

康普顿散射效应公式的一种一般性推导

沈超 周磊

(哈尔滨工业大学(深圳)前沿学部理学院)

摘要 康普顿散射是自然界中普遍存在的一种基本物理现象,在物质能量转换与传递过程中扮演着重要角色,并对天体演化进程具有关键影响。在自由电子与光子的康普顿散射过程中,散射光子波长增大,能量由光子转移至电子;而在高速电子与光子发生逆康普顿散射时,电子减速,辐射能量则显著增强。然而,现有教材通常缺乏对逆康普顿散射过程的完整推导,也未能清晰呈现其散射公式。本文考虑粒子具有任意初始速度的普遍情形,基于动量-能量守恒定律,严格推导出散射光子频率与初始光子频率及粒子初始速度矢量之间的普适关系式。本文采用两种方法推导康普顿散射公式:其一基于分立形式的守恒方程与能量-动量关系;其二则利用四维协变守恒方程,结合四动量性质,推导过程更为简洁。在电子初始静止的特殊情况下,该普适关系式可回归为常见的康普顿散射公式。针对高能电子与低能光子发生逆康普顿散射的情形,散射光子频率与能量均得到提升,其最大值可达入射光子能量的 $4\gamma_u^2$ 倍(γ_u 为洛伦兹因子)。此外,本文进一步从惯性参照系变换与多普勒效应的角度,对逆康普顿散射中散射光子能量增强的物理机制作出了解释。本研究结果可为大学物理及狭义相对论相关教学内容提供有益参考。

关键词 康普顿散射;逆康普顿散射;能量-动量守恒定律;德布罗意关系;相对论效应;多普勒效应

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.08.14.03

A GENERAL DEDUCTION OF COMPTON SCATTERING EFFECT FORMULA

SHEN Chao ZHOU Lei

(Harbin Institute of Technology (Shenzhen) Frontier School of Science)

Abstract Compton scattering is a fundamental physical phenomenon that is widely present in nature. It plays an important role in the conversion and transfer of matter energy and has a key impact on the evolution of celestial bodies. In the Compton scattering process of free electrons and photons, the wavelength of the scattered photon increases, and energy is transferred from the photon to the electron. In contrast, when high-speed electrons undergo inverse Compton scattering with photons, the electrons decelerate, and the radiation energy is significantly enhanced. However, existing textbooks usually lack a complete derivation of the in-

收稿日期: 2025-08-14

基金项目: 国家自然科学基金(42130202)。

通信作者: 沈超, shenchao@hit.edu.cn。

引文格式: 沈超, 周磊. 康普顿散射效应公式的一种一般性推导[J]. 物理与工程, 2026, 36(1): 212-219.

Cite this article: SHEN C, ZHOU L. A general deduction of Compton scattering effect formula[J]. Physics and Engineering, 2026, 36(1): 212-219. (in Chinese)

verse Compton scattering process and fail to clearly present its scattering formula. This paper considers the general case where particles have arbitrary initial velocities. Based on the law of conservation of momentum and energy, a universal relationship between the scattered photon frequency, the initial photon frequency, and the initial velocity vector of the particle is strictly derived. This paper employs two methods to derive the Compton scattering formula; one is based on the discrete form of the conservation equations and the energy-momentum relationship; the other utilizes the four-dimensional covariant conservation equations, combined with the properties of four-momentum, resulting in a more concise derivation process. In the special case where the electron is initially at rest, the universal relationship can be reduced to the common Compton scattering formula. For the case of inverse Compton scattering of high energy electrons and low energy photons, the scattered photon energy can be up to four times the Lorentz factor squared of the initial photon. This paper provides a physical interpretation of the energy enhancement mechanism of scattered photons in the inverse Compton scattering process. This result can be used as a reference for the teaching of college physics and special relativity.

Key words Compton scattering; inverse Compton scattering; law of energy-momentum conservation; De Broglie relation; relativistic effects; Doppler effect

康普顿散射(Compton Scattering)是光子与粒子碰撞而发生频率变化的散射过程,光子和粒子之间发生了能量和动量转移^[1]。康普顿散射效应是自然界中普遍存在的物理现象,在天体演化过程中发挥重要作用^[2]。康普顿散射效应广泛应用于材料特性诊断、医学成像以及伽马射线探测等工程实践中。从经典物理学的角度来看,入射电磁波引起电子以相同频率的受迫振荡,同时周期性振荡的电子以相同频率辐射电磁波,这即是汤姆逊散射效应。这种传统理论与康普顿 X 光散射实验测量结果不一致。1923 年的康普顿效应实验发现散射光波长随散射角而变化^[1],第一次验证了爱因斯坦的光量子假设^[3],从而推动了量子力学的发展。康普顿从光的粒子性角度分析,得出散射光的波长增量公式,正确解释了康普顿散射效应^[2]。X 光子撞击静止(自由)电子,电子获得动能,X 光子损失能量,散射后的频率减小,波长增大。这种静止电子的康普顿散射效应是大学物理、狭义相对论教学中的重要知识点,很多教材给出了推导和证明,但通常讨论的是参照系中初始电子静止的特殊情况。

康普顿散射的另一重要典型情形是高能粒子散射低能光子的情况,即逆康普顿散射效应(Inverse Compton Scattering)^[1, 4-7]。在逆康普顿散

射过程中,高速运动粒子向光子转移能量,光子频率增大。逆康普顿散射会导致热粒子气体温度下降,辐射场增强。逆康普顿散射是宇宙中 X 射线和 γ 射线的重要来源之一^[8-12]。星系核、黑洞吸积盘、致密星体磁层中磁场重联等过程产生高速喷流和极端相对论性粒子,其逆康普顿效应将背景低能光子转化为 γ 射线光子,这是 γ 射线暴的一种重要形成机制^[8-12]。通过对逆康普顿散射 γ 射线光子的测量的反演,可以推测源区粒子的特性^[8-10]。另一方面,星系团热气体能够通过逆康普顿散射导致宇宙微波背景辐射的光子获得更高的能量;近期研究表明,通过对宇宙线极端相对论性粒子与宇宙背景微波辐射之间逆康普顿散射的观测与分析,能够揭示高能宇宙射线和暗物质分布^[14-16]。在我们的太阳系环境内,木星辐射带^[17]高能电子对太阳辐射光子的逆康普顿散射将产生紫外辐射,这是木星电子辐射带的一种有效损失机制。因此,空间科学界提出可以对木星辐射带散射紫外光进行成像探测以实现木星辐射带的“可视化”。然而,少有文献对逆康普顿散射给出完整推导并展示明晰的散射公式。文献中一般从静止电子的康普顿散射公式出发,利用洛伦兹变换得到一般性康普顿散射公式^[5]。但是,这种两阶段证明方法特殊,使得推导和应用都比

较复杂。

本文将针对光子与运动粒子之间散射的一般情形推导康普顿散射的普遍公式,并且具体讨论初始粒子静止的特殊康普顿散射效应以及逆康普顿散射效应的特性。这项工作能够为相关教学提供具体参考。

1 康普顿散射公式的推导

考虑光子与静止质量为 m 的粒子之间的碰撞过程,如图 1 所示。碰撞前,粒子的初始速度为 u ,入射光子传播方向与粒子运动方向的夹角为 θ (定义为光子入射角)。若入射光子的波矢为 k (其量值是波长的倒数,即 $k \equiv 1/\lambda$),频率为 ν ,则 $k \cdot u = ku \cos\theta$ 。光子具有波粒二象性,依据德布罗意关系,入射光子的四维动量为 $p^\mu = (hk, hk)$ (h 为普朗克常数);粒子的四维动量 $q^\mu = (\gamma_u mc, \gamma_u mu)$,其中 γ_u 为洛伦兹因子, $\gamma_u = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta \equiv u/c$ (c 为真空中光速)。碰撞后,粒子的速度为 u' ,散射光子传播方向与粒子运动方向的夹角为 θ' (定义为光子散射角);若散射光子的波矢为 k' ,频率为 ν' ,则 $k' \cdot u = k'u \cos\theta'$;散射光子的四维动量为 $p'^\mu = (hk', hk')$,粒子的四维动量为 $q'^\mu = (\gamma_{u'} mc, \gamma_{u'} mu')$,其中洛伦兹因子 $\gamma_{u'} = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$, $\beta' \equiv u'/c$ 。

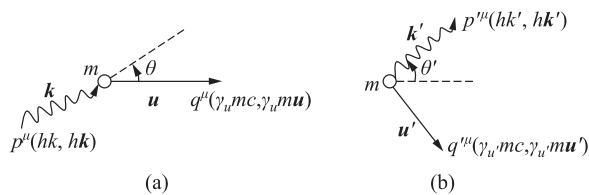


图 1 光子与粒子碰撞过程的示意图

(a) 碰撞前的状态,粒子的静止质量为 m 。碰撞前,粒子的初始速度为 u ,其四维动量 q^μ ;入射光子的波矢为 k ,四维动量为 p^μ ;波矢 k 与粒子初始速度 u 之间的夹角为 θ ;(b) 碰撞后的状态,粒子的速度为 u' ,四维动量为 q'^μ ;散射光子的波矢为 k' ,四维动量为 p'^μ ;波矢 k' 与粒子初始速度 u 的夹角为 θ'

1.1 基于分立的动量守恒方程和能量守恒方程的推导

在光子与运动粒子之间的康普顿散射过程中,光子与粒子的能量和动量都发生了变化,但是系统的总能量和总动量保持守恒。能量-动量守恒定律要求

$$p^\mu + q^\mu = p'^\mu + q'^\mu \quad (1)$$

则其分量形式(能量守恒方程和动量守恒方程)如下

$$hk + \gamma_u mc = hk' + \gamma_{u'} mc \quad (2)$$

$$hk + \gamma_u mu = hk' + \gamma_{u'} mu' \quad (3)$$

待定参量为 $k'(\nu')$ 和 $u'(\gamma_{u'})$;可以先定 $\gamma_{u'}$,再定 k' 。将动量守恒定律式(3)变换为

$$hk + \gamma_u mu - hk' = \gamma_{u'} mu' \quad (4)$$

方程两边取平方,得到

$$(hk + \gamma_u mu - hk')^2 = \gamma_{u'}^2 m^2 u'^2 \quad (5)$$

即

$$h^2 k^2 + h^2 k'^2 + \gamma_u^2 m^2 u^2 - 2h^2 k \cdot k' + 2h\gamma_u mu \cdot k - 2h\gamma_u mu \cdot k' = \gamma_{u'}^2 m^2 u'^2 \quad (6)$$

又因为粒子的动量-能量关系: $\gamma_u^2 m^2 u^2 = m^2 c^2 \cdot (\gamma_u^2 - 1)$ 和 $\gamma_{u'}^2 m^2 u'^2 = m^2 c^2 (\gamma_{u'}^2 - 1)$,以及光子的波数-频率关系: $kc = \nu$ 和 $k'c = \nu'$,上式两边同乘以 c^2 ,得

$$h^2 \nu^2 + h^2 \nu'^2 + m^2 c^4 (\gamma_u^2 - 1) - 2h^2 \nu \nu' \hat{k} \cdot \hat{k}' + 2h\gamma_u mc \nu u (\hat{k} \cdot \hat{u}) - 2h\gamma_u mc \nu' u (\hat{k}' \cdot \hat{u}) = m^2 c^4 (\gamma_{u'}^2 - 1) \quad (7)$$

这里,已选取入射光子的波矢 k 的单位方向矢量为 \hat{k} ($\hat{k} \equiv k/k$),散射光子的波矢 k' 的单位方向矢量为 \hat{k}' ($\hat{k}' \equiv k'/k'$)。粒子初始速度的单位方向矢量为 \hat{u} ($\hat{u} \equiv u/u$)。显然,由式(7)可得到 $\gamma_{u'}^2$ 的表达式。

然后,能量守恒方程式(2)变换为

$$h\nu + \gamma_u mc^2 - h\nu' = \gamma_{u'} mc^2 \quad (8)$$

两边取平方得

$$h^2 \nu^2 + h^2 \nu'^2 + \gamma_u^2 m^2 c^4 + 2h\nu\gamma_u mc^2 - 2h^2 \nu\nu' - 2h\nu'\gamma_u mc^2 = \gamma_{u'}^2 m^2 c^4 \quad (9)$$

比较式(7)和式(9),得到

$$-2h^2 \nu \nu' \hat{k} \cdot \hat{k}' + 2h\gamma_u mc \nu u \hat{k} \cdot \hat{u} - 2h\gamma_u mc \nu' u \hat{k}' \cdot \hat{u} = 2h\nu\gamma_u mc^2 - 2h^2 \nu\nu' - 2h\nu'\gamma_u mc^2 \quad (10)$$

上式两边同除以 $2h$,再适当合并,则成为

$$h\nu\nu' (1 - \hat{k} \cdot \hat{k}') + \nu'\gamma_u mc^2 \left(1 - \frac{u}{c} \hat{k}' \cdot \hat{u}\right) = \nu\gamma_u mc^2 \left(1 - \frac{u}{c} \hat{k} \cdot \hat{u}\right) \quad (11)$$

从而得到散射光子的频率

$$\nu' = \frac{\nu\gamma_u mc^2 \left(1 - \frac{u}{c} \hat{k} \cdot \hat{u}\right)}{h\nu(1 - \hat{k} \cdot \hat{k}') + \gamma_u mc^2 \left(1 - \frac{u}{c} \hat{k}' \cdot \hat{u}\right)} \quad (12)$$

或者

$$\nu' = \frac{\nu\gamma_u \left(1 - \frac{u}{c} \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}}\right)}{\frac{h\nu}{mc^2} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') + \gamma_u \left(1 - \frac{u}{c} \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}\right)} \quad (13)$$

即

$$\nu' = \frac{\nu\gamma_u \left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta\right)}{\frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos(\theta' - \theta)) + \gamma_u \left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta'\right)} \quad (14)$$

此式是散射光子频率对光子入射角 θ 和散射角 θ' 以及粒子初始速度的依赖关系。粒子的静止质能 mc^2 也是一个影响因素。

1.2 基于协变的能量-动量守恒方程的推导

我们可以直接运用四维协变的能量-动量守恒方程推导,更加简练地得出结果。

将式(1)中 p'^{μ} 移到左边,得到

$$p^{\mu} + q^{\mu} - p'^{\mu} = q'^{\mu} \quad (15)$$

式(15)的协变形式是

$$(p_{\mu} + q_{\mu} - p'_{\mu}) = q'_{\mu} \quad (16)$$

注意,上式中各协变动量为 $p_{\mu} = \hbar k(-1, \hat{\mathbf{k}})$, $p'_{\mu} = \hbar k'(-1, \hat{\mathbf{k}}')$, $q_{\mu} = \gamma_u mc(-1, \beta \hat{\mathbf{u}})$, 以及 $q'_{\mu} = \gamma_u mc(-1, \beta' \hat{\mathbf{u}}')$ 。

以上逆变公式(15)和协变公式(16)取内积得

$$(p^{\mu} + q^{\mu} - p'^{\mu})(p_{\mu} + q_{\mu} - p'_{\mu}) = q'^{\mu} q'_{\mu} \quad (17)$$

粒子的四维动量满足 $q^{\mu} q_{\mu} = q'^{\mu} q'_{\mu} = -m^2 c^2$ (即粒子的动量-能量关系,例如: $q^{\mu} q_{\mu} = \gamma_u^2 m^2 c^2 (-1 + \beta^2) = -m^2 c^2$); 因光子无静质量,光子的四维动量满足 $p_{\mu} p^{\mu} = p^{\mu} p_{\mu} = p'_{\mu} p'^{\mu} = p'^{\mu} p'_{\mu} = 0$ 。则上式中平方项得以全部消去,只剩下交叉项,得到

$$2p_{\mu} q^{\mu} - 2p^{\mu} p'_{\mu} - 2p'_{\mu} q^{\mu} = 0 \quad (18)$$

即

$$p'_{\mu} (p^{\mu} + q^{\mu}) = p_{\mu} q^{\mu} \quad (19)$$

由于 $q^{\mu} = \gamma_u mc(1, \beta \hat{\mathbf{u}})$, $p^{\mu} + q^{\mu} = (\hbar k + \gamma_u mc, \hbar k \hat{\mathbf{k}} + \gamma_u mc \beta \hat{\mathbf{u}})$, 则上式成为

$$\begin{aligned} & \hbar k' (-\hbar k - \gamma_u mc + \hbar k \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' + \gamma_u mc \beta \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}) \\ & = \hbar k \gamma_u mc (-1 + \beta \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (20)$$

所以

$$k' = \frac{k \gamma_u mc (1 - \beta \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}})}{\hbar k + \gamma_u mc - \hbar k \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' - \gamma_u mc \beta \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}} \quad (21)$$

式(21)两边同乘以光速 c , 即得散射光子的频率

$$\nu' = \frac{\nu \gamma_u (1 - \beta \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}})}{\frac{h\nu}{mc^2} (1 - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') + \gamma_u (1 - \beta \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{u}})} \quad (22)$$

因为 $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \cos\theta$, $\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{u}} = \cos\theta'$, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' = \cos(\theta' - \theta)$, 所以散射光与入射光的频率之比

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{(1 - \beta \cos\theta)}{\frac{h\nu}{\gamma_u mc^2} [1 - \cos(\theta' - \theta)] + (1 - \beta \cos\theta')} \quad (23)$$

与上述由第一种推导方法所得表达式(14)相同。但是,此第二种推导方式较为简练。

2 讨论

上一节所推导的康普顿散射公式(23)具有普适性。这里探讨两种典型情况:静止电子的康普顿散射和高速运动电子的逆康普顿散射效应。

2.1 自由电子的康普顿散射

当电子静止时, $u = 0, \beta = 0, \gamma_u = 1$, 则由式(23)直接得到散射光子的频率为

$$\nu' = \frac{\nu}{\frac{h\nu}{mc^2} (1 - \cos(\theta' - \theta)) + 1} \quad (24)$$

此为通常的康普顿散射公式^[1,2,7]。由上式易得散射光波长的增量,即康普顿位移(Compton shift)^[1,2,7]

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\theta' - \theta)) \quad (25)$$

当光子散射方向与入射方向相反时,即 $\theta' - \theta = 180^\circ$, 波长的增量具有最大值 $\Delta\lambda_{\max} = \frac{2h}{mc}$, 即康普

顿波长(Compton wavelength) $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ 的二倍,其

与粒子的静止质量成反比。对于电子, $\Delta\lambda_{\max} = \frac{2h}{m_e c} \approx 0.00243 \text{ nm}$ 。因此,对于紫外光子或者能量更低的低频光子与静止电子的康普顿散射过程,散射光子的波长改变微小。

2.2 逆康普顿散射

另一种重要情形是具有很高初始速度粒子的逆康普顿散射过程。通常认为,对于逆康普顿散射,散射光子的能量是初始入射光子能量的 γ_u^2 倍^[5,6]。然而式(13)和式(14)并不显含 γ_u^2 因子,

这初看起来令人费解;然而具体分析表明,这并不矛盾。

2.2.1 逆康普顿散射的几种典型情况

这里我们首先讨论低频光子与高速电子之间的逆康普顿散射引起的光子频率(以及能量)的变化,考查散射光与入射光的频率之比(式(23))的极值问题。

对于低能光子(如:微波、红外、可见光、紫外光等光子),光子的能量 $h\nu \leq 10^3 \text{ eV}$ 。电子的静止质能 $m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV}$ 。取高速运动粒子的洛伦兹因子 $\gamma_u = 10$,则参量 $\frac{h\nu}{\gamma_u m_e c^2} \leq 2 \times 10^{-4}$,非常微小。这里,仅考虑此类低能光子,在式(23)中参量 $\frac{h\nu}{\gamma_u m_e c^2}$ 相对于其他量可以忽略。则式(23)中散射光与入射光的频率之比可以简化为

$$R(\theta, \theta') = \frac{\nu'}{\nu} \approx \frac{1 - \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta'} \quad (26)$$

频率之比 R 是入射角 θ 和散射角 θ' 的二元函数, $\beta = \frac{u}{c} < 1$ 为参量(这里 β 接近于 1)。可以运用 $AC - B^2$ 方法^[18] 分析此二元函数频率比 $R(\theta, \theta')$ 的极值问题。然而,由于易于判定 $R(\theta, \theta')$ 的分子和分母的最大值和最小值,我们可以直接确定 $R(\theta, \theta')$ 取极值的条件以及其极值。因为入射角 θ 和散射角 θ' 的角度区间分别是 $0 \leq \theta \leq \pi$ 和 $0 \leq \theta' \leq \pi$, 所以 $R(\theta, \theta')$ 的分子和分母量值处于如下范围: $1 - \beta \leq 1 - \beta \cos \theta \leq 1 + \beta$ 和 $1 - \beta \leq 1 - \beta \cos \theta' \leq 1 + \beta$ 。则得到

$$\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \leq R(\theta, \theta') \leq \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (27)$$

其中, $R(\theta, \theta')$ 取最大值的条件是: $\theta = 180^\circ, \theta' = 0^\circ$; $R(\theta, \theta')$ 取最小值的条件是: $\theta = 0^\circ, \theta' = 180^\circ$ 。以下做具体讨论三种典型情形。

1) $\theta = 180^\circ, \theta' = 0^\circ$

这是入射光子与运动电子的对撞-反向散射情形。频率比 R 取最大值,即

$$R_{\max} = \frac{\nu'_{\max}}{\nu} \approx \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (28)$$

由于 $1 - \beta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} = \frac{1}{(1 + \beta)\gamma_u^2}$, 所以

$$R_{\max} = (1 + \beta)^2 \gamma_u^2 \approx 4\gamma_u^2 \quad (29)$$

这时,散射光子获得其最大频率

$$\nu_{\max} \approx 4\gamma_u^2 \nu \quad (30)$$

在这种情形,散射光子从电子获得最大能量,能量

增加到原来的 $4\gamma_u^2$ 倍。

2) $\theta = 0^\circ, \theta' = 180^\circ$

在这种情形,入射光子追赶高速运动电子,碰撞后再反向散射。频率比 R 取最小值,即

$$R_{\min} \approx \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2} = \frac{1}{\gamma_u^2 (1 + \beta)^2} \quad (31)$$

散射光子具有最小频率

$$\nu_{\min} \approx \frac{1}{4\gamma_u^2} \nu \quad (32)$$

对于这种情况,运动电子从入射光子获取能量。

3) $\theta = \theta'$

在这种情形,入射光子与运动电子碰撞后继续沿原方向行进。由式(26)得到

$$R = \frac{\nu'}{\nu} \approx 1 \quad (33)$$

因此,散射光子保持频率不变。光子与电子没有动量和能量的交换。从波动角度看,此种情形属于汤姆逊散射。

图 2 展示散射光与入射光的频率之比 R 随入射角 θ 和散射角 θ' 的变化情况。图 2 中选取参量 $\gamma_u \approx 3, \beta \approx 0.943$ 。

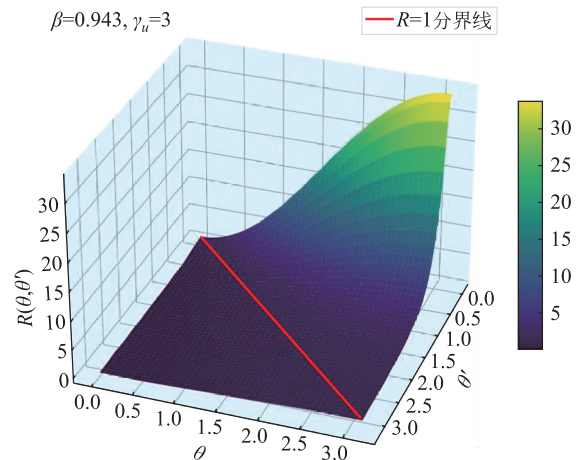


图 2 低频光子与高能粒子之间逆康普顿散射过程中散射光和入射光频率之比 $R = \nu'/\nu$ 对入射角 θ 和散射角 θ' 的依赖关系(角度以弧度为单位)。这里,参数 $\frac{h\nu}{\gamma_u m_e c^2} \ll 1$,已经忽略; $\beta = u/c \approx 0.943, \gamma_u \approx 3$ 。灰线(红线)标记 $R = 1$ 分界线,而且 $\theta = \theta'$

图 2 显示,逆康普顿散射可以显著提高散射光子的频率和能量。在分界线 $R = 1$ ($\theta = \theta'$, 标记为灰线(红线))以内,散射光频率高于入射光频率,经逆

康普顿散射光子获得能量。当 $\theta=180^\circ, \theta'=0^\circ$, R 取最大值, $R_{\max} \approx 34.0$, 近似于 $4\gamma_u^2$ 。在分界线 $R=1(\theta=\theta')$, 标记为灰线) 以外区域, 散射光频率低于入射光频率, 这时经逆康普顿散射, 粒子获得能量; 频率之比 $R=\nu'/\nu$ 的最小值出现于 $\theta=0^\circ, \theta'=180^\circ$, 此时, $R_{\max} \approx 0.0294$, 近似于 $1/4\gamma_u^2$ 。

2.2.2 物理图像分析

这里, 我们可以从惯性参考系变换和相应多普勒效应的角度来考查和分析逆康普顿散射过程中散射光子的增能机制。

考查上述第一种情形: 在实验室参照系 S 中, 光子入射角 $\theta=180^\circ$, 散射角 $\theta'=0^\circ$; 入射光子与运动粒子相向运动, 发生对撞并反向散射, 如图 3 所示。

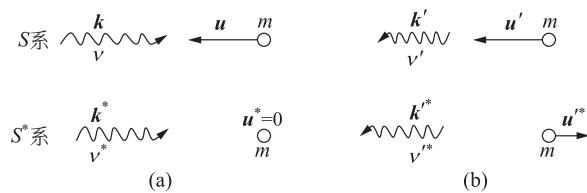


图 3 低能光子与高能粒子之间对撞并反向散射过程 (a) 碰撞前的状态, 在实验室惯性参照系 S 中, 与图 1 相同, 碰撞前, 粒子的初始速度为 u (接近于光速), 入射光子的频率为 ν ; (b) 碰撞后的状态, 碰撞后各物理量符号右上角标记“'”号。在粒子随动惯性参考系 S^* 中, 各物理量符号右上角再加“*”号; 粒子的初始速度为 $u^*=0$

我们在粒子随动惯性参考系 S^* 中观察, 粒子初始速度为 $u^*=0$ 。由于多普勒紫移效应, 入射光子波长变短, 入射光子的频率是^[4]

$$\nu^* = \gamma_u \nu (1 - \hat{k} \cdot \mathbf{u}/c) \quad (34)$$

因为 $\hat{k} \cdot \mathbf{u}/c = \beta \cos \theta = -\beta \approx -1$ (注意 $u \approx c$), 则在随动参考系 S^* 中入射光子的频率 $\nu^* \approx 2\gamma_u \nu$ 。

在随动惯性参考系 S^* 中, 由于粒子初始为静止的, 这是通常的康普顿散射过程。由上述康普顿效应公式(25)知, 对于低频光子, 其散射后的波长变化微小; 对于电子, 波长增量 $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c} \approx 0.00243\text{nm}$ 。即使在星系核极端相对论性喷流情形, 粒子洛伦兹因子达到 $\gamma_u \sim 1000$, 背景辐射光波长 $\lambda \sim 5000\text{nm}$; 则在随动参考系 S^* 中观察, 背景辐射光波长 $\lambda^* \sim \lambda/2\gamma_u \sim 2.5\text{nm}$, 散射光子波长 λ'^* 仅改变了约 $1/1000$ 。所以, 散射光子的频率几乎不变, 即

$$\nu'^* \approx \nu^* = \gamma_u \nu (1 - \hat{k} \cdot \mathbf{u}/c) \quad (35)$$

现在, 再返回到实验室参照系 S (相对于 S^* 系速度为 $-\mathbf{u}$) 中观察; 因多普勒效应, 散射光子的频率再次紫移, 散射光子的频率为

$$\begin{aligned} \nu' &= \gamma_u \nu'^* [1 - \hat{k}'^* \cdot (-\mathbf{u}/c)] \\ &\approx \gamma_u^2 \nu (1 - \hat{k} \cdot \mathbf{u}/c) [1 - \hat{k}'^* \cdot (-\mathbf{u}/c)] \end{aligned} \quad (36)$$

(注意此式具有普遍性, 适用于任意入射角和散射角情形。) 对于如图 3 所示的对撞并反向散射情形, 上式后面两个因子都取其最大值 $(1+\beta)$, 所以散射光达到其最大频率

$$\nu'_{\max} \approx \gamma_u^2 \nu (1 + \beta)^2 \quad (37)$$

在低频光子与高能粒子对撞的情形中, $\beta \rightarrow 1$, 则

$$\nu'_{\max} \approx 4\gamma_u^2 \nu \quad (38)$$

因此, 散射光子的频率最大增加到原来的 $4\gamma_u^2$ 倍。这是低能光子的一种非常有效的增能机制。

类似地, 可以分析第二种情形中散射光子损失能量的物理过程。这时, $\theta=0^\circ, \theta'=180^\circ$, 入射光子追赶高速运动电子, 碰撞后再反向散射。从公式(36)可见, 后面两个因子都取其最小值 $(1-\beta)$, 所以散射光取其最小频率

$$\nu'_{\min} \approx \gamma_u^2 \nu (1 - \beta)^2 \quad (39)$$

因为 $1 - \beta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} = \frac{1}{\gamma_u^2 (1 + \beta)}$, 所以

$$\nu'_{\min} \approx \frac{\nu}{\gamma_u^2 (1 + \beta)^2} \approx \frac{\nu}{4\gamma_u^2} \quad (40)$$

因此, 散射光频率降低至原来的 $1/4\gamma_u^2$ 倍。

值得指出, 电离层雷达对电离层离子运动速度的测量利用了类似原理: 依据公式(36), 由反射微波频率变化能够确定运动物体的视向速度。这种测速过程可视为雷达微波光子与低速运动离子之间的逆康普顿散射过程。

对于第三种情形 ($\theta=\theta'$), 仍然能够从上述惯性参考系变换和多普勒效应的角度来考查和分析, 易于理解此种现象。由式(24)可知, 在随动参考系 S^* 中, 康普顿散射后, 低频光子的频率(和波矢)几乎不变; 则在实验室参照系 S 观察, 光子的频率和运动方向也都不改变。

2.2.3 相对论性聚束效应

然而, 对于高速运动粒子情况, 将出现相对论性聚束效应(Beaming effect)^[19], 对于来自于各个方向的入射光, 康普顿散射后, 散射光将会聚于

高速运动粒子前方一个狭窄的角度范围。

可以多普勒效应角度认识这种现象。散射光子在实验室参照系 S 中的散射角为 θ' , 在粒子随动参照系中的散射角为 θ'^* , 则多普勒效应的光行差公式如下^[4]

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta'^*}{\gamma_u(\cos\theta'^* + \beta)} \quad (41)$$

对于极端相对论性电子, $\gamma_u \gg 1$, 则 $\tan\theta'$ 是小量, 因而有

$$\tan\theta' \leq \frac{1}{\gamma_u} \quad (42)$$

所以散射角近似地在以下范围

$$0 \leq \theta' \leq \frac{1}{\gamma_u} \quad (43)$$

散射光将会聚于相对论性电子运动方向附近。

式(43)代入式(26), 考虑近似运算 $\cos\theta' = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta'}{2} \approx 1 - \frac{\theta'^2}{2}$, 可得到

$$\begin{aligned} \frac{2\gamma_u^2(1+\beta)(1-\beta\cos\theta)}{2+\beta(1+\beta)} &\leq R \\ &\leq \gamma_u^2(1+\beta)(1-\beta\cos\theta) \end{aligned} \quad (44)$$

对于极端相对论性电子, $\beta \rightarrow 1$, 则频率比满足 $\gamma_u^2(1-\cos\theta) \leq R \leq 2\gamma_u^2(1-\cos\theta)$ (45)

因此, 在低频光子与高速运动电子($\gamma_u \gg 1$)之间的逆康普顿散射过程中, 只要光子入射角 $\theta > \sqrt{2}/\gamma_u$, 则 $R > 1$, 散射光子会得到有效增能, 最大提高至原来的 $4\gamma_u^2$ 。而且, 由上述结果易知, 对于极端相对论性电子的逆康普顿散射, 散射光子几乎不会沿电子运动的反方向行进, 前述第二种情形($\theta' = 180^\circ$, 散射光子减能)不会发生, 这种情形可能现于低速电子的康普顿散射过程中。

这里, 我们不妨具体讨论木星辐射带相对论性电子对太阳光的逆康普顿散射效应。太阳辐射的光子波长 λ 在 360~700nm 之间, 而木星辐射带电子的典型动能 K_e 约为 1MeV^[11], 而电子静止质能 $m_e c^2$ 约为 0.511MeV, 则其洛伦兹因子 $\gamma_u = (K_e + m_e c^2)/m_e c^2 \approx 3$ 。所以太阳辐射光子与木星辐射带电子之间的逆康普顿效应所形成的散射光子的波长 $\lambda' \approx \frac{1}{4\gamma_u^2} \lambda \approx \frac{1}{36} (360 \sim 700) \text{ nm}$, 或者 $\lambda' \approx 10 \sim 20 \text{ nm}$ 。因此, 太阳散射光在远紫外

波段。由于逆康普顿散射效应, 在太阳辐射的照射下, 木星辐射带电子发生持续的能量损失, 这是木星电子辐射带的一种重要损失机制。另一方面, 可以对辐射带电子的散射紫外光进行成像观测, 以展示木星辐射带的动力学特性以及演化规律。星系核、黑洞吸积盘、致密星体能够产生高速喷射的极端相对论性粒子, 与背景低能光子发生逆康普顿散射, 将其转化为 γ 射线光子。这是 γ 射线暴的一种重要形成机制。

关于逆康普顿散射强度以及康普顿散射成像的分析涉及逆康普顿散射的微分散射截面角分布的计算, 需要运用量子力学和量子场论理论, 本文没有讨论, 可以参考相关文献^[20-21]。

3 结论

康普顿散射是宇宙空间中一种普遍存在的物理现象, 在粒子与辐射之间的能量传递与转移过程中具有重要作用。尽管静止电子与光子之间的康普顿散射是大学物理与相对论课程中的常规教学内容, 但对于运动电子对光子产生的逆康普顿散射效应却较少涉及, 相关文献亦鲜有系统阐述。本文基于具有初始速度的粒子与光子发生散射的物理情景, 推导了普适形式的康普顿散射公式。

本文采用两种方法进行推导。第一种方法从分立形式的能量守恒与动量守恒方程出发, 结合光子与粒子的能量-动量关系, 导出了一般形式的康普顿散射公式。第二种方法则基于四维协变形式的能量-动量守恒方程, 充分利用光子与粒子四维动量的内在属性, 以更为简洁的方式得出了相同结论。相较于从“静止电子康普顿散射公式”出发、经洛伦兹变换推导普遍情形的传统方法, 本文所采用的推导过程在逻辑结构与数学表达上均更为清晰与简洁。值得指出的是, 当初态电子静止时, 本文所得公式可自然退化为经典形式^[1,4]。

本文进一步考查了相对论性高速粒子与低能光子 ($\frac{h\nu}{\gamma_u m_e c^2} \ll 1$) 相互作用引发的逆康普顿散射过程。在该过程中, 散射光子的频率与能量显著提高, 最大提升幅度可达 $4\gamma_u^2$ 倍 (γ_u 为粒子的洛伦兹因子)。文中从参考系变换与相对论性多普勒效应的角度, 对这一能量增强机制给出了清晰的物理解释。具体而言, 在低频入射光子与高速

运动粒子发生对撞—反向散射的情形中:在粒子随动参考系中观察,由于相对论性多普勒蓝移效应,入射光子频率提升至约 $2\gamma_u\nu$;散射过程在该系中近似为弹性碰撞,散射光子频率基本保持不变;当返回实验室系观察时,再次因多普勒蓝移效应,散射光子频率进一步升高至约 $4\gamma_u^2\nu$,从而在整体上实现了能量的显著增强。

本文的研究成果拓展了传统教学内容的边界,同时为理解逆康普顿散射在天体物理与空间探测中的具体应用提供了理论依据。在教学实践中,建议在大学物理课程中适时采用第一种推导方法,系统引入康普顿散射的普遍公式;在狭义相对论专题教学中,则可引入基于四维协变形式的第二种推导方法,以简洁而严谨的方式阐释逆康普顿散射的基本物理原理,从而有效提升课程的理论深度与教学实效。

参 考 文 献

- [1] COMPTON A H. A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements[J]. *Physical Review Journals*, 1923, 21: 483.
- [2] MOSKALENKO I V, Strong A W. Anisotropic inverse Compton scattering in the Galaxy[J]. *Astrophysical Journal*, 1999, 528(1): 357-367.
- [3] EINSTEIN A. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichts betreffenden beurlis-chen gesichtspunkt [J]. *Annalen der Physik*, 1905, 17: 132.
- [4] 刘辽,崔保俊,彭秋和. 狭义相对论导论[M]. 北京:科学出版社,2008: 132,123.
LIU L, CUI B J, PENG Q H. Introduction to special relativity[M]. Beijing: Science Press, 2008: 123, 132. (in Chinese)
- [5] 李宗伟,肖兴华. 天体物理学[M]. 北京:高等教育出版社, 2000: 46.
LI Z W, XIAO X H. Astrophysics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2000: 46. (in Chinese)
- [6] LANG K R. Astrophysical Formulae, Volume I: Radiation, Gas Processes and High Energy Astrophysics [M]. Third Enlarged and Revised Edition, Springer, 2006: 69-71.
- [7] WOAN G. The Cambridge handbook of physics formulas [M]. New York: Cambridge University Press, 2000: 155.
- [8] GHISELLINI G, TAVECCHIO F, MARASCHI L, et al. The power of relativistic jets is larger than the luminosity of their accretion disks[J]. *Nature*, 2014, 515(7527): 376-378. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03498-z>
- [9] ABRAMOWSKI A, ACHARYA B S, BENKHALI F A, et al. The exceptionally powerful TeV γ -ray emitters in the Large Magellanic Cloud[J]. *Science*, 2015, 347(6220): 406-412. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/adf209>
- [10] CAO Z, AHARONIAN F, AXIKEGU, et al. Ultrahigh-energy photons up to 1.4 petaelectronvolts from 12 γ -ray Galactic sources[J]. *Nature*, 2021, 594(7861): 33-36. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03498-z>
- [11] ZHU S J, WANG W, ZHANG L. Modeling the broadband emission of pulsar wind nebulae[J]. *The Astrophysical Journal*, 2022, 927(1): 20.
- [12] CHEN L, FENG J, LI H, et al. Inverse Compton scattering in active galactic nuclei jets[J]. *The Astrophysical Journal*, 2024, 965(2): 115.
- [13] FOWLER J W, SMITH K, ROTH N, et al. Cosmic high-energy background and inverse Compton constraints[J]. *Science*, 2023, 382(6668): 791-795.
- [14] 刘伟,张红,王磊. 星系团中高能电子的逆康普顿散射研究[J]. *天文学报*, 2023, 64(4): 412-420.
LIU W, ZHANG H, WANG L. Inverse Compton scattering of high-energy electrons in galaxy clusters[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2023, 64(4): 412-420. (in Chinese)
- [15] BELOUSOV K, IVANOV V, PETROV A. Inverse Compton effect in cosmic ray studies[J]. *Astrophysics*, 2023, 66(4): 529-538.
- [16] ENSSLIN T A, KAISER C R. Comptonization of the Cosmic Microwave Background by Relativistic Plasma[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2000, 360(2): 417-430.
- [17] BAGENAL F, DOWLING T E, MCKINNON W B. Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 677.
- [18] 叶其孝,沈永欢. 实用数学手册[M]. 北京:科学出版社, 2006: 169.
YE Q X, SHEN Y H. Practical Mathematics Handbook [M]. Beijing: Science Press, 2006: 169. (in Chinese)
- [19] BLUMENTHAL G R. Bremsstrahlung, synchrotron radiation, and Compton scattering of high-energy electrons traversing dilute gases[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1970, 42(2): 237-270.
- [20] 斯诸哲. 相对论量子力学[M]. 北京:世界图书出版公司北京公司, 2008:514-522
STRANGE P. Relativistic Quantum Mechanics[M]. Beijing: World Publishing Company, 2008: 514-522.
- [21] 道里亚. 从狭义相对论到费恩曼图[M]. 北京:世界图书出版公司北京公司,2015:486-489.
D'AURIA R. From Special Relativity to Feynman Diagrams[M]. Beijing: World Publishing Company, 2015: 486-489. (in Chinese)