 6653-6673.
 [3] TAN Z Z, ASAD J H, Owaidat M Q. Resistance formulae of a multipurpose n -step network and its application in LC network[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2017, 45: 1942-1957.
 [4] TAN Z Z, TAN Z. The basic principle of $m \times n$ resistor networks [J]. Communications in Theoretical Physics, 2020, 72: 055001.
 [5] TAN Z Z. Recursion-transform method and potential formulae of the $m \times n$ cobweb and fan networks[J]. Chinese Physics B 2017, 26(9): 090503.
 [6] TAN Z, TAN Z Z, ASAD J H, et al. Electrical characteristics of the $2 \times n$ and $\times n$ circuit network[J]. Physica Scripta, 2019, 94: 055203.

- [7] ZHOU L, TAN Z Z, ZHANG Q H. A fractional-order multifunctional n -step honeycomb RLC circuit network[J]. Front Inform Technol Electron Eng, 2017; 18(8): 1186-1196.
- [8] LUO X L, TAN Z Z. Fractional circuit network theory with n -V-structure[J]. Physica Scripta 2023; 98(4): 045224.
- [9] 李建新, 刘栓江. N 级梯形电阻网络的研究[J]. 大学物理, 2003, 22(7): 20-21.
LI J X, LIU S J. Research on N -step trapezoidal resistor network[J]. College Physics, 2003, 22(7): 20-21. (in Chinese)
- [10] 汤华, 谭志中. n 阶网络任意节点的等效电阻的研究[J]. 大学物理, 2012, 31(11): 18-22.
TANG H, TAN Z Z. Research on the equivalent resistance of any node in an n -order network[J]. College Physics, 2012, 31(11): 18-22. (in Chinese)
- [11] 谭志中, 杨建华. 一类含有复杂电阻的 n 阶三角形网络的等效电阻公式[J]. 大学物理, 2015, 34(6): 24-35.
TAN Z Z, YANG J H. The equivalent resistance formula for a class of n -order triangular networks containing complex resistors[J]. College Physics, 2015, 34(6): 24-35. (in Chinese)
- [12] 刘雅慧, 陈芸, 檀钰, 等. 含反馈电路的 n 阶电阻网络的新理论[J]. 大学物理, 2024, 43(6):63-67.
LIU Y H, CHEN Y, TAN Y, et al. A new theory of n -order resistor network with feedback circuits[J]. College Physics, 2024, 43(6):63-67. (in Chinese)
- [13] 彭政, 王红萍. 电渗析装置中布水槽/集水槽热效应[J]. 武汉大学学报(理学版), 2015, 61(5): 470-476.
PENG Z, WANG H P. Thermal Effect of the Feed/Drain Channels in Electro-Dialyzer[J]. Journal of Wuhan University (Science Edition), 2015, 61(5): 470-476. (in Chinese)
- [14] 胡小阳. 双极膜电渗析装置电路特性及热效应机制研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2019.
HU X Y. Study on Circuit Characteristics and Thermal Effect Mechanism of Bipolar Membrane Electrodialysis Device[D]. Wuhan: Wuhan University, 2019. (in Chinese)
- [15] 谭志中, 余清怡, 王一骁. 任意 $2 \times n$ 阶 Fan 网络的电特性研究[J]. 大学物理, 2019, 38(3): 14-19, 31.
TAN Z Z, YU Q Y, WANG Y X. Study on the electrical characteristics of any $2 \times n$ Fan network[J]. College Physics, 2019, 38(3): 14-19, 31. (in Chinese)
- [16] 刘松山. 基于对称性研究 $2 \times n$ 阶梯形电阻网络等效电阻[J]. 大学物理, 2015, 34(1): 26-29.
LIU S S. Research on the equivalent resistance of $2 \times n$ order ladder resistance network based on the symmetry[J]. College Physics, 2015, 34(1): 26-29. (in Chinese)
- [17] ZHOU S, WANG Z X, ZHAO Y Q, et al. Electrical properties of a generalized $2 \times n$ resistor network[J]. Communications in Theoretical Physics, 2023, 75: 075701.
- [18] CHEN J Q, JI W Y, TAN Z Z. Electrical properties of a $2 \times n$ non-regular hammock network[J]. Indian Journal of Physics, 2024, 98(8): 2851-2860.
- [19] TAN Z Z, WANG X. Electrical characteristics of a fractional order $3 \times n$ Fan network[J]. Commun. Theor. Phys. 2024, 76: 045701.