

从拓扑学视角欣赏电磁学之对称美

张泽林 樊晓宇 李 勇 郭明磊 刘 念 徐 兵

(安徽科技学院电气与电子工程学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘 要 本文从拓扑学视角探讨电磁学中高斯定理与安培环路定理的统一性, 为揭示电磁现象的整体性提供了优雅框架。静电场的高斯定理描述了电荷分布与电通量的关系, 可作曲率积分对电荷拓扑性质的表征; 稳恒磁场安培环路定理描述了电流与磁场的关系, 则对应环路间的连接数约束。二者可统一表述为第一陈数这一拓扑不变量, 其取值仅依赖于流形的整体拓扑结构或链环的缠绕方式, 与局部场强的细节无关。这种整体性描述突破了传统微分方程局部性描述的局限, 彰显了电与磁的对称美。研究指出, 拓扑学视角能为物理工作者理解电磁学定律提供新的理论框架。

关键词 高斯定理; 安培环路定理; 拓扑学; 电磁学; 拓扑不变量

DOI: 10.27024/j.wlygc.2025.06.20.02

APPRECIATING THE SYMMETRY OF ELECTROMAGNETISM THROUGH THE PERSPECTIVE OF TOPOLOGY

ZHANG Zelin FAN Xiaoyu LI Yong GUO Minglei LIU Nian XU Bing

(School of Electrical and Electronic Engineering, Anhui Science and Technology University, Bengbu, Anhui 233030)

Abstract This paper explores the unity of Gauss's law and Ampère's circuital law in electromagnetism from the perspective of topology, providing an elegant framework for revealing the integrality of electromagnetic phenomena. Gauss's law for electrostatic fields describes the relationship between charge distribution and electric flux, which can be regarded as the representation of the topological properties of charge by the curvature integral. Ampère's circuital law for steady magnetic fields, which describes the relationship between current and magnetic field, corresponds to the constraint of linking numbers between loops. Both can be unified in terms of the first Chern number, a topological invariant whose value depends only on the overall topological structure of the manifold or the way the links are intertwined, and is independent of the details of the local field strength. This holistic description breaks through the limitations of the local description of traditional differential equations and highlights the symmetry between electricity and magnetism. The study points out that the perspective of topology can provide a new theoretical framework for physicists to understand the laws of electromagnetism.

Key words Gauss theorem; Ampère circuital theorem; topology; electromagnetism; topological invariants

收稿日期: 2025-06-20

基金项目: 国家自然科学基金(项目批准号:12305056);教育部产学研合作协同育人项目(项目批准号:231103873273617);安徽省质量工程项目(项目批准号:2023ylyjh041;2024xsxx055;2024syyj036;2024sx117);安徽科技学院教育教学改革研究项目(项目批准号:Xj2024162;Xj2022147);安徽科技学院人才引进项目(项目批准号:DQYJ202202)。

通信作者: 张泽林, zhangzl@ahstu.edu.cn。

引文格式: 张泽林, 樊晓宇, 李勇, 等. 从拓扑学视角欣赏电磁学之对称美[J]. 物理与工程, 2026, 36(1): 155-162.

Cite this article: ZHANG Z L, FAN X Y, LI Y, et al. Appreciating the symmetry of electromagnetism through the perspective of topology [J]. Physics and Engineering, 2026, 36(1): 155-162. (in Chinese)

拓扑学是一门有趣且年轻的几何学分支,也常被戏称为“橡皮膜几何学”,其仅关心几何图形在连续形变(如拉伸、扭转、弯折等,但不允许撕裂与黏合)下那些保持不变的性质^[1],在物理学中有着广泛的应用。从经典电磁理论(如法拉第看待电磁现象的整体几何观念^[2]),到量子力学中波函数的不可积相因子(如狄拉克关于磁单极子的讨论^[3]、阿哈罗诺夫-玻姆效应^[4],以及贝里相位^[5]),再到将新型量子物态(如拓扑绝缘体)以及拓扑量子计算等领域^[6],许多物理效应仅依赖于时空或参数空间的整体拓扑性质(“整体”是指物理性质取决于系统的整体拓扑性,无法通过局部性质单纯地延拓到全体来完成,系统当前时刻的状态不只由上一时刻的状态来决定,还依赖于其经历的具体历史),而不受局部物理量(如场强)变化的影响。由此可见,拓扑学与物理学有着“千丝万缕”的联系。

电磁学从 18 世纪开始正式起步,到 19 世纪时已经获得长足进步^[7]。麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831—1879)于 19 世纪 50—60 年代将人类对电磁现象的认知推向了新的高度,并于 1873 年出版了具有划时代意义的巨著——《电磁通论》。19 世纪 80 年代中期,亥维赛德(Oliver Heaviside, 1850—1925)使用矢量代数工具将麦克斯韦给出的方程组从 20 个简化到了 4 个。简化后的方程组展现出了电和磁的“高度”对称性^[8]。

麦克斯韦借助斯托克斯定理的数学观念将法拉第(Michael Faraday, 1791—1867)整体的几何观念转化为局部的麦克斯韦方程。至 20 世纪中叶,拓扑学与微分几何学的革命性发展已揭示出物理系统中局部与整体的深层联系。20 世纪 40 年代中期,华裔数学家陈省身(Shiing-Shen Chern, 1911—2004)给出了高斯-博内定理在高维情况下的内蕴证明,引出了陈类和陈数等概念。作为整体微分几何中重要的拓扑不变量,陈数在规范场论中扮演着至关重要的角色。最简单的规范场是 $U(1)$ 规范场,即经典电磁场。电磁场的基本规律均可通过麦克斯韦的方程来完美诠释。

大学物理中的电磁学教学通常以静电场、稳恒磁场为基础来引入^[9]。在此情形下,电磁场不随时间变化,相应的麦克斯韦方程的微分形式写作: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ (静电场的高斯定理)以及 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ (稳恒磁场的安培环路定理)。 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别表示电场

强度和磁感应强度(下文中的矢量均用粗体表示), ϵ_0 和 μ_0 分别表示真空介电常数和真空磁导率。微分形式描述的是“点接触式的”相互作用,即物质的运动特征由某一时空点传递到相邻时空点,直至有限远或无限远的“边界”,邻近点通过微分方程相联系,并借助初始条件获得特定情形下的物理解。作为微分描述的必要补充,本文将引导读者从具备整体性的拓扑描述来重新审视高斯定理以及安培环路定理背后的统一性,进而领略电与磁的对称美。

本文首先分别介绍了微分几何学中的高斯-博内定理以及高斯环绕数积分,引出欧拉示性数以及连接数这两个拓扑不变量。其次,本文将二者统一表述为第一陈数,并通过数值方法讨论了静电场的高斯定理以及稳恒磁场的安培环路定理背后的拓扑学本质。最后,本文讨论了如何借助整体性的拓扑学的思想来重新审视电磁学中的定律,并充分挖掘隐藏在物理学中的对称美。

1 理论基础

1.1 整体的高斯-博内定理

整体(全局)的高斯-博内特定理是微分几何中最美的结果之一,其将曲面的局部几何性质(高斯曲率)与整体拓扑性质(欧拉示性数)联系起来。该定理不仅在数学(尤其是微分几何与代数拓扑)中具有深远影响,也在物理学(如粒子物理、凝聚态物理)中扮演着重要角色。陈省身将整体的高斯-博内定理推广到了偶数维的紧致无边黎曼流形上。对于 2-维情况,其可陈述为:一个可定向的 2-维闭曲面 $\mathcal{M}_2$ 的曲率积分仅取决于它的拓扑亏格^[10],且有

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{M}_2} K_G dS = \chi(\mathcal{M}_2) \quad (1)$$

其中, K_G 表示曲面的高斯曲率, dS 表示面积微元, $\chi = 2(1-g)$ 为欧拉示性数, g 则表示曲面的亏格,即闭合曲面上的“孔洞数”,这是一个非常“直观”的拓扑不变量。如图 1 所示,不同亏格的 2-维闭曲面,其欧拉示性数(即第一陈数:曲率 2-形式^[10]的积分除以 2π ,一般表示覆盖单位球面的次数;其还可转化为某一闭合链环绕另一闭合链环绕转的次数)不同。图 1(a)表示由紧致化参数 θ 和 ϕ 张成的 2-维球面参数空间($\mathcal{M}_2 = \mathcal{S}^2$),图 1

(b)则表示由紧致化参数 α 和 β 所张成的 2-维环面参数空间 ($\mathcal{M}_2 = \mathcal{T}^2$)。此定理完全由拓扑决定而与几何细节无关(如单位球面无论产生多剧烈的连续形变,其曲率积分恒为 4π)。本文后续将通过建立“曲率”和“场强”二者的联系来阐释整体的高斯-博内定理与静电场高斯定理间内在的拓扑等价关系。

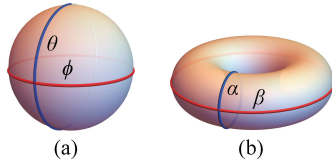


图1 由参数空间张成的两种流形的拓扑结构

(a) 球面 S^2 , 以极角 $\theta \in [0, \pi]$ 和方位角 $\phi \in [0, 2\pi]$ 描述, 覆盖整个球面, 面上任何闭合路径可连续缩为一点, 亏格 $g=0$; (b) 圆环面 T^2 , 以两个独立周期参数 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ 描述, 形似甜甜圈, 面上存在不可连续收缩的闭合回路, 亏格 $g=1$

1.2 高斯连接数(linking number)积分

1833年,高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)通过环路积分定义了连接数。假设两个有向链环分支分别为 L_1 和 L_2 , 沿两个分支进行环路积分可得高斯连接数

$$L_k = \frac{1}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{dr}_1 \times \mathbf{dr}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 代表两链环分支曲线上相对于空间某固定点 O 的位置矢量, 如图 2(a) 所示。积分结果为整数, 反映了两个或多个链环分支相互缠绕程度, 此积分结果同样具有连续形变下的不变性(只要曲线不产生交叉, 拉伸、弯曲等操作不改变

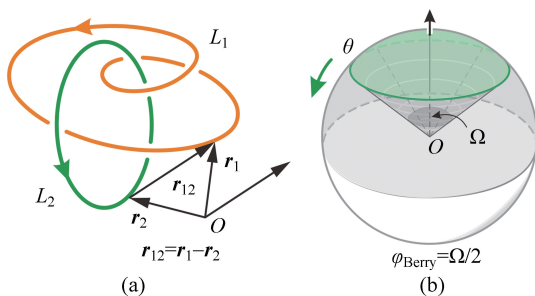


图2 不同背景下的第一陈数 Ch_1 的计算

(a) 第一陈数等于两有向链环 L_1 和 L_2 进行环路积分所得的高斯连接数 $L_k(L_1, L_2)$; (b) 贝里相位 φ_{Berry} 的大小等于自旋-1/2 的粒子的量子力学波函数受哈密顿参数空间中参数缓慢变化的影响而在布洛赫球面上演化出的闭合路径所围面积(深色(绿色)部分)对应的立体角 Ω 大小的一半。以极角 θ 在 0 到 $k\pi$ 之间连续变化的情况为例, k 为 ≥ 1 的相邻整数, 此时对应的第一陈数即为贝里相除以 2π 后得到的整数 k

连接数)。两个链环连接数 $L_k(L_1, L_2)$ 作为重要的拓扑不变量, 在电磁学和(磁)流体动力学中有着广泛应用^[11,12]。若使用高斯映射将公式(2)中的双回路积分转化为某矢量场在 2-维闭曲面上的第一陈数积分, 便可建立高斯连接数(即第一陈数 Ch_1)与稳恒磁场安培环路定理的联系。

2 高斯定理与拓扑不变量

麦克斯韦方程组关于电与磁的描述并非完全对称是广为人知的事实。物理学教材中通常将磁场的高斯定理解释为“自然界中尚未发现磁单极子(磁荷不存在)”^[9,13], 其微分形式为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。然而在 1931 年, 狄拉克(Paul Dirac, 1902—1984)为了解释电荷取值的量子化问题, 提出了磁单极子存在的可能性^[3]。他指出, 从电子波函数的不可积相位因子的角度出发, 可以自然地在量子力学框架中引入磁单极子。磁力线的封闭条件不排斥磁单极子的存在, 量子力学允许二者共存, 条件是电荷 e 与磁荷 g 之间需满足所谓的狄拉克量子化条件: $eg = 2\pi n \hbar / \mu_0$, $\hbar$ 为约化普朗克常数, n 为整数。一对磁南极与磁北极间通过半无限长的“狄拉克弦”相连。这根弦可看作是能将磁力线从磁南极导向磁北极的理想螺线管, 它保证磁力线封闭条件得到满足。在经典物理图像下, 狄拉克弦会因其对运动电荷产生的影响而被探测到。但在量子物理的图像下, 如果所有磁单极子均满足狄拉克量子化条件(确保在量子力学层面上磁单极子有效地等价于一个磁荷), 那狄拉克弦就不会被任何实验探测到。因此, 狄拉克认为这条弦并不是物理实在, 而是数学产物, 只有弦两端的磁极具有物理实在性。

1983 年, 贝里(Michael Victor Berry, 1941 年至今)发现了量子力学中的几何相位^[5], 并通过考虑处于缓慢变化的磁场中自旋-1/2 粒子的相位变化, 揭示了此相位的拓扑属性: 由哈密顿量参数空间(球面 S^2)中闭合回路所包围的位于简并点处的“等效磁单极子”贡献的磁通量。文中讨论的贝里曲率在参数空间中的行为可类比于磁场, 相应的贝里联络可类比为磁矢势, 贝里曲率的源(简并点), 即等效的磁单极子。贝里相位 φ_{Berry} (局部磁通量)的全局积分(总磁通量)被拓扑量子化为 2π 的整数倍, 而这一整数就是第一陈数(参数空间中的拓扑缺陷的个数), 如图 2(b) 所示, 将其表示为

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{S^2} \mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{S} = \frac{\varphi_{\text{Berry}}}{2\pi} = \text{Ch}_1 \quad (3)$$

其中, $\mathbf{F}_B$ 表示贝里曲率(即参数空间中的磁场强度)。与公式(1)进行比较,不难发现贝里曲率与高斯曲率($\mathbf{F}_B \leftrightarrow K_G$)以及欧拉示性数与第一陈数($\chi \leftrightarrow \text{Ch}_1$)之间的密切联系。早在1915年,爱因斯坦(Albert Einstein, 1879—1955)就通过“场强=曲率”的原则来解释引力场^[15]。回顾真空中静电场的高斯定理不难发现,将高斯面包围的电荷数与第一陈数相对应,再将真空介电常数与电场强度的乘积,即将真空中的电位移矢量 $\mathbf{D}_0 \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}$ 看作高斯面的“曲率”,从而将其表述为

$$\oint_{S^2} \mathbf{D}_0 \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n Q_i = \pm m Q_0 \quad (4)$$

其中, m 表示带符号的电荷数(“ $\pm$ ”号分别表示正、负电荷), Q_0 表示元电荷。接下来本研究通过拓扑不变量——第一陈数 Ch_1 , 来理解真空中静电场的高斯定理。简单起见,假设电荷集中在坐标原点,真空电位移矢量场为球对称分布 $\mathbf{D}_0 \equiv Q \mathbf{r}_0 / 4\pi r^2 \epsilon_0 \mathbf{E}$, r 为球面半径。首先,选取一个闭合球面为假想高斯面,并通过 θ 和 ϕ 进一步将其参数化。然后,将 $\mathbf{D}_0(\theta, \phi)$ 归一化为单位矢量场,并定义球面的高斯映射

$$n(\theta, \phi) = \frac{\mathbf{D}_0(\theta, \phi)}{|\mathbf{D}_0(\theta, \phi)|} = [\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta] \quad (5)$$

因此,第一陈数 Ch_1 可通过以下积分来计算

$$\begin{aligned} \text{Ch}_1 &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S^2} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \phi} \right) d\theta \wedge d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (6)$$

其中,“ $\wedge$ ”表示外积,在不高于三维空间的情形下等价于叉积“ $\times$ ”,而外积可以在高于三维的空间中使用,更具一般性。 $\sin\theta d\theta \wedge d\phi$ 表示单位球面上的无穷小有向曲面面积微元, $d\theta$ 和 $d\phi$ 在无限小时均可看作矢量,结合图1(a)中的流形参数,其几何意义如图5所示,关于外积更为详细的讨论见参考文献[10]。

若公式(6)的计算结果为 $\text{Ch}_1 = 1$, 则表示单位球面被覆盖一次,对应公式(4)中电荷数 m 不为零。为了直观展示此结果,本文引入从电荷指向球面的矢量 $\mathbf{r}_\lambda$ (正电荷矢量场),电荷在 z 轴上的移动通过无量纲移位参数 λ 表征,于是有

$$\mathbf{r}_\lambda = [r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta - \lambda] \quad (7)$$

数值计算结果分别如图3和图4所示,深灰色

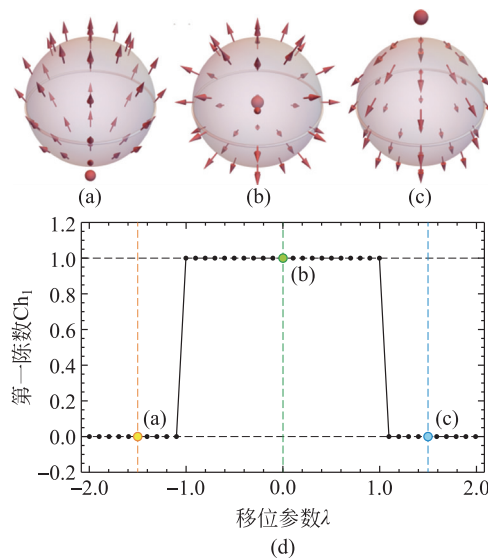


图3 单位正电荷高斯定理的演示

(a) 无量纲移位参数 $\lambda = -1.5$ 时,点电荷(深灰色小球(红球))、静电场(深灰色(红色)箭头)以及高斯面(浅灰色(白色)大球面)三者之间的位置关系;(b) $\lambda = 0$ 时,点电荷位于高斯面中心处;(c) $\lambda = 1.5$ 时,三者的位置关系;(d) 点电荷位于高斯面内、外时第一陈数 Ch_1 的取值,浅灰色(黄色)、深灰色(绿色)和黑色(蓝色)圆点分别对应上述三种情况

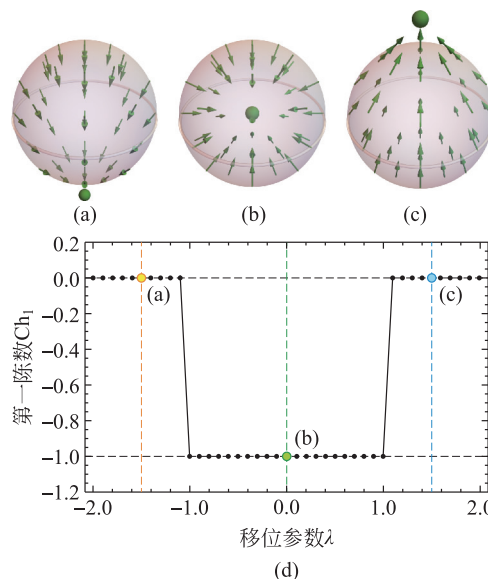


图4 单位负电荷高斯定理的演示

(a) 无量纲移位参数 $\lambda = -1.5$ 时,点电荷(浅灰色(绿球)小球)、静电场(浅灰色(绿色)箭头)以及高斯面(浅灰色(白色)大球面)三者之间的位置关系;(b) $\lambda = 0$ 时,点电荷位于高斯面中心处;(c) $\lambda = 1.5$ 时,三者的位置关系;(d) 点电荷位于高斯面内、外时第一陈数 Ch_1 的取值,浅灰色(黄色)、深灰色(绿色)和黑色(蓝色)圆点分别对应上述三种情况

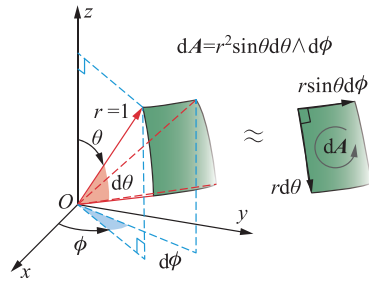


图5 单位球面上球坐标的外积几何意义

单位球面半径 $r=1$, 有向曲面面积微元 $d\mathbf{A} = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$, 面积的方向符合右手螺旋定则

小球(红球)和浅灰色小球(绿球)分别表示正、负电荷, 箭头表示空间电场分布, 浅灰色(白色)大球面表示高斯面, 电荷仅沿着 z 轴移动。 $\text{Ch}_1 = \pm 1$ 对应于高斯定理中电荷被高斯面包围的状态, 而当电荷位于高斯面外时, $\text{Ch}_1 = 0$, 积分结果对电荷的具体位置不敏感。第一陈数为负时, 矢量 $\mathbf{r}_\lambda$ 表示从球面指向电荷的矢量(负电荷矢量场)。数值计算中要注意的是当电荷与球面点重合时(程序中设定 $\|\mathbf{r}_\lambda\| = 10^{-6}$), 电场方向未定义, 返回零矢量避免计算结果发散。

至此, 本文通过第一陈数随电荷位置的变化而产生的跃变行为(像“拓扑”开关一样, 只与状态有关, 而与电荷的具体位置无关), 得到高斯定理中电荷被高斯面包围的状态与拓扑不变量之间的联系。

3 安培环路定理与拓扑不变量

在积分形式的麦克斯韦方程组中, 真空中稳恒磁场下的安培环路定理可通过真空中磁场强度 $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}/\mu_0$ 沿某一闭合回路的积分可表述为

$$\oint_l \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n I_i = \pm n I_0 \quad (8)$$

其中, n 表示带符号的电流数(“ $\pm$ ”号分别表示正、负电流, 正电流符合右手螺旋定则: 拇指指向电流流动方向, 四指环绕方向为假想的安培环路绕向), I_0 表示元电流。图6为安培环路定理的示意图, 浅色(红色)链环表示安培环路, 深色(蓝色)链环表示电流环路, 根据右手螺旋定则可知, 图示情形结果为负值。由公式(2)可知, 此闭合双链环回路积分的高斯链接数与电流环路绕安培环路的次数有关。要严格建立二者的等价关系, 本文首先要引入真空中磁场强度 $\mathbf{H}_0$ 的确切表达式, 其由

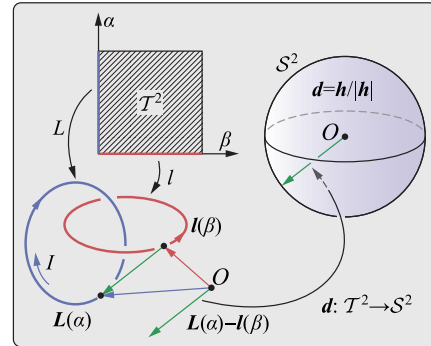


图6 由空间中两个参数化的闭合链环曲线: 电流环路

$L(\alpha)$ 和安培环路 $I(\beta)$ 定义的高斯映射 $d: T^2 \rightarrow S^2$ [15]

毕奥-萨伐尔定律给出

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{4\pi} \oint_L \frac{I d\mathbf{L} \times [\mathbf{L}(\alpha) - \mathbf{I}(\beta)]}{|\mathbf{L}(\alpha) - \mathbf{I}(\beta)|^3} \quad (9)$$

其中, $I d\mathbf{L}$ 表示电流元。本研究根据两点间的位矢定义新的矢量场 $\mathbf{h}(\alpha, \beta) = \mathbf{L}(\alpha) - \mathbf{I}(\beta)$ 。

将公式(9)代入公式(8), 可得

$$\oint_l \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \oint_l \oint_L \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{h}|^3} \cdot d\mathbf{l} \quad (10)$$

利用 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, 上式进一步转换为

$$\oint_l \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = \frac{I}{4\pi} \oint_l \oint_L \frac{\mathbf{h} \cdot (d\mathbf{l} \times d\mathbf{L})}{|\mathbf{h}|^3} \quad (11)$$

其中的双重回路积分即为高斯连接数积分, 此积分结果为整数, 其值的正负取决于两有向环路间的相互绕转取向(以满足右手螺旋定则为正)。由图1(b)可知, 本文通过选取两个周期性参数 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ 来表征环面上的某一点。然后, 将此环面上某一点 (α, β) 通过矢量 $\mathbf{h}(\alpha, \beta)$ 映射到将两个闭合环路 $L(\alpha)$ 与 $I(\beta)$ 上, 如图6所示。最后, 将 $\mathbf{h}(\alpha, \beta)$ 转换为单位球面的高斯映射

$$\mathbf{d}(\alpha, \beta) = \frac{\mathbf{h}(\alpha, \beta)}{|\mathbf{h}(\alpha, \beta)|} \quad (12)$$

于是安培环路定理则可写为 [14, 16]

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} &= -I \oint_l \oint_L \frac{\mathbf{h} \cdot (d\mathbf{L} \times d\mathbf{l})}{4\pi |\mathbf{h}|^3} \\ &= -I \text{Ch}_1 \end{aligned} \quad (13)$$

根据式(12), 将矢量场 $\mathbf{h}$ 归一化后, 在环面上的第一陈类积分可表示为

$$\begin{aligned} \text{Ch}_1 &= \oint_{T^2} \frac{\mathbf{h} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \beta} \right)}{4\pi h^3} d\alpha \wedge d\beta \\ &= \oint_{T^2} \frac{\mathbf{d} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \beta} \right)}{4\pi} d\alpha \wedge d\beta \end{aligned} \quad (14)$$

此积分结果即第一陈数,当环面参数坐标 (α, β) 经历一次周期性演化,其高斯映射的球面像也完成一次覆盖,对应式(8)中的整数 $n \neq 0$ 。其表征矢量场的整体性质,当矢量场经历连续变化(闭合有向链环曲线间不发生交叉)时,矢量场的拓扑性质保持不变。为了直观理解安培环路定理与拓扑不变量的联系,本文将电流环路 L 和安培环路 I 的参数坐标设定如下

$$L(\alpha, \lambda) = R [\cos\alpha + \lambda, 0, \sin\alpha] \quad (15)$$

$$I(\beta) = R [\cos\beta, \sin\beta, 0] \quad (16)$$

其中,表示电流环路的移位参数,其仅在水平方向平动,闭合环路还需满足 $I(\beta) = I(\beta + 1)$ 以及 $L(\alpha, \lambda) = L(\alpha + 1, \lambda)$, R 示两个圆环的半径。接下来,本文观察电流环路的圆心随着移位参数的变化,归一化后的两闭合回路的高斯连接数积分,即公式(14)的结果如何相应地进行改变。如图7所示,浅色(红色)圆环代表安培环路(箭头表示环路绕行方向),深色(蓝色)圆环代表电流环路(箭头表示电流的流动方向),固定安培环路,通过改变无量纲移位参数 λ 来水平移动电流环路,设两闭合圆形链环的无量纲半径 $R = 1$,安培环路的圆心始终固定在 $(0, 0)$ 处。图7(f)中的

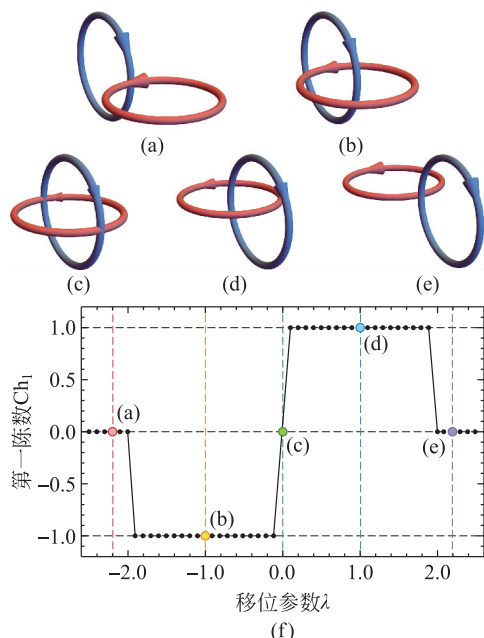


图7 单匝电流环路的安培环路定理演示

(a) 移位参数 $\lambda = -2.1$ 时,两有向链环相互分离;(b) 移位参数 $\lambda = -1$ 时,两链环相扣;(c) 移位参数 $\lambda = 0$ 时,两链环再次分离(临界);(d) 移位参数 $\lambda = 1$ 时,两链环再次相扣;(e) 移位参数 $\lambda = 2.1$ 时,两链环再次分离;(f) 环路电流处于安培环路内、外时第一陈数 Ch_1 的取值

灰度由浅至深(红色、黄色、绿色、蓝色和紫色)的圆点分别对应从图7(a)到图7(e)中两有向链环的相对位置状态。本文发现,当 $Ch_1 = \pm 1$ 时(以满足右手螺旋定则为正),对应于安培环路定理中假想安培环路包围电流环路的状态(两链环相扣),而当电流环路处于安培环路之外时(两链环分离), $Ch_1 = 0$ 。可见,连接数积分结果对两环路的具体位置不敏感,仅依赖于二者是否相互分离。

接着考虑一个变匝数安培环路问题。本文重新将电流环路和安培环路的参数坐标设定如下

$$L(\alpha, t) = R \begin{bmatrix} t \sin 2\alpha - (1-t) \sin \alpha \\ -2t(1-t) \sin \alpha \\ t \cos 2\alpha - (1-t) \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$I^*(\beta) = R [\cos\beta + 1, \sin\beta, 0] \quad (18)$$

其中, t 为无量纲形变参数,其变化范围从 -1 到 2 ,坐标参数 α 和 β 仍保持从 0 变化到 2π ,如图8所示。安培环路半径 $R = 1$,其圆心仍始终固定在 $(0, 0)$ 处。电流环路随着形变参数的变化,其匝数和相对于安培环路的位置也在发生变化。图8(f)

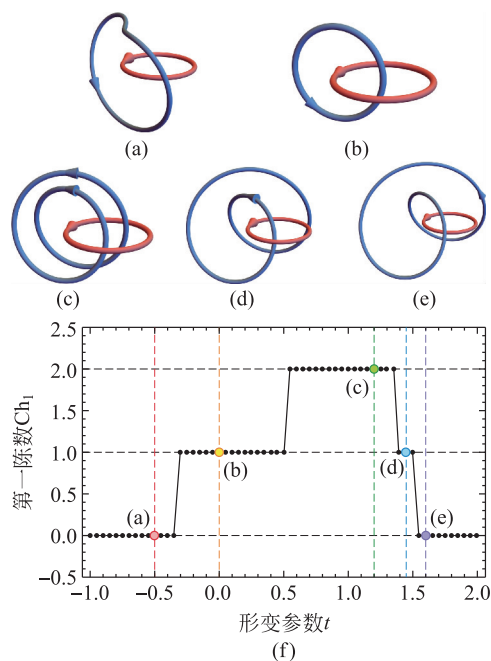


图8 变匝数电流环路的安培环路定理演示

(a) 形变参数 $t = -0.5$ 时,两有向环路相互分离;(b) 形变参数 $t = 0$ 时,两环路相扣,穿过安培环路的电流环路为单匝;(c) 形变参数 $t = 1.2$ 时,两环路相扣,穿过安培环路的电流环路变为双匝;(d) 形变参数 $t = 1.45$ 时,两环路相扣,穿过安培环路的电流环路再次变为单匝;(e) 形变参数 $t = 1.6$ 时,两环路再次分离;(f) 环路电流处于安培环路内、外时第一陈数 Ch_1 的取值

中灰度由浅至深(红色、黄色、绿色、蓝色以及紫色)的圆点分别对应图 8(a)到图 8(e)中两有向链环的相对位置和匝数的变化状态。当两链环相扣且电流环路的匝数分别为单匝和双匝时,连接数 $L_k(\mathbf{L}, \mathbf{l}^*) = \text{Ch}_1 = n = +1$ 和 $+2$ 也与之相对应,两环相离时连接数始终为 0。

与建立静电场高斯定理的拓扑描述类似,本文通过第一陈数随电流回路位置与匝数变化而产生的跃变行为,得到稳恒磁场下安培环路定理中两闭合环路间的位置、匝数状态与拓扑不变量之间的联系。

4 思考与讨论

本文分别通过高斯-博内定理与高斯连接数积分对真空中静电场的高斯定理以及稳恒磁场的安培环路定理进行了拓扑描述,发现复杂的电磁现象背后隐藏着简单的整体性描述,即均可通过同一个拓扑不变量——“第一陈数”来刻画。

然而,本文在前文中曾提到在进行高斯定理的拓扑学描述时,其参数空间的曲面“曲率”并不等价于“场强”。二者的区别在高斯面为环面的情况下尤为明显。因为环面的总曲率为 0,其欧拉示性数 $\chi(T^2) = 2(1-1) = 0$ 。这意味着若用以球面流形相同的方式进行类比,在高斯面为环面的情况下,电荷无论位于高斯面内部还是外部,总会通过高斯定理求出场强为 0 的结果,与目前大家所熟知的 3-维空间中 2-维闭曲面的高斯定理的相关结论并不完全相符,这一点有待深入探讨。因此,尽管物理学与几何学存在深刻而紧密的联系,但在使用高斯-博内定理(几何拓扑定理)审视静电场高斯定理(物理定律)时,仍需要谨慎。

事实上,我们仍可以使用拓扑学的手段将静电场的高斯定理和稳恒磁场的安培环路定理“完美”地统一起来,如图 9 所示。我们将闭合回路上(图 9 的四种情形下均为圆形回路)对应的矢量箭头沿着闭合回路逆时针绕行一圈回到起点后,发现四种情形下的矢量箭头均沿逆时针转了一圈,即缠绕数均为 $+1$ 。囿于本文主题不在于此,这里不再对缠绕数、连接数与扭转数间的关系进行讨论,感兴趣的读者可进一步阅读参考文献[17]。

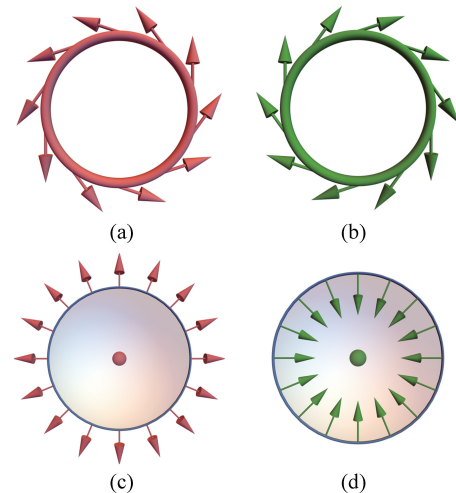


图 9 涡旋(正反)的磁场与发散(汇聚)的电场

(a) 正向电流(垂直于纸面穿出)产生的逆时针涡旋磁场回路; (b) 反向电流(垂直于纸面穿入)产生的顺时针涡旋磁场回路; (c) 正电荷在高斯面上的电场分布(纵向截面); (d) 负电荷在高斯面上的电场分布(纵向截面)

5 结语

本文从拓扑学视角揭示了电磁学中电与磁的对称性,通过第一陈数对静电场高斯定理与稳恒磁场安培环路定理进行了统一的整体性刻画。从整体性的拓扑学角度重新审视电磁学定律,引导物理工作者从局部到整体认识客观物质世界的科学观,使其对抽象定理有更加直观的认识,拓宽视野,增进理解。此外,我们需警惕几何拓扑与物理定律的概念差异,追求自然界统一的、和谐的美固然重要,但尊重物理事实更重要。

参 考 文 献

- [1] 王敬庚. 橡皮几何学漫谈[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2017.
WANG J G. The rubber-sheet geometry[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 2017. (in Chinese)
- [2] 李华钟. 量子几何相位概论: 简单物理系统的整体性[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
LI H Z. Introduction to quantum geometric phases: global properties of simple physical systems[M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
- [3] DIRAC P. Quantised singularities in the electromagnetic field[J]. Proceedings of the Royal Society London A, 1931, 133: 60-72.
- [4] AHARONOV Y, BOHM D. Significance of electromagnetic potentials in quantum theory[J]. Physical Review, 1959,

- 115; 485-491.
- [5] BERRY M. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes[J]. Proceedings of the Royal Society London A, 1984, 392: 45-57.
- [6] STANESCU T. Introduction to topological quantum matter and quantum computation[M]. Boca Raton: CRC Press, 2024.
- [7] 项武义. 几何学在文明中所扮演的角色: 纪念陈省身先生的辉煌几何人生[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- XIANG W Y. The role of geometry in civilization: celebrating the illustrious geometric life of professor Shiing-Shen Chern[M]. Beijing: Higher Education Press, 2009. (in Chinese)
- [8] YANG C N. The conceptual origins of Maxwell's equations and gauge theory[J]. Physics Today, 2014, 67(11): 45-51.
- [9] 赵近芳, 王登龙. 大学物理学. 6版[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2021.
- ZHAO J F, WANG D L. College physics[M]. 6th ed. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications Press, 2021. (in Chinese)
- [10] NEEDHAM T. Visual differential geometry and forms: a mathematical drama in five acts[M]. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2021.
- [11] 关昊, ZUCCHER S, RICCA R, 等. 拓扑流体力学及其新近发展[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 054701.
- GUAN H, ZUCCHER S, RICCA R, et al. Topological fluid mechanics and its new developments[J]. SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica, 2020, 50: 054701. (in Chinese)
- [12] 姜伯驹. 绳圈的数学[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011.
- JIANG B J. Mathematics of string figures[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2011. (in Chinese)
- [13] 张三慧. 大学物理学. 电磁学、光学、量子物理[M]. 4版. 北京: 清华大学出版社, 2018.
- ZHANG S H. College physics. electromagnetism, optics and quantum physics[M]. 4th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2018. (in Chinese)
- [14] FRANKEL T. The geometry of physics: an Introduction [M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 2012.
- [15] ARNOLD V, KHESIN B. Topological methods in hydrodynamics[M]. Switzerland: Springer Nature, 2021.
- [16] 唐建立, 李逸文, 朱俊安, 等. 安培环路定理的拓扑学描述[J]. 大学物理, 2020, 2: 74-77.
- TANG J L, LI Y W, ZHU J A, et al. The topological description of Ampère's circuital law[J]. College Physics, 2020, 2: 74-77. (in Chinese)
- [17] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学——DNA 力学模型的理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- LIU Y Z. Nonlinear mechanics of thin elastic rod—Theoretical basis of mechanical model of DNA [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. (in Chinese)

(上接第 154 页)

求解初始角加速度及两杆之间作用力。双杆摆大角度摆动的运动规律极其复杂, 运动呈混沌现象, 而且没有解析解。双杆摆在平衡位置微扰时, 运动是有规律的, 合理近似则存在解析解, 这在之前参考文献中极少出现过。通过对双杆摆的深入研究, 使学生对混沌和秩序现象理解更加深刻, 同时也为物理竞赛教学提供新的振动素材。

参 考 文 献

- [1] 刘丁杨, 蹇开林, 张亮. 基于 Melnikov 法的双摆系统混沌特性研究[J]. 振动与冲击, 2022, 41(4): 92-98.
- LIU D Y, JIAN K L, ZHANG L. Research on chaotic characteristics of double pendulum system based on Melnikov method[J]. Vibration and Shock, 2022, 41(4): 92-98. (in Chinese)
- [2] 崔志明. 具有质量的刚杆连接的双摆运动[J]. 延安大学学报, 2001, 20(2): 21-24.
- CUI Z M. Dynamics of a double pendulum with massive rigid links[J]. Journal of Yan'an University, 2001, 20(2): 21-24. (in Chinese)
- [3] 李戈, 时志高, 谢奇之, 等. 基于 Mathematica 对保守双摆的研究[J]. 南昌航空大学学报: 自然科学版, 2016, 30(3): 40-43.
- LI G, SHI Z G, XIE Q Z, et al. Research on the conservative double pendulum based on Mathematica[J]. Journal of Nanchang Hangkong University: Natural Science Edition, 2016, 30(3): 40-43. (in Chinese)
- [4] 孔令辉, 刘丁杨, 蹇开林. 非均质物理双摆的混沌特性研究[J]. 重庆大学学报, 2024, 47(2): 106-116.
- KONG L H, LIU D Y, JIAN K L. Research on chaotic characteristics of non-homogeneous physical double pendulum[J]. Journal of Chongqing University, 2024, 47(2): 106-116. (in Chinese)
- [5] 安宇. 理论力学中混沌内容的讲授[J]. 大学物理, 2004, 23(8): 3-12.
- AN Y. Instruction on chaos in theoretical mechanics[J]. University Physics, 2004, 23(8): 3-12. (in Chinese)
- [6] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1985, 16(3): 285-317.
- [7] 舒幼生. 力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005: 256-261.
- SHU Y S. Mechanics[M]. Beijing: Peking University Press, 2005: 256-261. (in Chinese)