

关于质点分运动的几个动能定理式及其在一道高考题中的应用

邵 云

(南京晓庄学院电子工程学院, 江苏 南京 211171)

摘 要 本文首先证明了质点的动能定理在直角坐标系和柱坐标系中的几个分式——分运动的动能定理式, 以及相应的功的正交叠加法则; 然后应用轴动量矩守恒的知识, 给出了 2024 年江苏省物理高考第 11 题的常规解法, 并作出题图中的夹角 θ 随斜绳长 l 的变化趋势图; 最后应用所证得的柱坐标系中所谓的分运动的动能定理式, 近似在中学物理知识的范畴内, 逐步地推断出该试题的(B)、(A)、(D)选项均为错误的结论。本文既可以为大学力学相关内容提供有益的补充, 又可以为大、中学物理教学提供参考。

关键词 功的正交叠加法则; 分运动的动能定理式; 轴动量矩守恒; 江苏省物理高考

SEVERAL KINETIC ENERGY THEOREM FORMULAS OF COMPONENT MOTIONS OF PARTICLES AND THEIR APPLICATION IN A COLLEGE ENTRANCE EXAMINATION QUESTION

SHAO Yun

(School of Electronic Engineering, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing, Jiangsu 211171)

Abstract This paper first proves several fractional forms of the kinetic energy theorem for particles in Cartesian and cylindrical coordinate systems, termed the kinetic energy theorem equations for translational and rotational motions, along with orthogonal superposition rules for work. Then, applying the knowledge of conservation of axial momentum moment, a conventional solution for the 11th question of the 2024 Jiangsu Provincial Physics College Entrance Examination is given, and a trend chart of the angle θ changing with the length l of the diagonal rope both in the question's diagram is made. Finally, by applying the so-called formula for the kinetic energy theorem of component motion that has been proven in the cylindrical coordinate system, it is gradually inferred approximately within the scope of middle school physics knowledge that options (B), (A), and (D) of the question are all incorrect. The content of the paper can provide useful supplements for mechanics related content in universities, as well as reference for physics teaching in universities and middle schools.

Key words the orthogonal superposition rule of work; the formula for the kinetic energy theorem of component motion; conservation of axial momentum moment; Jiangsu provincial physics college entrance examination

收稿日期: 2025-03-29

基金项目: 2025 年度南京市物理学会教育课题项目(NJWLXH-KT/2025/01/01)。

通信作者: 邵云, shaoyun1973@163.com。

引文格式: 邵云. 关于质点分运动的几个动能定理式及其在一道高考题中的应用[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 234-239.

Cite this article: SHAO Y. Several kinetic energy theorem formulas of component motions of particles and their application in a college entrance examination question[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 234-239. (in Chinese)

笔者经过调查发现,在大多数力学教材中,人们常常将质点的动能按照维度或者自由度进行正交分解,但是很少将质点的动能定理也进行相应的正交分解(文献[1]除外)。其主要原因大体在于:(1)通常标积功形式的动能定理表达式十分简洁,使用起来也十分方便;(2)动能定理是标量定理,对于它是否能够正交分解,以及分解后的使用范围是否广泛等问题存在争议。这就导致了在直角坐标系和柱坐标系中,质点的几个确实能够成立并且十分具有实用价值的分运动的动能定理式(见下文)很少被提及和应用,留下缺憾。下文将详细地推理出质点在直角坐标系和柱坐标系中的这几个能够成立的分运动的动能定理式,并将其应用于一道颇为棘手的高考选择题,以解决该试题在中学层面貌似难以快速完整求解的问题。

1 直角坐标系中功的正交叠加法则与质点分运动的动能定理式

如图1所示,一质量为 m 的质点 P 在直角坐标系 $Oxyz$ 中运动。设在 t 时刻,该质点的位置矢量为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1)$$

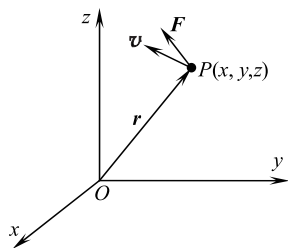


图1 质点 P 在直角坐标系中的运动分析

速度矢量为

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

所受(合)外力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_x(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\mathbf{i} + F_y(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\mathbf{j} + F_z(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\mathbf{k} \quad (3)$$

[注:式(3)所表达的是一般的受力情况,其中的自变量 $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$ 是通常的缩减记法,代表了 $x, y, z, v_x, v_y, v_z, t$ 这7个独立变量],则根据牛顿第二定律有

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = F_x \\ m \frac{dv_y}{dt} = F_y \\ m \frac{dv_z}{dt} = F_z \end{cases} \quad (4)$$

对式(4)进行常规的微分变形后可得

$$\begin{cases} mv_x dv_x = F_x dx \\ mv_y dv_y = F_y dy \\ mv_z dv_z = F_z dz \end{cases} \quad (5)$$

将式(5)中的各分式两边分别进行相应的积分,则可得

$$\begin{cases} \Delta\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) = \int F_x dx \\ \Delta\left(\frac{1}{2}mv_y^2\right) = \int F_y dy \\ \Delta\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right) = \int F_z dz \end{cases} \quad (6)$$

此即质点 P 的动能定理在 x, y, z 三个方向上的分式,也即质点 P 在三个方向上的分运动的动能定理式,其中的 $\int F_x dx, \int F_y dy, \int F_z dz$ 分别为三个方向上的分力做功,一般较难计算,除非它们都能被换元成一元积分。

将式(6)中的各分式叠加便得

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz \quad (7)$$

而力学中质点 P 的通常的动能定理形式为

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_l F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (8)$$

其中, l 表示线积分路径,也即质点的轨迹。于是立见

$$\begin{aligned} & \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz \\ &= \int_l F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)便是直角坐标系中的功的正交叠加法则,它的文字意义是:在直角坐标系中,作用在质点上的外力 $\mathbf{F}$ 所做的功,就等于 $\mathbf{F}$ 的各个分力在各自方向上所做功的代数和。

此外,由式(5)的前两个分式可得

$$m(v_x dv_x + v_y dv_y) = F_x dx + F_y dy \quad (10)$$

式(10)两边积分便得

$$\Delta\left[\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)\right] = \int_{l_{xy}} F_x dx + F_y dy \quad (11)$$

其中, $[\]$ 内可称质点 P 在 Oxy 平面内的投影运动动能, l_{xy} 则是质点 P 在 Oxy 平面内的投影轨迹。接下来, 联立式(6)、式(11)便得

$$\int F_x dx + \int F_y dy = \int_{l_{xy}} F_x dx + F_y dy \quad (12)$$

式(11)和式(12)便可谓质点 P 在平面直角坐标系 Oxy 内的分运动的动能定理式和功的正交叠加法则, 它们分别也是式(8)和式(9)的特例。

2 柱坐标系中功的一种正交叠加法则与相应的质点分运动的动能定理式

在如图 2 所示的柱坐标系中, 质点 P 的柱坐标为 (ρ, θ, z) 。根据力学相关知识可知, 质点 P 在此柱坐标系中的位置矢量 $\mathbf{r}$ 、元位移矢量 $d\mathbf{r}$ 、速度矢量 $\mathbf{v}$ 、加速度矢量 $\mathbf{a}$ 分别可以表示为

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{k} \quad (13)$$

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{k} \quad (14)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{k} \quad (15)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{k} \quad (16)$$

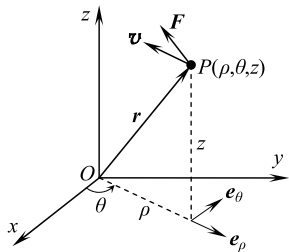


图 2 质点 P 在柱坐标系中的运动分析

外力 $\mathbf{F}$ 则表示为

$$\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{k} \quad (17)$$

于是, 此柱坐标系中牛顿第二定律的分量形式为

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = F_\rho \\ m(\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = F_\theta \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \quad (18)$$

$\mathbf{F}$ 做的元功则为

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_\rho d\rho + F_\theta \rho d\theta + F_z dz \quad (19)$$

联立式(18)和式(19), 即可证得质点在柱坐标系中的动能定理式

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \Delta\left[\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)\right] \\ &= \int_l F_\rho d\rho + F_\theta \rho d\theta + F_z dz \end{aligned} \quad (20)$$

以及质点在 Oxy 平面内对应的极坐标系中投影运动的分运动动能定理式

$$\Delta\left[\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)\right] = \int_{l_{xy}} F_\rho d\rho + F_\theta \rho d\theta \quad (21)$$

证明过程从略, 其中的下标 l, l_{xy} 的意义同前。接着, 再联立式(6)、式(20)、式(21)即得

$$\begin{aligned} &\int_l F_\rho d\rho + F_\theta \rho d\theta + F_z dz \\ &= \int_{l_{xy}} F_\rho d\rho + F_\theta \rho d\theta + \int F_z dz \end{aligned} \quad (22)$$

此即柱坐标系中的功的一种正交叠加法则, 它的文字意义是: 在柱坐标系中, 作用在质点上的外力 $\mathbf{F}$ 所做的功, 就等于 $\mathbf{F}$ 在 Oxy 平面内的投影分力 $F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\theta \mathbf{e}_\theta$ 所做的功 + $\mathbf{F}$ 在 z 轴上的投影分力 $F_z \mathbf{k}$ 所做的功。显然, 这两个投影分力所做的功就分别等于分动能 $\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2)$ 和 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$ 的增量, 可称之为两个分运动的动能定理。需要注意的是, 经计算发现, 当 $\dot{\theta} \neq 0$ 时有

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2\right) &\neq \int F_\rho d\rho \\ \Delta\left(\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2\right) &\neq \int F_\theta \rho d\theta \end{aligned}$$

即径向(或横向)力所做的功并不等于径向(或横向)动能的增量。这一点与上一节直角坐标系中的情况有所不同, 其中的原因在于这里的径向与横向都是不断变化的, 并且径向运动与横向运动又是相互影响、相互转化的——不相互独立! 参见式(18), 故而式(21)无法在径向和横向进行进一步的分解。

3 2024 年江苏省物理高考第 11 题的常规解法

关于 2024 年江苏省物理高考第 11 题(见下文)(B)选项的判断, 确实是一个比较棘手的问题。据笔者观察, 迄今鲜有学者在中学物理层面对该选项做出清晰的、本质性的判断。目前该题公认的严格解法也即本文下面要说的常规解法, 需要用到大学物理中的轴动量矩守恒的知识。

试题: 如图 3 所示, 轻绳的一端拴一个蜂鸣器, 另一端穿过竖直管握在手中。蜂鸣器在水平面 a 内做匀速圆周运动。缓慢下拉绳子, 使蜂鸣器升高到水平面 b 内继续做匀速圆周运动。不计空气

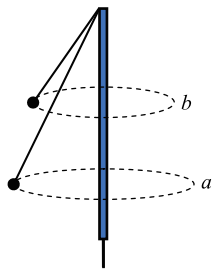


图3 2024年江苏物理高考第11题图

阻力和摩擦力,则与升高前相比,蜂鸣器()。

- (A) 角速度不变 (B) 线速度减小
(C) 向心加速度增大 (D) 所受拉力大小不变

解析过程:设题图3中小球的质量为 m ;在任意 t 时刻,斜绳的长度为 l ,它与竖直管之间的夹角为 θ ,小球的速率为 v ;重力加速度的大小为 g 。则根据题意可知,小球在任意 t 时刻近似做匀速圆周运动的圆形轨道半径为

$$r = l \sin \theta \quad (23)$$

绳子的张力为

$$T = mg / \cos \theta \quad (24)$$

小球做匀速圆周运动的法向动力学方程则为

$$mg \tan \theta = m \frac{v^2}{r} = m \frac{v^2}{l \sin \theta}$$

化简即得

$$v = \sqrt{gl \tan \theta \sin \theta} \quad (25)$$

此外,根据力学知识可知,小球对竖直管子中心轴线的轴动量矩(即轴角动量)守恒。设其大小为 L_0 (常量),则有

$$mvr = L_0 \quad (26)$$

于是,联立式(23)、式(25)、式(26)即求得

$$l^3 \tan \theta \sin^3 \theta = \frac{L_0^2}{m^2 g} = C (\text{常量}) \quad (27)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{C}{\tan \theta}} \quad (28)$$

可见随着斜绳长 l 的缩短, θ 将增大, r 将减小。这些与题图3中的情况是一致的。

从式(26)及 r 将减小这一点即可见,随着半径 r 的减小,线速度 v 将增大,角速度 $\omega = v/r$ 、向心加速度 $a = v^2/r$ 均将随之增大。另外,从式(24)及 θ 将增大这一点又可见,随着夹角 θ 的增大,小球所受拉力也即绳子张力 T 的大小也将增大。因此本题的正确选项是(C)。

需要强调的是,以上推理过程并未参考题

图3。

从以上的解题过程中可见,轴动量矩守恒式(26)是完整地求解出本题的一个关键式。虽然从式(23)、式(25)可以判断出

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}} = \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (29)$$

(其中 $h = l \cos \theta$ 为小球距离上管口的竖直距离)将增大,即能够判断出(A)选项是错误的,但是在不参考题图3及式(26)的情况下,其他三个选项将难以做出判断!并且,即使参考题图3(显示 θ 在增大, r 在减小),但仍缺少式(26),那么仅凭式(23)、式(25)及题图3,依然难以判断小球的线速度 v 是在增大还是在减小,即依然难以判断(B)选项——尽管可以从题图3中直接“读”出答案(C)选项。

4 第11题的分运动动能定理法

笔者发现,其实只需应用上文所简单证得的水平面内的分运动动能定理式(21),该试题包括(B)选项便能迎刃而解。

解析过程:根据第2节柱坐标系中的功的正交叠加法则式(22)与质点分运动的动能定理式(21),以及题意等可知,斜绳拉力 T 在竖直方向上的分力 $T \cos \theta (\approx mg)$,允许小球在竖直方向上有小量的加减速,下同)对小球所做的正功,将与小球重力做的负功相互抵消;而 T 在水平面内的分力 $T \sin \theta (\approx mg \tan \theta)$ 对小球所做的正功,将完全转化为小球动能的增量。这里需要说明一下,小球在水平分力 $T \sin \theta$ 的牵引下,其在水平面内(的投影)的圆周或准圆周运动半径 r 是不可能增大的!这是因为倘若 r 在某个时间段内增大,如图4(a)中所示意,那么水平分力 $T \sin \theta$ 势必对小球做负功导致小球在水平面内的速度分量 $v_{\text{水平}}$ 减小,则从图4(a)中不难看出这是违反物理逻辑的——水平面内圆周运动所需要的向心力 $mv_{\text{水平}}^2/r$ 在减小,而拉力 T 所提供的向心力 $T \sin \theta (\approx mg \tan \theta)$ 却在增大。因此,在将小球向上提拉的过程中,小球在水平面内(的投影)做圆周或准圆周运动的半径 r 只能单调地减小。另外,同理可以判断出,图4(b)中夹角 θ 变小的中间变化情形也是不可能发生的,即 θ 只能单调地增大。由此可见,题图3在原则上是正确的。

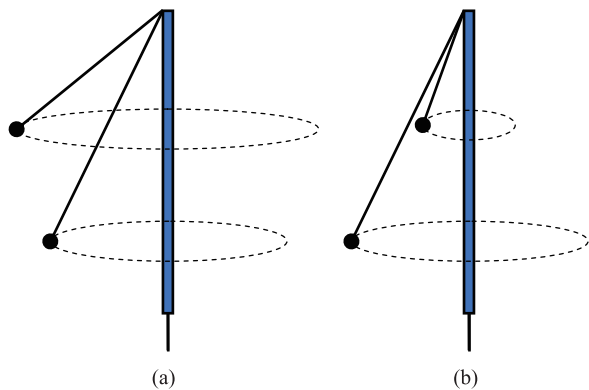


图4 轻绳的两种假想的中间变化情形
(a) r 变大的情形; (b) θ 变小的情形

现在将式(21)应用于本题,即得小球先后在题图3中 a 、 b 平面内做匀速圆周运动的动能增量为

$$\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -\int_{r_A}^{r_B} T \sin\theta dr > 0 \quad (30)$$

其中, v_a 、 v_b 分别为小球在 a 、 b 平面内做匀速圆周运动的速度(以下类同), r 、 $-T \sin\theta$ 分别相当于式(21)中的 ρ 、 F_ρ ,并且有 $F_\theta=0$ (T 在水平面内的分力沿径向向内)。则从式(30)可见 $v_a < v_b$,结合 r 减小可知 $\omega_a < \omega_b$,向心加速度 $a_a < a_b$;再结合本题中向心加速度大小的表达式 $a = g \tan\theta$ 便知 $\theta_a < \theta_b$;继续结合式(24)即 $T = mg/\cos\theta$ 便得 $T_a < T_b$ 。因此,本题选(C)。

与上节应用轴动量矩守恒的常规解法一样,本节的分运动动能定理法,在不参考题图3的情况下,同样也能完整地求解出本题。

5 题外的话

根据式(27),即可作出在不同的轴动量矩 L_0 下夹角 θ 随斜绳长 l 的变化趋势图5,图中已设

$$C = \frac{L_0^2}{m^2 g} = \frac{v^2 r^2}{g} = 0.5 \text{ m}^3, 1 \text{ m}^3, 2 \text{ m}^3$$

当然,这里的长度单位是可以任意选择的。

图5中已经选择了从本题图3中所测得的两夹角 $\theta_a = 26^\circ$ 、 $\theta_b = 35^\circ$ 来作示意。从式(27)中可见,题图3中 a 、 b 两运动平面处的斜绳长 l_a 、 l_b ,与相应的夹角 θ_a 、 θ_b 之间的关系应该满足

$$\frac{l_a}{l_b} = \frac{\sin\theta_b}{\sin\theta_a} \sqrt[3]{\frac{\tan\theta_b}{\tan\theta_a}} \quad (31)$$

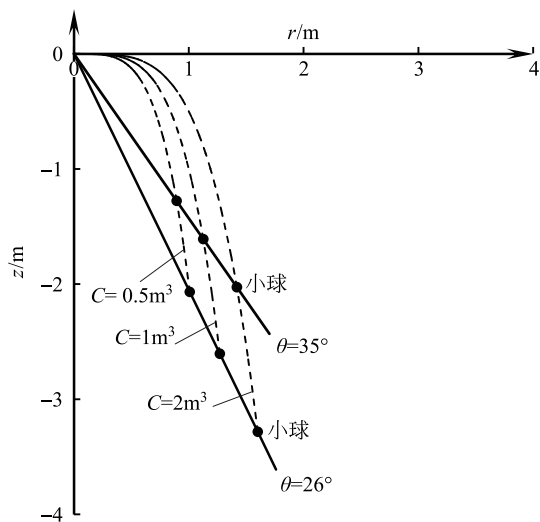


图5 不同的轴动量矩 L_0 (即不同常量 C)下夹角 θ 随斜绳长 l 的变化趋势

而将以上两个 θ 值代入即得

$$l_a/l_b \approx 1.5$$

这个结果与图5中所显示的情况是一致的,但是与题图3中所显示的情况却有些出入——题图3中所呈现的 l_a/l_b 比值有些偏大。

6 结语

本文首先证明了质点在直角坐标系中的动能定理的三个分式——本文称之为三个分运动的动能定理式,即式(6),以及功的正交叠加法则式(9)和式(12)。这即表明:虽然动能和功是两个标量,但是它们的确可以在相互正交的 x 、 y 、 z 三个方向上进行标量分解,继而形成这三个方向上的分运动的动能定理式。本文然后又证明了质点在柱坐标系中的分运动的动能定理式(21),以及功的正交叠加法则式(22)。接着,本文应用轴动量矩守恒的知识,给出了2024年江苏省物理高考第11题的常规解法,并作出题中夹角 θ 随斜绳长 l 的变化趋势图5,发现了题图3中的一个小小的不足之处。最后,本文应用所证得的式(21),从物理逻辑上推断出第11题中小球在水平面内(的投影)做准匀速圆周运动的半径 r 是在单调地减小的,而速度 v 、夹角 θ 则均在单调地增大。这样,即使在不知道轴动量矩守恒以及不参考题图的前提下,也能近似在中学物理知识的范畴内,逐步推断出本题的(B)(A)(D)选项均为错误的结论。显然,

相较于直接从题图 3 中“读”出答案(C)选项的功利性解法,本文这里所介绍的这两种解法都是完整而科学的。

功的正交叠加法则在任何正交坐标系中都能成立,只是通常很少用到。而本文中所谓的分运动的动能定理式,则只能在相互正交并且方向恒定的运动维度上,比如在直角坐标系的三个轴线方向,以及在柱坐标系的 z 轴方向和与之所垂直的 xOy 平面内适用,并且在有约束存在的情况下,其使用也未必方便。尽管如此,这些知识仍可以为大学力学教材提供一些有益的补充,能够起到拓展思维的作用,能够较为直观地解决直角坐标系和柱坐标系中的一些质点尤其自由质点的运动问题^[2-6];我们不能因为其使用范围看似不够广泛,或者命名存在争议,从而忽视它们业已存在的价值;否则,我们可能会因此而丧失掉对于一些基础问题的基本判断能力。新出版的《力学》教材^[1]中也特别指出:“……(在直角坐标系中)正交分解时,动能定理也可分解,即动能定理等于三个正交方向上的一维运动的动能定理之和……”这大概便也是考虑到这些分运动的动能定理式的实用价值吧。

致谢:本文在完善的过程中得到了复旦大学蒋最敏教授的热忱指导,在此鸣谢。

参 考 文 献

[1] 郑永令,贾起民,方小敏. 力学[M]. 蒋最敏,改. 北京:高等教育出版社,2024:18.

育出版社,2024:18.

ZHENG Y L, JIA Q M, FANG X M. Mechanics[M]. revised by JIANG Z M. Beijing: High Education Press, 2024: 18. (in Chinese)

[2] 孙永茂. 动能定理是否有单方向的“分解式”[J]. 物理通报, 2021, 40(12): 151-155.

SUN Y M. Does the kinetic energy theorem have a one-way “decomposition equation” [J]. Physics Bulletin, 2021, 40(12): 151-155. (in Chinese)

[3] 杨习志,杨蒲英. 动能定理有分量形式吗? [J]. 物理教学, 2016, 38(5): 16-18.

YANG X Z, YANG P Y. Does the kinetic energy theorem have a component form? [J]. Physics Teaching, 2016, 38(5): 16-18. (in Chinese)

[4] 夏季云. 动能定理的“正交分解”[J]. 中学物理, 2009, 27(13): 47-48.

XIA J Y. “Orthogonal decomposition” of the kinetic energy theorem[J]. Middle School Physics, 2009, 27(13): 47-48. (in Chinese)

[5] 王德全. 动能定理有分量形式吗? [J]. 中学物理教学参考, 2002, 31(6): 19.

WANG D Q. Does the kinetic energy theorem have a component form? [J]. Teaching Reference of Middle School Physics, 2002, 31(6): 19. (in Chinese)

[6] 杨震云. 存在动能定理的“分量形式”吗? [J]. 物理教师, 2002, 23(5): 39-40.

YANG Z Y. Is there a “component form” of the kinetic energy theorem? [J]. Physics Teacher, 2002, 23(5): 39-40. (in Chinese)

(上接第 233 页)

[11] CHEPELIANSKII A D, SHEPELYANSKY D L. Dynamical turbulent flow on the Galton board with friction[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(3): 034101.

[12] KOZLOV V V, MITROFANOVA Y M. Galton board [J]. Regular and Chaotic Dynamics, 2003, 8(4): 431-439.

[13] ROSATO A D, BLACKMORE D, BUCKLEY L, et al. Experimental, simulation and nonlinear dynamics of Galton's board[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2004, 5(4): 289-312.

[14] DAUD A A M. An improved mathematical model of Galton board with velocity dependent restitution[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2017, 12(6): 060901.

[15] DAUD A A M. Mathematical modelling and symbolic dynamics analysis of three new Galton board models[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(10): 3476-3491.

[16] BOUWMEESTER D, MARZOLI I, KARMAN G P, et al. Optical Galton board[J]. Physical Review A, 1999, 61: 013410.

[17] SANZ-HERNÁNDEZ D, MASSOURAS M, REYREN N, et al. A nano-magnetic Galton board[DB/OL]. 2020, arxiv:2010.10389.

[18] 晋宏营,刘美云. 伽尔顿板实验小球分布的研究[J]. 物理与工程, 2012, 22(6): 31-34.

JIN H Y, LIU M Y. Study on balls distribution in Galton board experiment [J]. Physics and Engineering, 2012, 22(6): 31-34. (in Chinese)

[19] 柯朗·R, 希尔伯特·D. 数学物理方法(卷Ⅱ)[M]. 熊振翔, 杨应辰, 译. 北京: 科学出版社, 1977: 159-162.

COURANT R, HILBERT D. Methods of mathematical physics (Volume II) [M]. Translated by XIONG Z X, YANG Y C. Beijing: Science Press, 1977: 159-162. (in Chinese)