

大学物理实验教学中的实验数据处理与不确定度评定

吴 平 张师平 万初斌
(北京科技大学数理学院, 北京 100083)

摘 要 实验数据处理与不确定度评定是大学物理实验教学培养学生科学素养与实践能力的关键环节,也是大学物理实验课程教学最具挑战性的难点之一。本文简要介绍了测量误差基本概念、分类及有效数字运用规则,误差处理中三种常用统计分布特征及其置信概率。详细介绍了基于国家标准 GB/T 27418—2017 的测量不确定度评定方法:包括测量模型、标准不确定度 A、B 类分量评定原理、合成标准不确定度计算及流程、间接测量量不确定度传递公式,以及 t 分布与扩展不确定度应用场景。

关键词 物理实验教学;数据处理;不确定度评定

DATA PROCESSING AND UNCERTAINTY EVALUATION IN UNIVERSITY PHYSICS EXPERIMENTAL TEACHING

WU Ping ZHANG Shiping WAN Chubin

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083)

Abstract Data processing and uncertainty evaluation in experiments constitute a critical component of university physics experiment education for cultivating students' scientific literacy and practical skills. This topic is also one of the most challenging aspects in university physics experimental teaching. This paper concisely introduces fundamental concepts of measurement errors, their classification, and rules for using significant figures. It further covers three common statistical distributions in error analysis and their confidence levels. The study elaborates on measurement uncertainty evaluation methods based on China's National Standard GB/T 27418—2017, including: Principles for evaluating Type A and Type B standard uncertainty components; Calculation procedures for combined standard uncertainty; Uncertainty propagation formulas for indirect measurements; and Application scenarios of the t-distribution and expanded uncertainty.

Key words physics experiment education; data processing; uncertainty evaluation

测量误差与实验数据处理方法是大学物理实验课程的重要组成部分,也是培养学生科学素养与实践能力的关键载体^[1]。它不仅是实验操作的技术延伸,更是引导学生从“动手做”走向“动脑

思”的核心训练,贯穿了整个实验课程。同时,不确定度计算和实验数据处理方法与规则,也是科学研究和工程实践中使用的基本方法与规则,具有举足轻重的作用^[2-4]。

收稿日期: 2025-07-08

基金项目: 北京科技大学研究生重大教改项目(2023JGA002)。

通信作者: 吴平, pingwu@sas.ustb.edu.cn。

引文格式: 吴平, 张师平, 万初斌. 大学物理实验教学中的实验数据处理与不确定度评定[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 138-145, 164.

Cite this article: WU P, ZHANG S P, WAN C B. Data processing and uncertainty evaluation in university physics experimental teaching [J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 138-145, 164. (in Chinese)

1 测量与测量误差

通过实验获得物理量量值的过程叫测量。使用量仪或量具直接测得(读出)被测量数值的测量,叫做直接测量;根据一些物理原理、公式,由直接测量量计算出所要求的物理量,这种用间接的方法得到被测量数值的测量,称为间接测量。同时,测量结果都具有误差,误差自始至终存在于一切科学实验和测量过程中。测量误差又分为绝对误差和相对误差,它们分别被定义为

$$\text{绝对误差} = \text{测得的量值} - \text{被测量的真值} \quad (1)$$

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{被测量的真值}} \times 100\% \quad (2)$$

这里,被测量的真值是一个理想概念,一般说来真值是不知道的,因而在实际测量中常用被测量的实际值或修正过的算术平均值来代替真值,称为约定真值。由于真值一般来说是不知道的,所以一般情况下是不能计算误差的,只有在少数情况下可以用准确度足够高的实际值作为量的约定真值,这时才能计算误差。

2 误差的分类

测量中的误差主要分为两类,系统误差和随机误差。系统误差是指在重复测量中保持不变或按可预见方式变化的测量误差的分量。在很好地分析了整个实验所依据的原理、方法和测量过程的每一步以及所用的各仪器,进而找出产生误差的各个原因后,我们就可以设法在测量结果中减少它的影响。随机误差就是在重复测量中按不可预见方式变化的测量误差的分量。我们实验中,在相同条件下,对同一物理量进行多次重复测量时,在极力减小一切明显的系统误差之后,每次的测量值仍会出现一些无规律的随机性变化。随机效应引起的随机误差,就某一次测量值来说是没有规律的,其大小和方向都是不可预知的,但进行足够多次的测量时,则会发现随机误差是按一定的统计规律分布的。因此,对随机误差的处理就是利用统计方法对测量值的分散程度进行评定。

3 有效数字与有效位数

实验中所测的被测量的数值都是含有误差

的,因此,这些数值不能随意写其位数,而是应反映出测量值的准确度,这样的数字就是有效数字。例如,测出某铜环的体积为 16.63cm^3 ,其测量不确定度为 0.20cm^3 ,这表明 16.63 的前两位是准确数字,后两位是存疑数字。综合上述实例的情况,可以给出有效数字的概念:有效数字就是准确数字和 $1\sim 2$ 位存疑数字的全体。

国家标准 GB 8170—1987^[5]中对有效位数的定义为:对没有小数位且以若干个零结尾的数值,从非零数字最左一位向右数得到的位数减去无效零(即仅为定位用的零)的个数,就是有效位数;对其他十进位数,从非零数字最左一位向右数而得到的位数,就是有效位数,例如, 0.002590m 这个物理量有 4 位有效位数。实验数据的有效位数是测量与实验数据处理中的重要问题,例如游标类量具,如游标卡尺、带游标的千分尺、分光仪角度游标度盘等,一般应读到游标分度值的整数倍;数显仪表及有十进步进式标度盘的仪表,如电阻箱、电桥等,一般应直接读取仪表的示值;指针式仪表一般应估读到最小分度值的 $1/4\sim 1/10$,或估读到基本误差限的 $1/3\sim 1/5$ 。

4 实验误差处理常用的统计分布

物理实验课程实验误差处理常用的分布有正态分布、均匀分布和三角分布^[2]。

4.1 正态分布

正态分布(又称高斯分布)是误差理论中最重要的一种分布。从概率论的“中心极限定理”可知,一个随机变量如果是大量相互独立的、微小因素影响的总效果,这个随机变量就近似地服从正态分布。物理测量中的随机误差,往往是观察者不能控制的大量偶然因素作用的结果,所以大多数物理测量服从正态分布。

对于随机变量 X ,正态分布的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (3)$$

其中, μ 和 σ^2 为分布参数, n 为测量次数。

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum x_i}{n} \quad (4)$$

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} \quad (5)$$

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}} \quad (6)$$

图1为正态分布曲线。 μ 为期望值,表示 x 出现概率最大的值,消除系统误差后, μ 通常就是 x 的真值。 σ^2 为方差。实际使用时常常使用方差的正平方根 σ , σ 称为标准差。从图1可见, σ 描述了分布线型的宽窄,也就是说 σ 直接反映了分布的离散程度。 σ 愈小,分布曲线愈陡,数据愈集中,重复性愈好; σ 大,则情况正好相反。因此,可以用 σ 来表征随机误差。

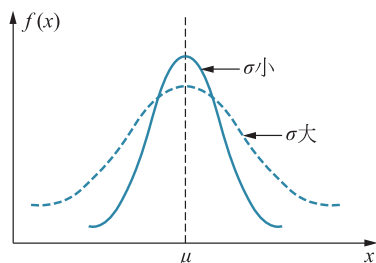


图1 正态分布曲线

$P = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ 是随机变量出现在 $[x_1, x_2]$ 区间的概率,称为置信概率。与置信概率对应的区间称为置信区间。显然,置信区间扩大,置信概率将提高。对于正态分布,以下三个置信区间及其相应的置信概率在实验误差与数据处理中具有重要意义

$$\begin{aligned} [\mu - \sigma, \mu + \sigma] \quad P &= 0.6826 \\ [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] \quad P &= 0.9545 \\ [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] \quad P &= 0.9974 \end{aligned} \quad (7)$$

以上数据的涵义是,对服从正态分布的物理量进行测量时,测量值将有68.26%的概率落在区间 $\mu \pm \sigma$,95.45%的概率落在区间 $\mu \pm 2\sigma$,而当置信区间扩大到 $\mu \pm 3\sigma$ 时,测量值落在区间 $\mu \pm 3\sigma$ 的概率达到99.74%。对于区间 $\mu \pm 3\sigma$,测量值落在该区间以外的概率不超过0.26%,可见 $|x - \mu| \geq 3\sigma$ 的可能性很小,所以 3σ 也称为极限误差。判断可疑测量值的拉依达准则就是一个基于极限误差的剔除准则。该准则规定,如果某一测量值 $|x - \mu| \geq 3\sigma$,则认为该 x 含有粗差,可考虑将其剔除。拉依达准则是最常用和最简单的判断可疑测量值的剔除准则。需要注意的是拉依达准则在测量次数较多时可以使用,在测量次数较小时,如小于十几次时,“弃真”概率较大,最好不用。

假设对某一物理量 X 在重复性条件下进行了 n 次独立测量,得到 n 个测量值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。

为把 n 个测量值看成随机变量 X 的随机样本,它们的算术平均值是

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

设被测量的真值的最佳估计值为 x ,可写出差值平方和 Q ,即

$$Q = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 \quad (9)$$

根据最小二乘法原理,一系列等精度测量的最佳估计值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。令 $\frac{dQ}{dx} = 0$ 求极值

$$\frac{dQ}{dx} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x) = 0 \quad (10)$$

则

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \quad (11)$$

因此,我们可以用算术平均值表示测量结果。

显然,算术平均值 $\bar{x}$ 也是一个随机变量。引用“中心极限定理”可以证明,如果物理量 X 服从正态分布,那么算术平均值 $\bar{x}$ 也服从正态分布,且其期望值也为真值 μ ,标准差为 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma$ 。算术

平均值 $\bar{x}$ 的标准差是单个测量值标准差的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍,

说明算术平均值的离散程度比单个测量值的离散程度要小,所以增加测量次数可以改善平均值的精密度。图2给出了 $\sigma_{\bar{x}}/\sigma \sim n$ 的关系,可以看到,随着测量次数 n 的增加, $\sigma_{\bar{x}}/\sigma$ 逐渐减小,但当 $n > 10$ 以后,变化趋于平缓,再增加测量次数的影响变得不明显。测量的精密度是由测量仪器的精度、测量方法、环境和观测人决定的,超出这些条

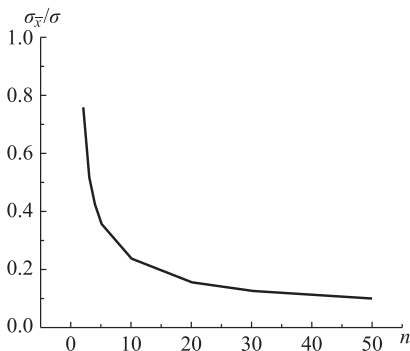


图2 $\sigma_{\bar{x}}/\sigma \sim n$ 的关系

件单纯追求测量次数是不能提高测量精度的,但必要的测量次数还是需要的, n 不必过大,一般重复测量 10 次左右即可。

当测量次数无穷多或足够多时,测量分布才接近正态分布,但实际测量只能有限次地进行,因而测量结果及其离散程度不得不在有限次测量的基础上进行估算。

因为测量值的算术平均值 $\bar{x}$ 是真值的无偏估计,我们可以用它来作为真值的最佳估值。

每一次测量值 x_i 与平均值 $\bar{x}$ 之差叫作残差,记为

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (12)$$

显然,这些残差有正有负,有大有小。

对于有限次测量, σ 可用标准偏差 s 来估值。 s 用下面的贝塞尔公式来计算

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (13)$$

其中,因子 $n-1$ 是 s 的自由度。自由度是在进行统计计算时可以自由变化的值的数量。这里 $n-1$ 来自于 x_i 与 $\bar{x}$ 的关联,反映集合 $\{x_i - \bar{x}\}$ 只有 $n-1$ 个独立项目的事实。

在计算标准差时,自由度是数据点数量(n)减去 1,即 $n-1$ 。自由度越大,统计推断越可靠,计算出的标准差越具有代表性。

s 的值直接体现了随机误差的分布特征。 s 值小就表示测量值很密集,即测量的精密度高, s 值大就表示测量值很分散,即测量的精密度低。

实际测量结果采用测量值的算术平均值来表示,相应地其离散程度要用 σ_x 来表征。由于 $\sigma_x =$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma, \sigma_x \text{ 可用式(14)来估值。}$$

$$s_x = \frac{1}{\sqrt{n}}s \quad (14)$$

其中, s_x 称为平均值的标准差。

4.2 平均分布

在有些情况下,可以估计随机变量 X 的量值的界限(即上限和下限),但对其可能值落在上、下限之间的区间内的情况缺乏更多的认识,因而只能假设其可能值按等概率落在该区间的任何地方,而取值在界限外的概率为零,这种矩形分布称为平均分布或均匀分布,如图 3 所示。设随机变量 X 的下限是 a_- ,上限是 a_+ ,则区间半宽度 $a = (a_+ - a_-)/2$ 。平均分布的概率密度函数为

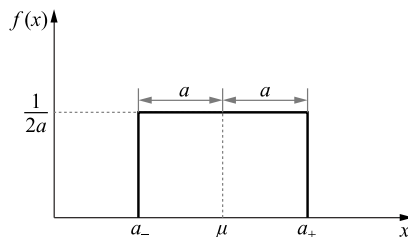


图 3 平均分布曲线

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & a_- \leq x \leq a_+ \\ 0 & x < a_- \text{ 或 } x > a_+ \end{cases} \quad (15)$$

平均分布的数学期望是该区间的中点

$$\mu = (a_+ + a_-)/2 \quad (16)$$

其方差 σ^2 和标准差 σ 分别为

$$\sigma^2 = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} = \frac{a^2}{3} \quad \sigma = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (17)$$

平均分布 $\mu \pm \sigma$ 区间的置信概率是 0.577。

4.3 三角分布

在平均分布中,由于缺乏随机变量 X 在界限区间内可能值分布的了解,只能假设其在界限区间内均匀分布。但也有许多实际情况是靠近界限的值比靠近中点的值要少,因而采用三角分布会更接近实际情况一些。对于三角分布,小误差的出现概率大,大误差出现的概率小,分布左右对称,如图 4 所示。

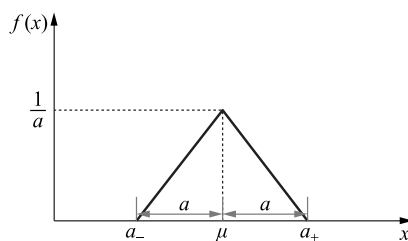


图 4 三角分布曲线

仍设随机变量 X 的下限是 a_- ,上限是 a_+ ,区间半宽度 $a = (a_+ - a_-)/2$ 。三角分布的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - a_-}{a^2} & a_- \leq x \leq (a_+ + a_-)/2 \\ \frac{a_+ - x}{a^2} & (a_+ + a_-)/2 \leq x \leq a_+ \\ 0 & x < a_- \text{ 或 } x > a_+ \end{cases} \quad (18)$$

三角分布的数学期望是该区间的中点

$$\mu = (a_+ + a_-) / 2 \quad (19)$$

其方差 σ^2 和标准差 σ 分别为

$$\sigma^2 = \frac{(a_+ - a_-)^2}{24} = \frac{a^2}{6} \quad \sigma = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{24}} = \frac{a}{\sqrt{6}} \quad (20)$$

三角分布 $\mu \pm \sigma$ 区间的置信概率是 0.650。

5 直接测量量结果表示

1) 测量模型

测量不确定度是表征被测量量值分散性的非负参数。以标准差表示的测量不确定度称为标准不确定度。参考 2018 年开始实施的国家标准 (GB/T 27418—2017)《测量不确定度评定和表示》^[6], 物理实验教学采用标准不确定度的评定方法, 其要点如下:

(1) 构建待测量的测量模型, 模型应尽可能详尽地考虑对测量结果的不确定度有贡献的量。

(2) 测量结果的标准不确定度通常包含若干个分量, 根据其数值的评估方法分为两类分量: A 类分量是用统计方法评定的分量, B 类分量是用其他方法评定的分量。

(3) A 类分量根据测量值的统计分布进行评定, 并用标准差表征; B 类分量根据经验或其他信息获得的概率密度函数进行评定, 也用标准差表征。

(4) A、B 两类标准不确定度分量用方和根法合成, 得到的合成标准不确定度用“标准差”的形式表示。

在前文中, 我们介绍了系统误差、随机误差及两者之间的关系, 理解了在现实情况下并不能绝对地区分所谓系统误差和随机误差。因而, 在这里我们看到, 对测量不确定度的表征不是根据误差分类进行的, 而是根据不确定度数值评定方法分类表征的, 根据一系列测量值的统计分布进行评定的不确定度分量按 A 类分量评定, 根据经验或其他信息所获得的概率密度函数(先验分布)进行评定的不确定度分量按 B 类分量评定。

我们以采用多次测量的方法用卡尺测量一个塑料球直径 D 为例具体说明构建测量模型的方法。在进行直径测量时, 实验者每次读出卡尺的读数 D_0 、卡尺校准证书给出的仪器偏差 ΔD_1 , 卡尺卡钳与待测球接触点偏离直径引起的偏差

ΔD_2 、夹持球时引起球变形引起的偏差 ΔD_3 等都会对测量结果的不确定度有影响, 故该测量模型可以写为

$$D = D_0 + \Delta D_1 + \Delta D_2 + \Delta D_3$$

如果精心控制测量过程或者精度要求不太高, 可以认为 ΔD_2 、 ΔD_3 很小可忽略, 则测量模型可以写为

$$D = D_0 + \Delta D_1$$

在这个测量中, D 的最佳估值就由 D_0 和 ΔD_1 的最佳估值给出, 显然仪器误差造成的对 D 值修正量 ΔD_1 的平均值为 0, 这样就有

$$D_{\text{最佳}} = \overline{D_0} + \overline{\Delta D_1} = \overline{D_0} + 0$$

根据测量模型, 在评估直径测量结果的不确定度时, 我们需要评估多次读数和仪器误差这两个影响因素对测量不确定度的贡献。在这里, 多次读数对不确定度的贡献由 A 类不确定度描述, 仪器误差对不确定度的贡献由 B 类不确定度来描述。在物理实验中, 常常需要通过直接测量获取某一个物理量的量值, 遇到的情况就是本例这种情况。

2) 标准不确定度 A 类分量评定

大多数物理测量服从正态分布。假设对某一物理量 X 在重复性条件下进行了 n 次独立测量, 得到 n 个测量值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。 x 的最佳估值是其算术平均值

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (21)$$

其标准不确定度的 A 类分量(也称 A 类标准不确定度)为

$$u_A = s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (22)$$

3) 标准不确定度 B 类分量评定

当物理量 X 的估计值不由重复测量得到时, 标准不确定度可根据 X 可能变化的全部有关信息的判断来评定。这些信息来源可能包括: 以前的测量数据, 对有关材料和仪器特性的经验或了解; 生产厂商提供的技术说明书; 标准证书或其他证书提供的数据; 手册给出的参考数据的不确定度等。用这种方法评估的标准不确定度称为标准不确定度 B 类分量 u_B , 也称为 B 类标准不确定度 u_B 。物理实验教学中采用简化处理, B 类不确定度分量评定主要涉及仪器最大允差和测量估计误差。

仪器最大允差可以从仪器说明书、手册中得到,它包含了仪器的系统误差,也包含了环境以及测量者自身可能出现的变化对测量结果的影响(随机误差),是仪器在正常使用条件下可能产生的最大误差。如果仪器最大允差(仪器误差限)为 $\Delta_{\text{仪}}$,则测量值与真值的误差在 $[-\Delta_{\text{仪}}, \Delta_{\text{仪}}]$ 区间的置信概率为1。根据第4节介绍的正态分布、平均分布和三角分布的分布特征,当仪器误差分别近似服从正态分布、平均分布、三角分布时,标准不确定度B类分量 u_B 应分别取为 $\Delta_{\text{仪}}/3$ 、 $\Delta_{\text{仪}}/\sqrt{3}$ 、 $\Delta_{\text{仪}}/\sqrt{6}$ 。例如表1所示,米尺测量通常服从正态分布,而游标卡尺测量更接近平均分布。三角分布虽然在大学物理实验中不常使用,但在某些特定测量场景下测量结果会近似服从三角分布。例如使用模拟式仪表(如指针式电压表)进行读数时,实验者通常只能判断指针所处的大致刻度区间,这本质上可视为平均分布。然而,若操作者进一步估计指针在最小刻度之间的具体位置,倾向于将刻度区间的中心值作为测量结果,而非区间两端数值,则误差分布呈现出以中心为峰值、向两侧线性递减的特征,可以用三角分布描述(注:在大学物理实验教学中,此类情况通常仍近似作均匀分布处理)。需要指出的是,任何关于测量误差分布的判断本质上都是一种近似。实验人员可根据实际测量过程与设备特性,选择更为合适的分布模型进行不确定度估算。若技术说明书、手册等明确其不确定度是标准差的若干倍,则 u_B 可取为给定值除以该倍数所得之商。

表1 大学物理实验中常用仪器误差近似分布及标准不确定度B类分量处理

仪器	近似服从的分布	标准不确定度 B类分量
米尺	正态分布	$u_B = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{3}$
游标卡尺	平均分布	$u_B = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}}$
螺旋测微器	正态分布	$u_B = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{3}$
模拟电表	平均分布	$u_B = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}}$
数字电表	平均分布	$u_B = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}}$

4) 直接测量量合成标准不确定度计算

假设对某一物理量 X 在重复性条件下进行了 n 次独立测量,估算了该测量的A类标准不确定度分量和B类标准不确定度分量,则物理量 x 的合成标准不确定度用 u_c 来表示

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (23)$$

通常 u_c 最多为两位有效数字。相对不确定度的有效位数一般也只取两位。被测量的估计值和不确定度都应该给出单位。测量结果可以用多种方法表示,我们以对标称值为100g的砝码进行测量,得到其质量 m_s ,算数平均值为100.02147g,合成标准不确定度为0.35mg为例,表示该测量结果:

$$(1) m_s = 100.02147\text{g}, u_c = 0.35\text{mg}$$

(2) $m_s = 100.02147(35)\text{g}$,其中括号中的数为 u_c 的数值, u_c 与说明的结果的末位对齐。

(3) $m_s = 100.02147(0.00035)\text{g}$,其中括号中的数为 u_c 的数值,以所给出的结果的单位表示。

6 间接测量量结果与不确定度合成

1) 测量模型

很多实验中进行的测量是间接测量。间接测量的结果是由直接测量的结果根据一定的数学公式计算出来的。这样一来,直接测量结果的不确定度就必然影响到间接测量结果,这种影响的大小可以由相应的数学公式计算出来。

设直接测量量分别为 $x, y, z, \dots$,它们都是互相独立的量,其最佳估计值分别为 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$,相应的标准不确定度分别为 $u_c(x), u_c(y), u_c(z), \dots$ 。间接测量量为 ϕ , ϕ 与各直接测量量之间的关系可以用函数形式表示,即测量模型为

$$\phi = F(x, y, z, \dots) \quad (24)$$

2) 间接测量量不确定度合成

间接测量量 ϕ 的最佳估计值 $\phi_{\text{最佳}}$ 可由将各直接测量量的最佳估计值代入函数关系式(24)得到:

$$\phi_{\text{最佳}} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad (25)$$

在有些情况下, $\phi_{\text{最佳}}$ 也可以取 ϕ 的 n 次独立观测值的算数平均值,其每个观测值 φ_i 的不确定度相同,且每个 φ_i 都是根据同时获得的直接测量量的一组完整观测值求得的。

ϕ 也有相应的合成标准不确定度,用 $u_c(\phi)$ 来表示。由于不确定度都是微小的量,相当于数学中的“增量”,因此间接测量量的合成标准不确定度的计算公式与数学中的全微分公式基本相同,区别在于要用标准不确定度 $u_c(x)$ 等替代微分 dx 等。

间接测量量的合成标准不确定度 $u_c(\phi)$ 可由下面的不确定度传递公式计算:

$$u_c(\phi) = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 u_c^2(x) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 u_c^2(y) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 u_c^2(z) + \dots} \quad (26)$$

$$\frac{u_c(\phi)}{\phi} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}\right)^2 u_c^2(x) + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}\right)^2 u_c^2(y) + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}\right)^2 u_c^2(z) + \dots} \quad (27)$$

其中,偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ 等称为灵敏度系数,描述了 ϕ 的值如何随 x, y, z 等的值的变化而变化。由估计值 x, y, z 等的标准不确定度引起的 ϕ 的变化可以表示为 $\frac{\partial F}{\partial x} u_c(x), \frac{\partial F}{\partial y} u_c(y), \frac{\partial F}{\partial z} u_c(z)$ 等。式(26)是间接测量量的合成标准不确定度传递公式,式(27)是间接测量量的相对合成标准不确定度传递公式。对于积商形式的函数,用式(27)计算更为方便。

7 t 分布与扩展不确定度

1) t 分布

前文提到,只有当测量次数无穷多时,测量分布才接近正态分布。在测量次数有限时,特别是测量次数较少时,随机变量 $\bar{x}$ 的分布服从 t 分布。定义相对平均偏差 $t, t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$,可以证明统计量 t 服从自由度 $\nu = n - 1$ 的 t 分布, t 分布又称为学生分布。

t 分布的概率密度函数为

$$f_\nu(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (28)$$

从 t 分布 $f_\nu(t)$ 的函数形式上看, t 分布不仅与测量值有关,还与测量次数 n 有关。

期望等于 0, 标准差等于 1 的随机变量称为标准化随机变量。已知随机变量的平均值和标准差后,可以引入标准化随机变量 $x_s = \frac{x - \mu}{\sigma}$, 以便于进行不同分布的比较和讨论。图 5 为 t 分布曲线与标准正态分布曲线的对比。从图 5 中可以看到, t 分布也是左右对称的, $\nu = \infty$ 的 t 分布曲线与正态分布曲线相同, 但 $\nu = 1$ 和 $\nu = 5$ 的 t 分布曲线与正态分布曲线有差异, 比正态分布曲线矮而宽, 即 t 分布的离散程度比正态分布大一些, 且这种差别在 n 越小时愈明显。一般来讲, 当 $n > 30$ 时, t 分布趋于正态分布。事实上, 当 $n > 10$ 时, t 分布就很接近正态分布。显然, 由于 t 分布比正态分布曲线矮而宽, 对于同样的置信概率, t 分布相应的置信区间比正态分布的置信区间要宽一些, 需要乘以一个大于 1 的因子 $t_p(\nu)$ (称为 t 因子) 扩大置信区间。表 2 中给出了典型置信概率时的 t 因子。

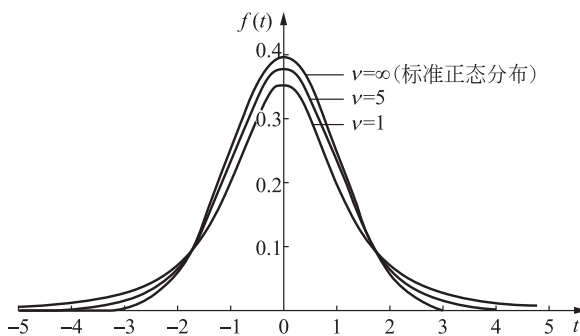


图 5 t 分布曲线

2) 扩展不确定度

尽管我们提倡用合成标准不确定度 u_c 作为定量表示测量结果的不确定度的参数, u_c 也确实可以广泛用于表示测量结果的不确定度, 但在某些商业、工业和法规的应用中以及涉及健康和安全时, 常常有必要提供不确定度量, 也就是给出测量结果值的区间, 并期望该区间能合理赋予被测量值分布的大部分。为满足这种要求而对不确定度的另一种度量称为扩展不确定度, 用 U 来表示。

扩展不确定度 U 由合成标准不确定度 u_c 乘以一个大于 1 的因子 (称为包含因子) k_p 得到

$$U = k_p u_c \quad (29)$$

表 2 t 分布的 t 因子

$\nu=n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
$t_{0.6827}(\nu)$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.05	1.03	1.03	1.000
$t_{0.90}(\nu)$	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.89	1.86	1.83	1.81	1.75	1.72	1.645
$t_{0.95}(\nu)$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23	2.13	2.09	1.960
$t_{0.9545}(\nu)$	13.97	4.53	3.31	2.87	2.65	2.52	2.43	2.37	2.32	2.28	2.18	2.13	2.000
$t_{0.99}(\nu)$	63.66	9.92	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17	2.95	2.85	2.576
$t_{0.9972}(\nu)$	235.80	19.21	9.22	6.62	5.51	4.90	4.53	4.28	4.09	3.96	3.59	3.42	3.000

其中, U 最多为两位有效数字。 k_p 因子扩大了置信区间, 扩展不确定度 U 提供了一个置信概率约为 p 的区间, 测量结果表示为

$$Y = y \pm U \quad \text{单位} \quad (30)$$

其中, Y 的最佳估值为 y , $[y-U, y+U]$ 区间包含了能合理赋予的 Y 值的分布的大部分。

当使用扩展不确定度报告测量结果时, 需要同时报告获得 U 时的 k_p 值, 以及与区间 $y \pm U$ 有关的近似置信概率。

因子 k_p 的值要根据概率分布类型和规定的包含概率来选择, 一般范围在 2~3。一种常见的情况是, y 和 u_c 所表征的概率分布近似为正态分布。表 3 给出了假设正态分布时具有包含概率 p 的区间的 k_p 值。当 u_c 的有效自由度较大时, 取 $k_p=2$ 时所形成的区间的包含概率约为 95%, 取 $k_p=3$ 时所形成的区间的包含概率约为 99%。

表 3 假设正态分布时具有包含概率 p 的区间的包含因子 k_p 值^[6]

包含概率 $p/\%$	包含因子 k_p
68.27	1
90	1.645
95	1.960
95.45	2
99	2.576
99.73	3

测量次数有限的情况下, 可以用 t 分布近似, 需要计算有效自由度 ν_{eff} 的值, 扩展不确定 U 为

$$U = k_p u_c = t_p(\nu_{eff}) u_c \quad (31)$$

其中, $t_p(\nu_{eff})$ 为 t 因子, 需根据 ν_{eff} 和置信水平查表 2.7-1 获得关于有效自由度估算的更多信息, 可参阅国家标准 GB/T 27418—2017。另外, 国家标准 GB/T 27418—2017 用“包含区间”和“包含概率”替代了国际标准中的“置信区间”和“置信水平”。

8 结语

实验数据处理是大学物理实验教学的核心环节, 更是培养学生严谨科学素养和扎实实践能力的关键途径。本文系统阐述了测量误差的基本概念与分类、有效数字的运用规则、误差处理的常用统计分布(正态分布、均匀分布、三角分布), 并重点介绍了依据国家标准(GB/T 27418—2017)进行测量不确定度评定的方法, 包括标准不确定度 A 类与 B 类分量的评定、合成标准不确定度的计算、间接测量量的不确定度传递, 以及扩展不确定度的概念与应用。

掌握科学的误差分析和规范的数据处理方法, 不仅能够让学生正确表达和评估实验结果的可信度, 揭示物理规律, 还可以引导其深刻理解实验测量中蕴含的统计规律和概率思想。这种基于不确定度的量化评估思维, 是科学研究与工程实践中进行可靠判断和决策的基础。因此, 在物理实验教学中, 应始终坚持要求学生理解原理、规范操作、严谨处理数据, 将误差理论与不确定度评定方法内化为其科学思维与实践能力的重要组成部分, 为其未来的科研探索和工程实践奠定坚实的数据处理基础。希望通过本文介绍的系统化数据处理框架与方法体系, 可以为从事物理实验课程教学的老师和学习的学生提供借鉴与参考。

参 考 文 献

- [1] 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会. 理工科类大学物理实验课程教学基本要求[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023. Teaching Guidance Committee for College Physics Courses in Higher Education Institutions of the Ministry of Education. Basic requirements for Physics teaching in Science and Engineering Universities[M]. Beijing: Higher Education Press, 2023. (in Chinese)

(下转第 164 页)

- phenomena in Young's double-slit experiment[J]. Light Source & Lighting, 2021(7): 45-46. (in Chinese)
- [2] 李栋玉, 时有明, 张廷宪. 杨氏双缝干涉实验的条纹分布研究[J]. 实验技术与管理, 2019, 36(10): 120-122, 126.
LI D Y, SHI Y M, ZHANG T X. Study on fringe distribution of Young's double slit interference experiment[J]. Experimental Technology and Management, 2019, 36(10): 120-122, 126. (in Chinese)
- [3] 李小芳, 张宇涵, 郭宇翔, 等. 基于 Python 的杨氏双缝干涉和衍射的仿真模拟[J]. 大学物理实验, 2024, 37(5): 113-117.
LI X F, ZHANG Y H, GUO Y X, et al. Simulation of Yang's double slit interference and diffraction based on Python[J]. Physical Experiment of College, 2024, 37(5): 113-117. (in Chinese)
- [4] 马书炳, 张辉, 单会会, 等. 双缝干涉和衍射计算机数值模拟与演示[J]. 物理实验, 2017, 37(S1): 9-10, 13.
MA S B, ZHANG H, SHAN H H, et al. Demonstration and computer simulation of double slit interference and diffraction based on Matlab[J]. Physics Experimentation, 2017, 37(S1): 9-10, 13. (in Chinese)
- [5] 张兴坊, 刘凤收, 闫昕, 等. 基于 MATLAB GUI 的杨氏双缝干涉仿真动画设计[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(9): 98-101, 110.
ZHANG X F, LIU F S, YAN X, et al. Animation design of Young's double slit interference simulation based on MATLAB GUI[J]. Journal of Science of Teachers' College and University, 2021, 41(9): 98-101, 110. (in Chinese)
- [6] 任刘娜, 付文慧, 苏艳丽, 等. 基于 Python 的光学现象可视化分析[J]. 大学物理实验, 2024, 37(1): 104-108.
REN L N, FU W H, SU Y L, et al. Visualization of optical phenomena based on Python[J]. Physical Experiment of College, 2024, 37(1): 104-108. (in Chinese)
- [7] 毛俊健, 顾壮. 大学物理学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
MAO J J, GU M. College physics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2020. (in Chinese)
- [8] 胡捷. 白光干涉条纹色偏移机理与校正技术研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2019.
HU J. Research on mechanism and correction of color deviation for white light interference fringes[D]. Nanjing: Nanjing University of Science & Technology, 2019. (in Chinese)
- [9] 王烨, 王岩, 张志峰, 等. 白光杨氏双缝干涉实验的 MATLAB 仿真[J]. 大学物理实验, 2024, 37(6): 99-104.
WANG Y, WANG Y, ZHANG Z F, et al. MATLAB Simulation of Young's double-slit interference experiment with a white light source[J]. Physical Experiment of College, 2024, 37(6): 99-104. (in Chinese)
- (上接第 145 页)
- [2] 吴平, 邱红梅, 张师平, 等. 大学物理实验教程[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2025.
WU P, QIU H M, ZHANG S P, et al. Experiments in University Physics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2025. (in Chinese)
- [3] 吴平, 陈森, 邱红梅, 等. 理科物理实验教程[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2022.
WU P, CHEN S, QIU H M, et al. Physics Experiment Tutorial for Science Majors[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2022. (in Chinese)
- [4] 张增明, 韦先涛, 浦其荣, 等. 大学物理实验 第一册[M]. 北京: 高等教育出版社, 2024.
ZHANG Z M, WEI X T, PU Q R, et al. College Physics Experiments: Volume 1[M]. Beijing: Higher Education Press, 2024. (in Chinese)
- [5] 中华人民共和国国家标准. 数值修约规则: GB 8170—1987[S]. 北京: 标准出版社, 1988.
National Standard of the People's Republic of China. Rules for Rounding Off of Numerical Values: GB 8170—1987[S]. Beijing: Standards Press of China, 1988. (in Chinese)
- [6] 中华人民共和国国家标准. 测量不确定度评定和表示: GB/T 27418—2017[S]. 北京: 中国标准出版社, 2018.
National Standard of the People's Republic of China. Evaluation and Expression of Uncertainty in Measurement: GB/T 27418—2017[S]. Beijing: China Standards Press, 2018. (in Chinese)