

大中衔接

巧设对照例题,解决大中衔接课程中的难点 ——从一道例题的两种“解法”,看哈密顿量含时 情形下的波函数演化

王树超 张 安 张少鹤 石晓兰

(北京市十一学校,北京 100039)

摘 要 大中衔接课程不仅将中学物理与大学物理内容衔接起来,在某些环节还需有一定深度。有些知识点,对大学生已属难点,对数理基础更弱、知识储备更少的中学生而言,其难尤甚。这时,需要教师巧妙的设计例题,通过合适的引导、讲解、对比、归纳,帮助学生化解难点。本文以哈密顿量含时情形下波函数的演化为例,通过巧妙的例题设计,将错误解法与正确解法相对照,使学生深入领会引入编时算符的必要性,并自然引入了编时算符。最后给出了时间演化算符的归纳总结。

关键词 大中衔接;含时哈密顿量;薛定谔方程;编时算符

SETTING UP COMPARATIVE EXAMPLES TO ADDRESS DIFFICULTIES IN THE TRANSITION FROM HIGH SCHOOL TO UNIVERSITY COURSES: INSIGHTS FROM TWO “SOLUTIONS” TO A SAMPLE PROBLEM ON WAVE FUNCTION EVOLUTION IN TIME-DEPENDENT HAMILTONIAN SYSTEMS

WANG Shuchao ZHANG An ZHANG Shaohe SHI Xiaolan

(Beijing National Day School, Beijing 100039)

Abstract The transition courses between high school and university not only bridge the gap between high school and university physics content, but also need to have a certain depth in some aspects. Some knowledge points are already difficult for college students, and for middle school students with weaker mathematical and physical foundations and less knowledge reserve, the difficulty is even greater. At this time, teachers need to design examples skillfully and help students overcome difficulties through appropriate guidance, explanation, comparison, and induction. This paper takes the evolution of wave functions in time-dependent Hamiltonian systems as an example. By skillfully designing examples and comparing incorrect and correct solutions, students can deeply understand the necessity of introducing the time-order-

收稿日期: 2025-03-05

基金项目: 北京市教育科学“十四五”规划 2024 年度重点课题“基于物理学科大中衔接课程的优秀中学生培养的行动研究”(课题批准号: CADA24053)。

通信作者: 王树超, wangsc10@tsinghua.org.cn。

引文格式: 王树超, 张安, 张少鹤, 等. 巧设对照例题, 解决大中衔接课程中的难点——从一道例题的两种“解法”, 看哈密顿量含时情形下的波函数演化[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 215-219, 227.

Cite this article: WANG S C, ZHANG A, ZHANG S H, et al. Setting up comparative examples to address difficulties in the transition from high school to university courses: Insights from two “Solutions” to a sample problem on wave function evolution in time-dependent Hamiltonian systems[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 215-219, 227. (in Chinese)

ring operator and naturally introduce the time-ordering operator. Finally, a summary of the time-evolution operator is provided.

Key words transition from high school to university; time-dependent Hamiltonian; Schrödinger equation; time-ordering operator

党的二十大报告指出:教育、科技、人才是全面建设社会主义现代化国家的基础性、战略性支撑。2021年,国务院印发《全民科学素质行动规划纲要(2021—2035年)》,提出在“十四五”时期实施科技创新后备人才培养计划,探索从基础教育到高等教育的科技创新后备人才贯通式培养模式,完善拔尖创新人才培养体系,建立校内外科学教育资源有效衔接机制。

在各学段的衔接中,高中与大学的衔接是一个重要课题,尤其是高中物理与大学物理的衔接。物理学科是自然科学的基础学科,在现代科学技术的发展中发挥着重要作用,也是大量理工类专业学生的基础。已经有不少教育工作者探索物理课程的大中衔接,尤其以科普等内容居多^[1,2],而真正在量子力学等课程的理论设计、教学案例和实践经验较少。

量子力学是整个物理学大厦的基石,学好量子力学有助于拓宽视野、增加思维深度,追踪量子计算与量子通信等前沿科学。在合适的课程构建、适当的教学引导之下,优秀的中学生系统学习量子力学完全是可能的,并且能够达到一定的深度。

在众多教学引导策略中,通过巧妙的例题设计,用不同的解法引导学生多角度思考,甚至用错误的“解法”引导学生反思,是克服难点的有效方法。在哈密顿量含时情形下,求解波函数的演化需要引入编时算符,这对于低年级本科生来说尚且有一定的难度,对中学生来说,直接引入编时算符则显得更晦涩生硬。本文将以此难点为例,给出一个通过例题设计来引导学生突破难点的教学案例。

1 通过例题对照和“解法”辨析,看哈密顿量含时情形下波函数的演化

1.1 难点定位

已知初态 $|\psi_0\rangle$ 和哈密顿量 $\hat{H}$,求任意 t 时刻系统的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 是量子力学的核心问题之一,其实

质是求解薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\hat{H}|\psi(t)\rangle$ 。当哈密顿量不含时间 t 时,计算 $|\psi(t)\rangle$ 的步骤如下:

第一步:求解哈密顿量 $\hat{H}$ 的本征值 $\{E_i\}$ 和对应的本征态 $\{|i\rangle\}$;

第二步:将初态 $|\psi_0\rangle$ 按 $\{|i\rangle\}$ 展开,得到展开系数 $c_i=\langle i|\psi_0\rangle$;

第三步:得到任意时刻态矢 $|\psi(t)\rangle=\sum_i c_i e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}|i\rangle$ 。

有著作将以上步骤称为“三步法”^[3]。

量子态的演化还可以用时间演化算符描述为:

$$|\psi(t)\rangle=\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$$

其中时间演化算符 $\hat{U}(t)=e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ 。

“三步法”和时间演化算符的方法均是求 $|\psi(t)\rangle$ 的常用方法。在哈密顿量不含 t 时,结合表象变换,这两种方法可以解决许多典型问题。比如下面的例题1:

例题1 电子在外磁场 $\mathbf{B}$ 中,其哈密顿量

$$\hat{H}=-\frac{1}{2}\hbar\omega|z_-\rangle\langle z_-|+\frac{1}{2}\hbar\omega|z_+\rangle\langle z_+|=\frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z$$

其中 $|z_{\pm}\rangle$ 是 $\hat{S}_z$ 本征值为 $\pm\frac{\hbar}{2}$ 对应的本征态。若 $t=0$ 时电子处于 $|\psi_0\rangle=|x_+\rangle$, $|x_+\rangle$ 是 $\hat{S}_x$ 本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 的态。求任意 t 时刻的波函数 $|\psi(t)\rangle$ 。

我们可以按照“三步法”:首先求出 $\hat{H}$ 的本征值 $E_1=-\frac{1}{2}\hbar\omega$, $E_2=\frac{1}{2}\hbar\omega$;再将初态展开为 $|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle+|z_-\rangle)$,最后得到 $|\psi(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t}|z_+\rangle+e^{i\omega t}|z_-\rangle)$ 。

也可以用时间演化算符法: $\hat{H}$ 表象即 $\hat{\sigma}_z$ 表象,在该表象中, $\hat{H}$ 的矩阵表示为 $H=$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hbar\omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar\omega \end{pmatrix},$$

则 $\hat{U}(t)$ 的矩阵表示 $U(t) = e^{-iHt/\hbar} =$

$$\begin{pmatrix} e^{-i(\frac{1}{2}\hbar\omega)t/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{-i(-\frac{1}{2}\hbar\omega)t/\hbar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}. \text{ 有}$$

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} \\ e^{i\omega t/2} \end{pmatrix},$$

$$\text{即 } |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} |z_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t/2} |z_-\rangle.$$

注意到 $|\psi(t)\rangle$ 还可以写作 $|\psi(t)\rangle = \cos \frac{\omega t}{2} |x_+\rangle - \sin \frac{\omega t}{2} |x_-\rangle$, 可知每当 $\sin \frac{\omega t}{2} = 0$ 时就回到态 $|x_+\rangle$, 即 $t = \frac{2k\pi}{\omega} (k=1, 2, \dots)$ 时回到初态 $|x_+\rangle$, 演化周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

进一步, 若初态为任意初态 $|n(\theta, \varphi)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |z_+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |z_-\rangle$, 则 $|\psi(t)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\omega t)/2} |z_+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\omega t)/2} |z_-\rangle = |n(\theta, \varphi+\omega t)\rangle$, 电子的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 保持与 $|z_+\rangle$ 的夹角不变, 到 x 轴的夹角 φ 以周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 变化, 这就是电子在外磁场中的拉莫尔进动。教师可以在布洛赫球中进一步通过可视化来展现这种物理现象, 如图 1 所示。

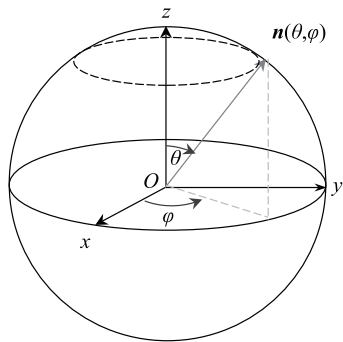


图 1

当哈密顿量 $\hat{H}$ 含 t 时, 能否用同样的办法处

理呢? 我们来看下面的例题。

例题 2 电子在周期性变化的磁场中运动, $\mathbf{B}(t) = B_0 \cos \omega t \mathbf{i} + B_0 \sin \omega t \mathbf{j}$, 不考虑空间运动, 此时其哈密顿量

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\gamma \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B} = \mu_B \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} \\ &= \mu_B B_0 (\hat{\sigma}_x \cos \omega t + \hat{\sigma}_y \sin \omega t) \end{aligned}$$

在 $\hat{H}$ 表象下的矩阵

$$H = \frac{1}{2} \hbar \Omega_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}.$$

其中, $\Omega_0 = \frac{2\mu_B B_0}{\hbar}$ 。已知 $t=0$ 时电子处于 $s_z = \frac{\hbar}{2}$ 的态 $|z_+\rangle$ 上, 求任意时刻的波函数 $|\psi(t)\rangle$ 。

1.2 两种解法

我们按照处理例题 1 的方式给出“解法”1。

“解法”1: $H = \frac{1}{2} \hbar \Omega_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值为 $\epsilon_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_0$, 对应的本征态为 $|\epsilon_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}$, $|\epsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ -1 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{cases} |z_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\epsilon_+\rangle + e^{i\omega t} |\epsilon_-\rangle) \\ |z_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega t} |\epsilon_+\rangle - |\epsilon_-\rangle) \end{cases}$$

由 $\hat{H}$ 表象到 $\hat{S}_z$ 表象的过渡矩阵 $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$

$\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & -1 \end{pmatrix}$, 在 $\hat{H}$ 表象下, 时间演化算符的矩阵表

示为 $U_H(t) = e^{-iHt/\hbar} = \begin{pmatrix} e^{-i\Omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega_0 t/2} \end{pmatrix}$ 。则通过表象变换可得时间演化算符在 $\hat{S}_z$ 表象下的矩阵表示

$$\begin{aligned} U_{S_z}(t) &= S^\dagger U_H(t) S \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega_0 t}{2} & -ie^{-i\omega t} \sin \frac{\Omega_0 t}{2} \\ -ie^{i\omega t} \sin \frac{\Omega_0 t}{2} & \cos \frac{\Omega_0 t}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U_{S_z}(t) |\psi(0)\rangle \\ &= \cos \frac{\Omega_0 t}{2} |z_+\rangle - ie^{i\omega t} \sin \frac{\Omega_0 t}{2} |z_-\rangle \quad (1) \end{aligned}$$

我们基于薛定谔方程的迭代求解给出“解法”2,并将二者予以对比。

“解法”2: 设 $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$, 代入含时薛定

谔方程得

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \Omega_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -\frac{i\Omega_0}{2} e^{-i\omega t} b(t) \\ \frac{db(t)}{dt} = -\frac{i\Omega_0}{2} e^{i\omega t} a(t) \end{cases} \quad (2)$$

两方程迭代可得

$$\frac{d^2 b(t)}{dt^2} - i\omega \frac{db(t)}{dt} + \frac{\Omega_0^2}{4} b(t) = 0$$

令 $b(t) = A e^{i\lambda t}$ 代入上式, 得 $\lambda^2 - \omega\lambda - \frac{\Omega_0^2}{4} = 0$, 解

得 $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega \pm \sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2})$ 。则

$$\begin{aligned} b(t) &= A e^{i\lambda_+ t} + B e^{i\lambda_- t} \\ &= e^{i\omega t/2} (A e^{i\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t/2} + B e^{-i\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t/2}) \\ &= e^{i\omega t/2} \left(C \sin \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2} + D \cos \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2} \right). \end{aligned}$$

根据初始条件 $b(0) = 0$ 得 $D = 0$, 于是

$$b(t) = C e^{i\omega t/2} \sin \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2}.$$

将其代入式(2)得

$$a(t) = \frac{C e^{-i\omega t/2}}{\Omega_0}.$$

$$\left(i\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} \cos \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2} - \omega \sin \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2} \right),$$

结合初始条件 $a(0) = 1$ 得 $C = -\frac{i\Omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2}}$, 因此

$$\begin{cases} a(t) = e^{-i\omega t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2} + \frac{i\omega}{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2}} \sin \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2} \right) \\ b(t) = -\frac{i\Omega_0 e^{i\omega t/2}}{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2}} \sin \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2} t}{2} \end{cases}$$

这与“解法”1 给出的结果式(1)不同, 到底哪种“解法”是正确的呢?

“解法”2 是正确的, “解法”1 中的时间演化算符的计算方式不对。在哈密顿量含 t 时, 时间演化算符不能简单写成 $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ 的形式。此时, 有必要引入编时算符。

1.3 编时算符的引入

“解法”2 用迭代方法正确地求出了在特定哈密顿量情况下薛定谔方程的解, 我们依照此思路探索在一般的含时哈密顿量情形下, 对薛定谔方程的迭代能给出何样的结果。

对薛定谔方程 $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$ 两边对时间积分得

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau) |\psi(\tau)\rangle d\tau$$

该方程的解依赖于自身, 将其反复迭代得

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 |\psi(0)\rangle +$$

$$\frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \hat{H}(\tau_2) d\tau_2 |\psi(0)\rangle +$$

$$\frac{1}{(i\hbar)^3} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \hat{H}(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \hat{H}(\tau_3) d\tau_3 |\psi(0)\rangle + \dots$$

则时间演化算符可表示为

$$\hat{U}(t) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 +$$

$$\frac{1}{(i\hbar)^2} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \hat{H}(\tau_2) d\tau_2 +$$

$$\frac{1}{(i\hbar)^3} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \hat{H}(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \hat{H}(\tau_3) d\tau_3 + \dots \quad (3)$$

用级数求和符号写就是

$$\hat{U}(t) = 1 +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \hat{H}(\tau_1) \hat{H}(\tau_2) \dots$$

$$\hat{H}(\tau_n)$$

该式称戴森级数, 它以 Freeman Dyson (1923—2020) 的名字命名。

若 $\hat{H}$ 不显含时间 t , 则式(3)可简化为

$$\hat{U}(t) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \hat{H}t + \frac{1}{2!} \frac{1}{(i\hbar)^2} \hat{H}^2 t^2 +$$

$$\frac{1}{3!} \frac{1}{(i\hbar)^3} \hat{H}^3 t^3 + \dots = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H}t\right)$$

$$= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (4)$$

这就是我们之前所熟悉的情况。推导过程中用到

了常用积分式 $\int_0^t \tau^n d\tau = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ 。

若 $\hat{H}$ 含 t , 则 $\hat{H}$ 不能提到积分号外面, 式(3)不能简化为式(4), 且高阶项的积分上限依赖于前一个积分变量, 整个积分式无法拆分为若干个积分结果的乘积。将式(3)的积分上限都提高到 t , 变为

$$\hat{U}(t) \rightarrow 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 + \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \right]^2 + \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \right]^3 + \dots \quad (5)$$

但式(5)右侧与式(3)并不相等, 如二阶项中的积分 $\int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \hat{H}(\tau_2) d\tau_2$ 本来要求 $\tau_1 > \tau_2$, 而式(5)中并没有做这个要求。为了满足该要求, 引入编时算符 $\hat{T}$ 。设有 N 个含时算符的乘积 $\hat{A}_1(\tau_1)\hat{A}_2(\tau_2)\dots\hat{A}_N(\tau_N)$, 将 $\hat{T}$ 作用上去的效果是, 将这 N 个算符自左向右按照时间从大到小重排。式(3)中的 n 阶项

$$\frac{1}{(i\hbar)^n} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \hat{H}(\tau_1) \hat{H}(\tau_2) \dots \hat{H}(\tau_n)$$

包含了 n 个含时算符的乘积, 由于每个变量 τ_i 都取遍区间 $(0, t)$, τ_i 从大到小的排列方式共 $n!$ 种, 且每种排列得到的积分结果相同(只是换了一下积分符号), 于是

$$\hat{T} \left[\int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \right]^n = n! \int_0^t \hat{H}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \hat{H}(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \hat{H}(\tau_n) d\tau_n$$

利用上式可将式(3)表示为

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \hat{T} \left\{ 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau) d\tau \right]^2 + \dots \right\} \\ &= \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)也存在可以简化的情况, 当不同时间的哈密顿量对易时,

$$\hat{U}(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau) d\tau \right].$$

1.4 归纳总结: 对于时间演化算符的处理方法

根据以上讨论, 可以简明扼要的对时间演化算符的处理方式给出一个总结归纳:

(1) 若哈密顿量不含 t , 则 $\hat{U}(t) = e^{-ift/\hbar}$, 如电子在稳定磁场中的情形;

(2) 若哈密顿量含 t , 但是不同时间的哈密顿量对易, 则 $\hat{U}(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau) d\tau \right]$, 如电子在方向不变, 大小变换的磁场中的情形;

(3) 最一般的情况下, 哈密顿量含 t , 且不同 t 的哈密顿量不对易, 则 $\hat{U}(t)$ 只能表示为 $\hat{U}(t) = \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(\tau) d\tau \right]$, 如电子在方向变化的磁场中运动的情形, 其哈密顿量 $\hat{H} = -\gamma \hat{S} \cdot \mathbf{B}$, 若 $t = \tau_1$ 时刻, 磁场沿 x 方向, $t = \tau_2$ 时刻, 磁场沿 y 方向, 因 $\hat{S}_x$ 和 $\hat{S}_y$ 不对易, 哈密顿量 $\hat{H}(\tau_1)$ 和 $\hat{H}(\tau_2)$ 就不对易。式(6)主要具有形式的意义, 真正计算时, 应该迭代求解或按照式(3)逐层计算。

1.5 对例题2的进一步讨论

在例题2中, 我们可以发现电子的状态呈现出周期性的变化。 $|a(t)|^2$ 是其处于 $|z_+\rangle$ 的概率, $|b(t)|^2$ 是其处于 $|z_-\rangle$ 的概率。习惯上人们经常用函数 $W(t) = |a(t)|^2 - |b(t)|^2$ 来表征系统在不同态上布居的周期性变化。当 $W(t) = 1$ 时, 表示电子处于 $|z_+\rangle$, 当 $W(t) = -1$ 时, 表示电子处于 $|z_-\rangle$ 。在例题2中, 易得

$$W(t) = 1 - \frac{2\Omega_0^2}{\omega^2 + \Omega_0^2} \sin^2 \frac{\sqrt{\omega^2 + \Omega_0^2}}{2} t$$

$W(t)$ 表明体系呈现出了典型的拉比振荡特征。为了更好的展示这种特征, 我们取 $\omega = \Omega_0$, 则

$$W(t) = \cos^2 \frac{\sqrt{2}\Omega_0}{2} t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}\Omega_0 t),$$

其图像如图2(横坐标的单位为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{\Omega_0}$)。

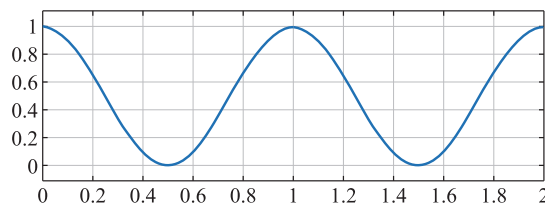


图2

拉比振荡是系统存在量子相干的兆示, 也是核磁共振、量子计算等现代技术的核心模型, 能以某种适当方式激发拉比振荡是一个系统存在二能级结构的标志。对于存在拉比振荡的二能级体系, 可以通过控制振荡时间来构建一个量子比特以编码信息, 这在量子通信和量子计算中有广泛的应用。

(下转第227页)

- 培养学生综合能力的作用[J]. 大学物理, 2012, 31(5): 1-4.
- LI C Y, WANG H T, SONG F, et al. China undergraduate physics tournament and its enhancement of students' comprehensive ability[J]. University Physics, 2012, 31(5): 1-4. (in Chinese)
- [5] 董佳豪, 王瑾, 李川勇, 等. 基于知识图谱的物理学术竞赛发展分析[J]. 物理与工程, 2024, 34(2): 38-45, 72.
- DONG J H, WANG J, LI C Y, et al. Development analysis of physics academic competition based on mapping knowledge[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(2): 38-45. (in Chinese)
- [6] 俞郭遥, 鲍成章, 朱国强. 费马原理解决两过程匀速运动极值问题[J]. 物理通报, 2018, (S2): 70-72.
- YU G Y, BAO C Z, ZHU G Q. Fermat's principle solves the extremum problem of uniform motion in two processes [J]. Physics Bulletin, 2018, (S2): 70-72. (in Chinese)
- [7] 陈易楠, 许易成, 郑琦. 地磁场水平分量的测量[J]. 物理通报, 2019, (12): 125-128.
- CHEN Y N, XU Y C, ZHENG Q. Measurement of horizontal component of geomagnetic field[J]. Physical Bulletin, 2019, (12): 125-128. (in Chinese)
- [8] 於高冲, 陈永翔, 鲍成章, 等. CD 光盘光栅衍射中的三类彩色线现象分析[J]. 物理与工程, 2024, 34(3): 123-130.
- YU G C, CHEN Y X, BAO C Z, et al. Analysis of three kinds of color line in grating diffraction of CD discs [J]. Physics and Engineering, 2024, 34(3): 123-130. (in Chinese)
- [9] 鲍成章, 郑琦, 涂壮志, 等. 基于青年物理学家锦标赛的校本课程实践[J]. 物理教学, 2022, 44(11): 24-27.
- BAO C Z, ZHENG Q, TU Z Z, et al. School based curriculum practice based on the Youth Physicist Championship [J]. Physics Teaching, 2022, 44(11): 24-27. (in Chinese)

(上接第 219 页)

2 结语

对于有些难度较大的情境,如本文中的“含时哈密顿量的处理”;有些概念,如本文中的“编时算符”,对中学生而言均有一定难度,但出于其重要性或课程结构的要求,应该引导学生掌握。这就需要教师合理的设计例题和问题引导,这对大中衔接课程的教学设计者构成一定的挑战。本文用一个具体的案例,展示了例题设计在破除难点中的重要性,给出的两道对比例题的解法,不仅对中学大中衔接课程有参考价值,对普通高校《量子力学》课程的教学亦有一定的参考意义。

参 考 文 献

- [1] 尹亚玲, 谭毅, 陈佳妮, 等. “大中衔接”视角下的高中物理科

普课程设计——以“激光应用”教学为例[J]. 物理教学, 2025, 47(1): 32-35, 31.

YIN Y L, TAN Y, CHEN J N, et al. Design of high school physics outreach courses from the perspective of secondary-tertiary curriculum articulation: A case study of “Laser Applications” in Teaching [J]. Physics Teaching, 2025, 47(1): 32-35, 31.

- [2] 张燕怡, 刘娜. 基于“大中衔接”的超导物理科普教学设计[J]. 物理教学, 2017, 39(12): 4-7, 45.

ZHANG Y Y, LIU N. Design of outreach teaching in superconductivity based on the perspective of secondary-tertiary curriculum articulation [J]. Physics Teaching, 2017, 39(12): 4-7, 45.

- [3] 王向斌, 沈艺鑫, 于云龙, 等. 量子力学基础教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2023: 11.

WANG X B, SHEN Y X, YU Y L, et al. Fundamentals of quantum mechanics [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2023: 11. (in Chinese)