

侧壁反弹对 Galton 板模型出口分布函数的影响

徐宝 吴鸿业 于悦

(包头师范学院物理科学与技术学院, 内蒙古 包头 014030)

摘要 理想 Galton 板模型的出口分布函数是一维扩散方程的解, 可用后者检验出口分布函数的正确性。由于最大熵原理不考虑边界反弹效应, 存在侧壁反弹时, 从最大熵原理导出的出口分布函数不满足一维扩散方程。为了严格考虑侧壁反弹效应, 可以采用周期折叠方案。得到的出口分布函数满足一维扩散方程。最大熵原理得到的出口分布函数是周期折叠方案的零级近似。采用 Monte Carlo 数值方法产生 Galton 板出口分布函数, 比较两种方案对统计数据的表达能力, 结果表明: 对于存在侧壁反弹效应的出口分布函数, 周期折叠方案的一级近似(三峰分布)比零级近似(最大熵原理得到的单峰分布)具有更好的表达能力。在保持 Galton 板宽度不变的前提下, 随着钉板层数增大, 出口分布函数从正态分布逐渐转变到均匀分布。以单峰分布为例, 给出了确定转变点的方法。

关键词 Galton 板模型; 侧壁反弹效应; 最大熵原理; 周期折叠方案

THE EFFECT OF WALL REBOUNDS ON THE EXIT DISTRIBUTION FUNCTION IN GALTON BOARD MODELS

XU Bao WU Hongye YU Yue

(Department of Physics Science and Technology, Baotou Teachers College, Baotou, Inner Mongolia 014030)

Abstract In an ideal Galton board model, the exit distribution function represents the solution to a one-dimensional diffusion equation, providing a means to verify the correctness of the derived distribution. However, when wall rebounds are incorporated, the exit distribution function obtained through the maximum entropy principle fails to satisfy this diffusion equation. To rigorously incorporate wall rebound effects, we employ a periodic folding scheme that yields an exit distribution function satisfying the one-dimensional diffusion equation. We demonstrate that the maximum entropy-based exit distribution function serves as a unimodal approximation of the periodic folding scheme. Numerical experiments using Monte Carlo method reveal that for exit distribution functions incorporating wall rebounds, a three-peak approximation derived from the periodic folding scheme exhibits superior expressive capability compared to the unimodal approximation. Furthermore, as the number of peg layers increases, the exit distribution function undergoes a gradual transition from a normal distribution

收稿日期: 2025-06-09; 修回日期: 2025-06-27

基金项目: 教育部高等学校物理类专业教学指导委员会 2023 年度教学研究项目(JZW-23-GT-11), 包头师范学院一流本科课程项目(固体物理学), 包头师范学院教改项目(BSJG24Y14)资助。

通信作者: 徐宝, xubao79@163.com; 吴鸿业, wuhongyewhy@hotmail.com。

引文格式: 徐宝, 吴鸿业, 于悦. 侧壁反弹对 Galton 板模型出口分布函数的影响[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 228-233, 239.

Cite this article: XU B, WU H Y, YU Y. The effect of wall rebounds on the exit distribution function in galton board models[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 228-233, 239. (in Chinese)

toward a uniform distribution. Using the unimodal distribution as a representative case, we present a methodology for identifying this transition point.

Key words Galton board; exit distribution function; maximum entropy principle; periodic folding scheme

Galton 板是演示正态分布的一个常见教具^[1-6],也作为一个理想化模型用于描述不同领域中的物理、化学和工程问题。例如,模拟颗粒物质的混合与偏聚^[7-9],解释流化床中液滴通过催化剂颗粒包裹的扩散过程^[10],研究动力学混沌现象^[11-15],描述 Landau-Zener 交叉点阵列中的光波传播^[16],磁畴壁在分叉纳米线中的运动行为^[17]等。当 Galton 板层数远大于宽度时,如图 1 所示,边界反弹效应不可忽略,理想 Galton 板出口分布函数明显偏离正态分布。然而已发表文献中对 Galton 板边界反弹效应的讨论较少,这是本文探讨的问题。

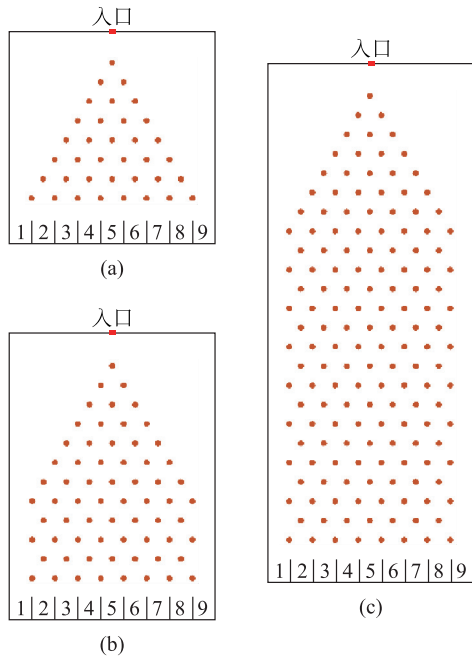


图 1 Galton 板模型;从(a)~(c)保持宽度不变,依次增大钉板层数

当 Galton 板的层数远大于其宽度时,从最大熵原理出发推导出 Galton 板出口分布函数的表达式,得到正态型单峰分布^[18]。由于最大熵方案不考虑边界反弹效应,该单峰分布实质上是将正态分布截断后重新归一化的结果,不满足一维扩散方程的解。这说明,需要严格考虑边界反弹对出口分布函数的影响。本文采用周期折叠方案实

现了这一点。为比较最大熵方案与周期折叠方案的结果,先简要回顾和分析最大熵方案的主要结论。

1 最大熵方案

从最大熵原理出发推导存在侧壁效应时理想 Galton 板出口分布函数 $\rho(x)$ 的思路是,在给对几率、期望 B 和方差 C 的约束前提下,推导满足最大熵条件的分布。定义泛函^[18]

$$I[f(x)] = - \int_{-L}^L \rho(x) \ln \rho(x) dx - \alpha \left[\int_{-L}^L \rho(x) dx - 1 \right] - \beta \left[\int_{-L}^L x \rho(x) dx - B \right] - \gamma \left[\int_{-L}^L x^2 \rho(x) dx - C \right]$$

其中, L 是 Galton 板的半宽度, α, β, γ 是 Lagrange 因子。令 $\delta I = 0$, 得到

$$\rho = e^{-1 - \alpha - \beta x - \gamma x^2}$$

将该表达式代入约束方程确定 α, β, γ 。考虑对称分布 $B=0$, 得 $\beta=0$ 。由总几率守恒得

$$\rho_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

其中, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}$ 。误差函数 $\operatorname{erf}(x)$ 定义为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

将分布函数代入方差表达式得

$$C = \sigma^2 \left[1 - \frac{L}{\sqrt{2}\sigma} \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{L^2}{2\sigma^2}}}{\operatorname{erf}\left(\frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right)} \right]$$

方括号中第二项显示了与标准正态分布的差别。与正态分布相比,方差减小了。这是合理的:落在

边界之外的粒子不计入统计,这减小了方差。当 $L \gg \sigma$ 时,第二项可以忽略, $C = \sigma^2$, 得到标准的正态分布。当 $L \ll \sigma$ 时,对第二项做幂级数展开得到

$$C = \frac{1}{3}L^2 \left[1 - \frac{2}{15} \frac{L^2}{\sigma^2} + O\left(\frac{L^4}{\sigma^4}\right) \right]$$

第一项正是均匀分布的方差 $\int_{-L}^L x^2 \frac{1}{2L} dx = \frac{1}{3}L^2$ 。

在 $L \rightarrow 0$ 的极限情形,方差等于零,这对应 δ -函数分布。这样就从最大熵原理得到了考虑边界效应后的出口分布函数。

最大熵原理得到的出口分布函数是正态型分布。对于横向宽度为 $2L$ 的情形,所得分布相当于将标准正态分布截取了区间 $[-L, +L]$ 内的部分并重新做了归一化。因此,在区间 $[-L, +L]$ 内的分布函数与正态分布完全相同,只是将落在区间外的粒子丢弃了,这与存在侧壁反弹情形明显不符。另外,注意到由于归一化因子显含 σ , 这里得到的几率分布不满足一维扩散方程。更严格的处理应该将落在区间外的粒子考虑进来。这可以通过将标准正态分布做周期折叠实现。

2 周期折叠方案

为便于表述,将 Galton 板底边作为 x 轴,中轴线与底边的交点作为原点,建立坐标系。将 Galton 板的宽度记为 $2L$,沿 x 轴做周期延拓得到无侧壁情形的 Galton 板。在第一次反弹前向右运动的粒子,穿过 $x=L$ 边界对应 Galton 板右侧壁受到第一次反弹,粒子穿过 $x=2L$ 边界对应 Galton 板左侧壁受到第二反弹,粒子穿过 $x=3L$ 边界对应 Galton 板右侧壁受到第三反弹,依次类推。存在侧壁反弹时 x 处的几率密度是下列位置几率密度的叠加

$$x_k = -2kL + (-1)^k x, \quad k < 0, \quad |x| < L$$

类似的推理过程得到第一次反弹前向左运动的粒子对 x 处的几率密度的贡献

$$x_k = -2kL + (-1)^k x, \quad k > 0, \quad |x| < L$$

上述两种情形可以统一表示为

$$x_k = -2kL + (-1)^k x, \quad k \in Z, \quad |x| < L$$

落点 x 处的几率密度 $f(x)$ 是上述 x_k 处几率密度 $f_k(x)$ 的叠加

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(x), \quad |x| < L \quad (1)$$

这相当于将无侧壁情形的几率密度做周期折叠,如图 2 所示。

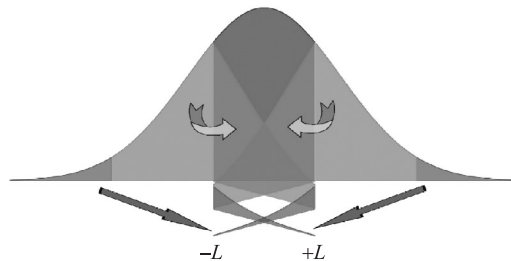


图 2 考虑侧壁反弹时,用于 Galton 板模型的周期折叠方案示意图

在 $L \gg \sigma$ 情形,粒子不会受到侧壁反弹,出口分布函数趋于正态分布

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad |x| < \infty$$

代入(1)得到存在边界反弹情形下 x 处的几率密度

$$\rho(x, \sigma^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}}, \quad |x| < L$$

其中

$$x_k^2 = [-2kL + (-1)^k x]^2 = [x - 2(-1)^k kL]^2, \quad k \in Z, \quad |x| < L$$

求和遍及所有整数,可以省去表达式中的 $(-1)^k$ (这也是周期边界条件下热扩散方程的解^[19])。

$\rho(x, \sigma^2)$ 沿 x 方向是以 $2L$ 为周期的函数

$$\rho(x, \sigma^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-2kL)^2}{2\sigma^2}}, \quad |x| < L \quad (2)$$

注意到该结论成立的前提条件是以 $x=0$ 作为热源位置。在 Galton 板情形则意味着粒子初始下落点在板面的中轴线位置。

令 $t = \sigma^2$, 注意到 $\rho(x, t)$ 满足一维扩散方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

对应“扩散系数”可以取为 $D=1/2$ 。 σ^2 对应一维扩散方程中的时间 t , 在 Galton 板情形对应粒子的下落时间。如果粒子在穿过不同层钉子的时间差别可以忽略不计,可以将粒子通过每层钉子的时间用常数 τ 表示。假定粒子开始下落的时刻为初始时刻,将 Galton 板的层数记为 N , 那么 $t = N\tau$, 由此得到方差 σ^2 与 Galton 板层数 N 之间的

关系

$$\sigma^2 = N\tau \quad (3)$$

3 比较最大熵方案与周期折叠方案

为了与最大熵方案得到的结果做比较,分析周期折叠方案得到的几率密度。将几率密度(2)改写为

$$\rho(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} Q\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}, \frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (4)$$

其中

$$Q(b, a) = e^{b^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(2ka+b)^2}, \quad |x| < L$$

当 $\frac{L}{\sqrt{2}\sigma} \rightarrow \infty$ 时,可以写出 $x \neq 0$ 情形的渐进表达式

$$Q\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}, \frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right) \approx 1 + e^{-\frac{4L}{\sqrt{2}\sigma}\left(\frac{L-|x|}{\sqrt{2}\sigma}\right)} + e^{-\frac{4L}{\sqrt{2}\sigma}\left(\frac{L+|x|}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$$

右手边三项分别对应以 $x=0, \pm 2L$ 为中心的正态型分布。当后两项可以忽略时,得到最大熵方案的结果。从该表达式看出,对于存在边界反弹的 Galton 板出口分布函数,三峰分布将具有更好的表达能力。

当 $\frac{L}{\sqrt{2}\sigma} \rightarrow 0$ 时,可以将对 k 的求和用积分近似。令 $a = \frac{L}{\sqrt{2}\sigma}, b = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$, 既然 $[2(k+1)a+b] - [2ka+b] = 2a$ 是小量, $Q(b, a)$ 可以改写为

$$Q(b, a) \approx \frac{e^{b^2}}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi} e^{b^2}}{2a}$$

代入 a 和 b 的表达式得

$$Q\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}, \frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{2L}$$

代入几率密度表达式(4)得

$$\rho(x, \sigma^2) = \frac{1}{2L}$$

这正是均匀分布情形的几率密度。

4 简化周期折叠方案的结果

周期折叠方案得到的几率密度表达式过于复杂,我们希望简化该表达式,方便数据处理。现在看一般情形,保留方程(4)的前 $(2n+1)$ 项

$$\rho_n(x, \sigma^2) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} Q_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}, \frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

其中

$$Q_n(a, b) = \frac{1}{\operatorname{erf}[(2n+1)b]} \cdot \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cosh(4kab) e^{-4k^2 b^2}\right]$$

注意到 $\rho_n(x, \sigma^2)$ 是偶函数,期望值 $\langle x \rangle = 0$, 方差表示为

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 T_n\left(\frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (5)$$

其中

$$T_n(a) = (1 + 8n^2 a^2) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(2n+1)^2 a^2} (2n-1)a \frac{\operatorname{erf}[(2n+1)a]}{\operatorname{erf}[(2n+1)a]} - \sum_{k=1}^n \left[8(2k-1)a^2 \frac{\operatorname{erf}[(2k-1)a]}{\operatorname{erf}[(2n+1)a]} + 4a \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(2k-1)^2 a^2}}{\operatorname{erf}[(2n+1)a]} \right]$$

以三峰分布为例,几率密度表示为

$$\rho_1(x, \sigma^2) = \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{3L}{\sqrt{2}\sigma}\right)} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[1 + 2e^{-\frac{2L^2}{\sigma^2}} \cosh\left(\frac{2xL}{\sigma^2}\right)\right]$$

5 数值实验

我们将数值实验生成的 Galton 板出口分布作为统计数据,比较单峰分布 $\rho_0(x)$ 与三峰分布 $\rho_1(x)$ 对所得数据的表达性能。

统计数据采用 Monte Carlo 方法得到:(1)设定 Galton 钉板层数和出口槽数;(2)将每个槽中的小球个数置零;(3)每次释放一个小球;(4)小球通过钉板诸层碰到钉子时,生成 $[0, 1]$ 区间上的均匀随机数 x , 当 $x < 0.5$ 时,小球左移一格,否则右移一格;(5)检查小球是否碰到左侧壁,若是则右移 2 格;检查小球是否碰到右侧壁,若是则左移 2 格;(6)小球穿过钉板所有层之后,其坐标对应落入的槽,将该槽中粒子数加 1;(7)所有小球都通

过钉板后,计算小球出现在每个槽中的几率,并作直方图,见图 3。

在 Galton 板宽度给定的条件下,既然出口分布函数的方差 $\langle x^2 \rangle$ 与单峰和三峰分布中的待定参数 σ 之间满足方程(5),可以对统计数据计算方差 $\langle x^2 \rangle$ 后求得 σ 。将该值代入就得到了对应的单峰和三峰分布。由于这里只计入了等间距槽填入粒子的几率,所以需要重新归一化。注意到这里给出的分布曲线是基于取近似后的解析表达式。使用更复杂的表达式可以表达得更好,但不是本文关注的问题。

结果表明,当层数小于宽度时,由于边界反弹效应可以忽略,单峰和三峰分布具有几乎相同的表达能力,如图 3 所示。随着层数增加,尤其边界反弹对出口函数起显著作用后,三峰分布对实验数据的表达能力优于单峰分布。这体现在三峰分布能更好地表达边界和中心附近的实验数据对正态分布的偏离。单峰分布本质上是截取正态分布在给定区间中的部分重新归一化得到的,因此,当存在边界反弹时,显著偏离实验结果。三峰分布部分考虑了边界反弹的影响,所以能更好地表达模拟实验的结果。当层数远大于宽度,出口分布

函数接近均匀分布时,三峰分布与单峰分布对统计数据的表达能力都变糟,显示了近似表达式的局限性。要得到更佳的数据表达能力,需要考虑更高级的近似。这不是本文关注的问题。

6 单峰分布函数的转变点

为了得到从正态分布到均匀分布的转变,需要考虑具体的分布函数形式。从正态型分布到均匀性分布之间的过渡可以用一个特征量区分。这里以单峰分布为例,给出一种确定转变点的方法。对于单峰分布,方差可以重新表示为

$$C = \sigma^2 g\left(\frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

其中

$$g(\xi) = 1 - \frac{\text{erf}'(\xi)}{\text{erf}(\xi)} x = 1 - \frac{\frac{2\xi}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}}{\text{erf}(\xi)}$$

我们来考查函数 $g(\xi)$ 的性质。利用第二项的幂级数展开式容易看出当 x 趋近 0 时

$$g(\xi) = \frac{2}{3}\xi^2 + O(\xi^4)$$

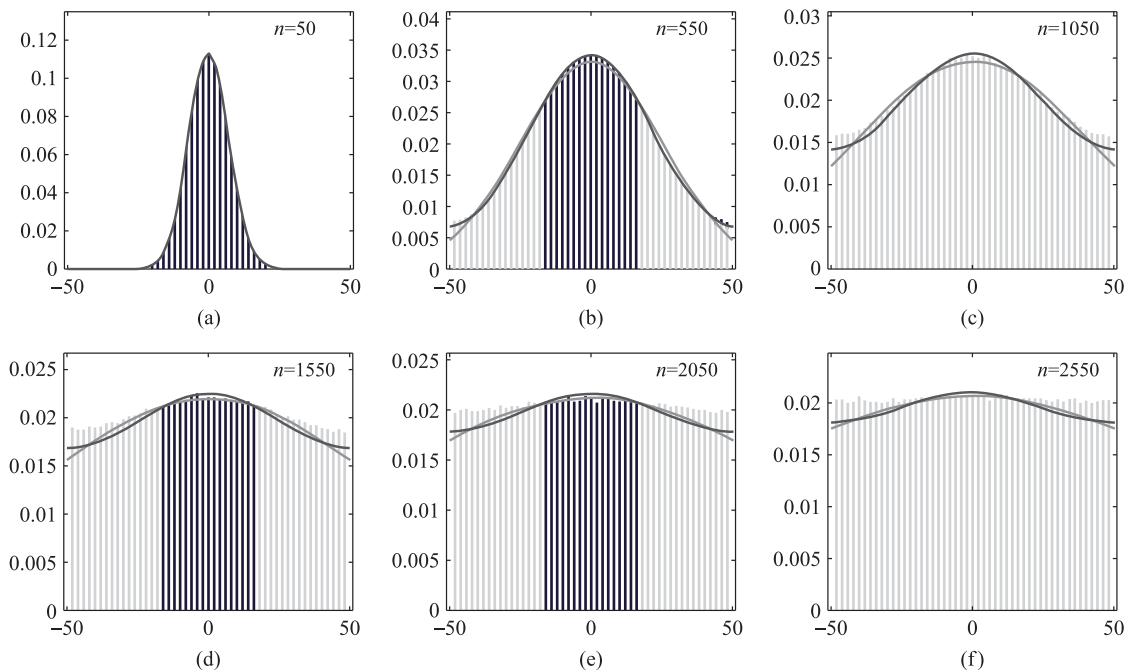


图 3 固定 Galton 板宽度为 100,层数 N 从 50 开始以 500 为间隔增大;采用 Monte Carlo 方法获得一百万个粒子通过 Galton 板后的统计数据,直方图展示粒子出现在各槽中的概率;浅线(红线)展示单峰分布(最大熵原理)和深线(蓝线)展示三峰分布(周期折叠方案的一级近似)给出的出口分布函数;当 Galton 层数小于其半宽度时,单峰和三峰分布都能很好地表达实验结果;随着层数增大,边界反弹作用增强,三峰分布比单峰分布具有更佳的数据表达能力;当层数远大于宽度时,单峰和三峰分布的表达能力都变弱

这对应均匀分布。另外,注意到这是一个关于 ξ 的偶函数,并且

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(\xi) = 1$$

这对应标准正态分布。

注意到 $g(\xi)$ 从 0 增大到 1,斜率都是正的,如图 4 所示,但在两个极值点处的斜率极限值都等于零。因此,在过渡区斜率有极大值。将斜率极大值对应的 x 值,也就是二阶导数的零点

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} = -\frac{2}{\xi^2}(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = 0$$

作为转变点,这就是我们对转变点的定义。其中

$$s_1 = 0, \quad s_{2,3} = \frac{1}{2}(1 - 3\xi^2) \pm \sqrt{1 + 6\xi^2 + \xi^4}$$

前面已知 $s(\xi) = 1 - g(\xi) \in (0, 1)$, 因此 s_1 舍去。分析 s_2 和 s_3 的取值范围,发现只有 s_2 满足要求。因此上面的一元三次方程简化为

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi e^{-\xi^2}}{\operatorname{erf}(\xi)} = \frac{1}{2}(1 - 3\xi^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 6\xi^2 + \xi^4}$$

我们仍然无法得到方程的解析解,只能得到数值解

$$\xi_0 = 0.8907$$

代入 $\xi_0 = \frac{L}{\sqrt{2}\sigma}$, 并利用 $\sigma \approx \sqrt{N}$ (N 表示 Galton 板的层数)得

$$N_c = 0.6302L^2 \approx \frac{16}{25}L^2$$

在给定层数 N 的条件下

$$L_c = 1.2597 \sqrt{N} \approx \frac{5}{4} \sqrt{N}$$

注意到 N_c 与 Galton 板的宽度平方成比例关系。

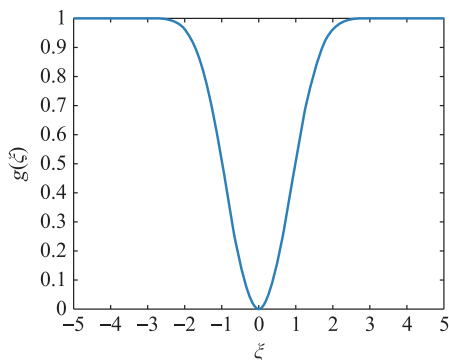


图 4 函数 $g(\xi)$ 示意图

7 结语

通过比较存在侧壁反弹时,推导理想 Galton

板出口分布函数的最大熵方案和周期折叠方案,得到以下结论:在周期折叠方案给出的分布函数既是理想反弹边界情形的解也是周期边界条件的解,该分布函数满足一维扩散方程。最大熵方案得到的结果不是一维扩散方程的解,只是周期折叠方案给出结果的单峰近似。对 Monte Carlo 生成的 Galton 板出口函数,与单峰近似相比,周期折叠方案的三峰分布近似具有更优的表达能力。以单峰分布为例,给出一种定义从正态分布到均匀分布转变的转变点的方法。

参 考 文 献

- [1] KUNERT J, MONTAG A, POHLMANN S. The quincunx: history and mathematics [J]. Statistical Papers, 2001, 42: 143-169.
- [2] 李天成,陈言,张新超,等.一种双向伽尔顿板[P].中国:CN 219759000 U, 2023-09-26.
LI T C, CHEN Y, ZHANG X C, et al. A bidirectional Galton board[P]. China:CN 219759000 U, 2023-09-26. (in Chinese)
- [3] 彭芳麟.伽尔顿板实验的计算机模拟[J].大学物理,2005, 24(1): 45-49.
PENG F L. Computational simulation of Galton's experiment [J]. College Physics, 2005, 24(1): 45-49. (in Chinese)
- [4] 谢名春. Galton 板实验中的小球数分布函数[J].四川师范大学学报(自然科学版), 1996, 19(3): 93-97.
XIE M C. The distributional function of numbers of the little globelet in narrow troughs in Galton Board experiment [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 1996, 19(3): 93-97. (in Chinese)
- [5] 郭竞达,史旭光.蒙特卡罗模拟在物理与生物学中的应用[J].物理与工程,2021, 31(4): 21-26.
GUO J D, SHI X G. Application of Monte Carlo simulation in physics and Biology[J]. 2021, 31(4): 21-26. (in Chinese)
- [6] ZHANG Y, WANG Q. Simulation and analysis of two toy models[DB/OL]. 2023; arXiv:2310.02646.
- [7] BRUNO L, IPPOLITO I, CALVO A. Granular mixing in a Galton board[J]. Granular Matter, 2001, 3: 83-86.
- [8] BENITO J G, IPPOLITO I, VIDALES A M. Improving mixture of grains by using bi-dimensional Galton boards[J]. Physica A, 2008, 387: 5371-5380.
- [9] BRUNO L, CALVO A, IPPOLITO I. Dispersive flow of disks through a two-dimensional Galton board[J]. European Physical Journal E, 2003, 11: 131-140.
- [10] 王碧玉,黄智贤,郑辉东,等.基于 Galton 板的固定床内示踪剂浓度分布[J].化工学报,2013, 64(12): 4283-4289.
WANG B Y, HUANG Z X, ZHENG H D, et al. Tracer concentration distribution in fixed bed based on Galton board[J]. Journal of Chemical Industry and Engineering, 2013, 64(12): 4283-4289. (in Chinese)

相较于直接从题图 3 中“读”出答案(C)选项的功利性解法,本文这里所介绍的这两种解法都是完整而科学的。

功的正交叠加法则在任何正交坐标系中都能成立,只是通常很少用到。而本文中所谓的分运动的动能定理式,则只能在相互正交并且方向恒定的运动维度上,比如在直角坐标系的三个轴线方向,以及在柱坐标系的 z 轴方向和与之所垂直的 xOy 平面内适用,并且在有约束存在的情况下,其使用也未必方便。尽管如此,这些知识仍可以为大学力学教材提供一些有益的补充,能够起到拓展思维的作用,能够较为直观地解决直角坐标系和柱坐标系中的一些质点尤其自由质点的运动问题^[2-6];我们不能因为其使用范围看似不够广泛,或者命名存在争议,从而忽视它们业已存在的价值;否则,我们可能会因此而丧失掉对于一些基础问题的基本判断能力。新出版的《力学》教材^[1]中也特别指出:“……(在直角坐标系中)正交分解时,动能定理也可分解,即动能定理等于三个正交方向上的一维运动的动能定理之和……”这大概便也是考虑到这些分运动的动能定理式的实用价值吧。

致谢:本文在完善的过程中得到了复旦大学蒋最敏教授的热忱指导,在此鸣谢。

参 考 文 献

[1] 郑永令,贾起民,方小敏. 力学[M]. 蒋最敏,改. 北京:高等教

育出版社,2024:18.

ZHENG Y L, JIA Q M, FANG X M. Mechanics[M]. revised by JIANG Z M. Beijing: High Education Press, 2024: 18. (in Chinese)

[2] 孙永茂. 动能定理是否有单方向的“分解式”[J]. 物理通报, 2021, 40(12): 151-155.

SUN Y M. Does the kinetic energy theorem have a one-way “decomposition equation” [J]. Physics Bulletin, 2021, 40(12): 151-155. (in Chinese)

[3] 杨习志,杨蒲英. 动能定理有分量形式吗? [J]. 物理教学, 2016, 38(5): 16-18.

YANG X Z, YANG P Y. Does the kinetic energy theorem have a component form? [J]. Physics Teaching, 2016, 38(5): 16-18. (in Chinese)

[4] 夏季云. 动能定理的“正交分解”[J]. 中学物理, 2009, 27(13): 47-48.

XIA J Y. “Orthogonal decomposition” of the kinetic energy theorem[J]. Middle School Physics, 2009, 27(13): 47-48. (in Chinese)

[5] 王德全. 动能定理有分量形式吗? [J]. 中学物理教学参考, 2002, 31(6): 19.

WANG D Q. Does the kinetic energy theorem have a component form? [J]. Teaching Reference of Middle School Physics, 2002, 31(6): 19. (in Chinese)

[6] 杨震云. 存在动能定理的“分量形式”吗? [J]. 物理教师, 2002, 23(5): 39-40.

YANG Z Y. Is there a “component form” of the kinetic energy theorem? [J]. Physics Teacher, 2002, 23(5): 39-40. (in Chinese)

(上接第 233 页)

[11] CHEPELIANSKII A D, SHEPELYANSKY D L. Dynamical turbulent flow on the Galton board with friction[J]. Physical Review Letters, 2001, 87(3): 034101.

[12] KOZLOV V V, MITROFANOVA Y M. Galton board [J]. Regular and Chaotic Dynamics, 2003, 8(4): 431-439.

[13] ROSATO A D, BLACKMORE D, BUCKLEY L, et al. Experimental, simulation and nonlinear dynamics of Galton’s board[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2004, 5(4): 289-312.

[14] DAUD A A M. An improved mathematical model of Galton board with velocity dependent restitution[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2017, 12(6): 060901.

[15] DAUD A A M. Mathematical modelling and symbolic dynamics analysis of three new Galton board models[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(10): 3476-3491.

[16] BOUWMEESTER D, MARZOLI I, KARMAN G P, et al. Optical Galton board[J]. Physical Review A, 1999, 61: 013410.

[17] SANZ-HERNÁNDEZ D, MASSOURAS M, REYREN N, et al. A nano-magnetic Galton board[DB/OL]. 2020, arxiv:2010.10389.

[18] 晋宏营,刘美云. 伽尔顿板实验小球分布的研究[J]. 物理与工程, 2012, 22(6): 31-34.

JIN H Y, LIU M Y. Study on balls distribution in Galton board experiment [J]. Physics and Engineering, 2012, 22(6): 31-34. (in Chinese)

[19] 柯朗·R, 希尔伯特·D. 数学物理方法(卷 II)[M]. 熊振翔, 杨应辰, 译. 北京: 科学出版社, 1977: 159-162.

COURANT R, HILBERT D. Methods of mathematical physics (Volume II)[M]. Translated by XIONG Z X, YANG Y C. Beijing: Science Press, 1977: 159-162. (in Chinese)