

基于球坐标系下角动量定理对陀螺仪进动与章动的动力学分析

师玉荣¹ 王广星¹ 钟以洋² 顾永建¹

(¹ 中国海洋大学物理与光电工程学院, 山东 青岛 266100;

² 澳大利亚国立大学量子科学与技术系, 堪培拉, ACT 2601, 澳大利亚)

摘要 重力场中陀螺仪的进动和章动的“反直觉”现象令人惊奇, 但是借助直角坐标系的近似推导只能解释进动不能解释章动现象, 不能给普通物理力学阶段学生满意的解答。本文推导了球坐标系下角动量定理的形式, 并应用其对陀螺仪的进动和章动进行了动力学分析, 并借助数值模拟手段给出了陀螺仪运动的几个运动量的关系图, 给学生清晰的动力学图像, 让普通物理阶段的学生就可以理解陀螺仪的复杂运动, 这种分析方法比理论力学的拉格朗日力学法分析理论思路更简单、更直观更易理解。

关键词 球坐标系; 陀螺仪; 进动; 章动; 运动分析

DYNAMIC ANALYSIS OF GYROSCOPE PRECESSION AND NUTATION BASED ON THE ANGULAR MOMENTUM THEOREM IN SPHERICAL COORDINATES

SHI Yurong¹ WANG Guangxing¹ ZHONG Yiyang² GU Yongjian¹

(¹ College of Physics and Optoelectronic Engineering, Ocean university of China, Qingdao, Shandong 266100;

² Department of Quantum Science and Technology, The Australian National University, Canberra, ACT 2601, Australia)

Abstract The counterintuitive phenomenon of precession and nutation of gyroscopes in the gravitational field is surprising, but qualitative explanations using Cartesian coordinate systems can only explain precession but not nutation, and cannot provide satisfactory answers for students in the general physics and mechanics stage. This paper derives the form of the angular momentum theorem in spherical coordinates and applies it to the dynamic analysis of the precession and nutation of gyroscopes. With the help of numerical simulation methods, several relationship diagrams of the gyroscope's motion quantities are given, providing students with clear dynamic images and allowing ordinary physics students to understand the complex motion of gyroscopes. This analysis method is simpler, more intuitive, and easier to understand than the Lagrangian mechanics method of theoretical mechanics.

Key words spherical coordinates; gyroscope; precession; nutation; movement analysis

力学中关于转动的质点和自转的刚体三维运动有许多反直觉的现象, 例如陀螺仪的定点转动

中进动与章动的运动现象令学生着迷, 这也是教学中的难点, 陀螺仪的运动在很多工程技术以及

收稿日期: 2025-08-28

基金项目: 中国海洋大学本科教育教学研究重点项目: 理实并重、与时俱进、因材施教理念下的“力学”课程建设(2024ZD08)。

通信作者: 顾永建, guyj@ouc.edu.cn。

引文格式: 师玉荣, 王广星, 钟以洋, 等. 基于球坐标系下角动量定理对陀螺仪进动与章动的动力学分析[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 62-66.

Cite this article: SHI Y R, WANG G X, ZHONG Y Y, et al. Dynamic analysis of gyroscope precession and nutation based on the angular momentum theorem in spherical coordinates[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 62-66. (in Chinese)

天文现象的解释中有非常重要的应用。但是多数力学教材和大学物理教材中忽略陀螺仪的章动,只讨论进动,普通物理阶段借助直角坐标系中的角动量定理只能对进动给出近似的运动分析,而理论力学中应用拉格朗日力学的分析方法复杂且不够直观。多位学者在直角坐标系下对陀螺仪的章动进行严格的动力学分析,理论较为繁琐^[1,2]。本文只应用球坐标系下的角动量定理就可以得出陀螺仪的进动与章动的动力学方程,理论推导思路简洁清晰,能解释进动与章动这两个竞争因素的关系,给出章动的“简谐振动”特征,让普通物理阶段学生就可以理解这一复杂运动。

1 球坐标系下角动量定理形式

如图 1 所示为球坐标系概述图, θ 为极角, ϕ 为方位角, $\mathbf{e}_r$ 、 $\mathbf{e}_\theta$ 、 $\mathbf{e}_\phi$ 分别表示径向、极向和方位向的单位矢量,它们是动矢量。如果矢量 $\mathbf{A}$ 的大小不变,只有方向在改变,其关于时间的导数 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$, $\boldsymbol{\omega}$ 为反映矢量 $\mathbf{A}$ 方向改变的角速度, $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 垂直于 $\mathbf{A}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 决定的平面。方位向单位矢量 $\mathbf{e}_\phi$ 只在 x - y 面内转动,方向改变对应的角速度 $\dot{\phi}$ 方向沿 z 轴方向,所以 $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ 的方向在 x - y 面内且与方位方向垂直,分解到极向与径向可得

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \sin\theta \mathbf{e}_r - \dot{\phi} \cos\theta \mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

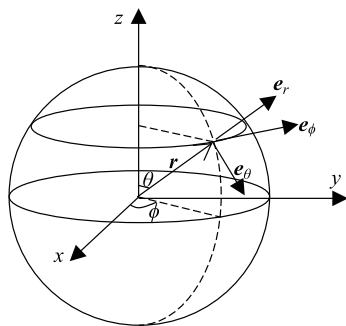


图 1 球坐标系的坐标与单位矢量

对于径向与极向单位矢量对时间的导数,因为无穷小角位移为矢量,利用运动分解的思想,可以把角位移分解为极向转过的角位移 $d\theta$ 和方位方向的角位移 $d\phi$,根据这种方法可分析求得这两

个方向的单位矢量关于时间的导数为

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \mathbf{e}_\phi \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos\theta \mathbf{e}_\phi \quad (3)$$

数学物理方法中利用球坐标系与直角坐标系之间单位矢的关系,对时间求导后也可以得到式(1)(2)(3)相同的结果,^[3]本文的思路更简洁,物理意义更明确。可见动坐标系与直角坐标系之间非常明显的不同就是相互正交的三个方向不是相互独立的,不能应用以前熟悉的直角坐标的运动合成与分解来理解球坐标系下描述的问题。

球坐标系下,刚体对坐标原点的角动量的分量式可表示为 $\mathbf{L} = L_r \mathbf{e}_r + L_\theta \mathbf{e}_\theta + L_\phi \mathbf{e}_\phi$,角动量对时间的导数为

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{dL_r}{dt} \mathbf{e}_r + L_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dL_\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + L_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \frac{dL_\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi + L_\phi \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \quad (4)$$

把式(1)(2)(3)代入式(4)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} = & \frac{dL_r}{dt} \mathbf{e}_r + L_r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + L_r \dot{\phi} \sin\theta \mathbf{e}_\phi + \frac{dL_\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta - \\ & L_\theta \dot{\theta} \mathbf{e}_r + L_\theta \dot{\phi} \cos\theta \mathbf{e}_\phi + \frac{dL_\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi - L_\phi \dot{\phi} \sin\theta \mathbf{e}_r - \\ & L_\phi \dot{\phi} \cos\theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)与角动量定理 $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ 比较得到三个分量式为

$$M_r = \frac{dL_r}{dt} - L_\theta \dot{\theta} - L_\phi \dot{\phi} \sin\theta \quad (6)$$

$$M_\theta = \frac{dL_\theta}{dt} + L_r \dot{\theta} - L_\phi \dot{\phi} \cos\theta \quad (7)$$

$$M_\phi = \frac{dL_\phi}{dt} + L_r \dot{\phi} \sin\theta + L_\theta \dot{\phi} \cos\theta \quad (8)$$

可见动坐标系中某方向的力矩不但可以改变该方向的角动量,还可以改变与其正交的其他两个方向的角动量的方向。

2 陀螺仪的进动与章动的动力学分析

陀螺仪为绕对称轴做高速旋转的转子,赵凯华的《力学》教材第 195 页提到如图 2 所示的陀螺仪的运动^[4],先把高速旋转的陀螺仪两端都支撑起来,使其水平,然后撤去 A 端的支撑,陀螺仪除

了进动,还会有“下沉”和“抬起”的运动,理想情况可以抬起到初始高度,这个过程重复进行,进动不是匀速进动。这里的“下沉、抬起”的运动称为章动,即陀螺仪同时进动和章动。陀螺仪“反重力矩”在水平面内进动和竖直面内还能“抬起”的现象,让学生惊奇困惑,力学和大学物理教材给出的解释不够严谨,也不能给出章动的动力学方程。多位学者尝试利用初等力学知识对这个复杂的运动现象进行分析,需要做近似处理。^[5]本文只利用球坐标系下的角动量定理就推导出陀螺仪进动与章动的动力学方程,数值求解给出陀螺仪运动的几个物理量的关系曲线。

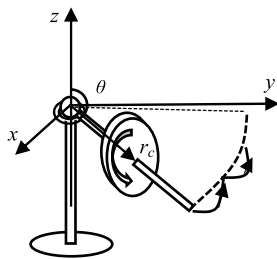


图2 陀螺仪的进动与章动

2.1 重力场中陀螺仪的角动量定理

如图2所示,建立如图所示的球坐标系,定点为坐标原点,竖直向上为 z 轴正向, x - y 面为水平面。陀螺仪质心位置矢量 $\mathbf{r}_c = r_c \mathbf{e}_r$,质心速度 $\mathbf{v}_c = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_c \mathbf{e}_r) = r_c \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r_c \sin\theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$ 。

刚体对参考点的角动量等于质心对参考点的角动量加刚体相对质心的角动量,即 $\mathbf{L} = \mathbf{L}_c + \mathbf{L}'$ 。^[6]绕对称轴高速转动的陀螺仪的定点转动,其相对质心的角动量的方向为径向,若自转角速度为 ω ,则 $\mathbf{L}' = L_r = I_c \omega$;陀螺仪的质心角动量为

$$\mathbf{L}_c = \mathbf{r}_c \times m \mathbf{v}_c = -mr_c^2 \sin\theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta + mr_c^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi \quad (9)$$

所以球坐标系下陀螺仪的角动量三个分量为: $L_r = I_c \omega$ 、 $L_\theta = -mr_c^2 \sin\theta \dot{\phi}$ 、 $L_\phi = mr_c^2 \dot{\theta}$ 。

重力场中,忽略一切摩擦,刚体的合外力矩 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\phi = r_c m g \sin\theta$, $\mathbf{M}_\theta = \mathbf{M}_r = 0$ 。把 $\mathbf{M}_r = 0$ 、 $L_\theta = -mr_c^2 \sin\theta \dot{\phi}$ 、 $L_\phi = mr_c^2 \dot{\theta}$ 代入式(6)化简得

$$\frac{dL_r}{dt} = 0 \quad (10)$$

式(10)表明陀螺仪的自转对应的径向角动量 L_r 的大小不变,陀螺仪的自转角速度不变。

把 $\mathbf{M}_\theta = 0$ 、 $L_\phi = mr_c^2 \dot{\theta}$ 代入式(7),两边同乘 $\sin\theta dt$,变形得

$$\sin\theta dL_\theta + L_r \sin\theta d\theta - mr_c^2 \dot{\phi} \sin\theta \cos\theta d\theta = 0 \quad (11)$$

进一步化简得

$$\sin\theta dL_\theta + L_r \sin\theta d\theta + L_\theta d\sin\theta = 0$$

$$d(L_\theta \sin\theta - L_r \cos\theta) = 0 \quad (12)$$

$L_\theta \sin\theta - L_r \cos\theta$ 的物理意义为陀螺仪在 z 轴方向的角动量,即竖直方向角动量守恒。若陀螺仪的初始条件为对称轴水平,自转角动量方向在水平面内,则陀螺仪竖直方向角动量恒等于零,即

$$L_z = L_\theta \sin\theta - L_r \cos\theta = 0 \quad (13)$$

把 $\mathbf{M}_\phi = r_c m g \sin\theta$ 与 $L_\phi = mr_c^2 \dot{\theta}$ 代入式(8)化简得

$$r_c m g \sin\theta = mr_c^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + (L_r \sin\theta + L_\theta \cos\theta) \dot{\phi} \quad (14)$$

其中 $L_r \sin\theta + L_\theta \cos\theta$ 为陀螺仪对坐标原点的角动量在水平面的投影,也即重力矩不仅使得陀螺仪水平面内的角动量分量以 $\dot{\phi}$ 进动,还使 $L_\phi = mr_c^2 \dot{\theta}$ 随时间变化,即章动角速度 $\dot{\theta}$ 随时间的变化,陀螺仪的运动是同时有进动和章动,两者“竞争”。

2.2 陀螺仪的动力学分析

本文讨论的初始条件为 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 、 $\phi_0 = 0$ 、 $\dot{\theta}_0 = 0$ 、 $\dot{\phi}_0 = 0$ 的情况,初始陀螺仪的对称轴水平,根据式(13), $L_\theta = L_r \cot\theta = -mr_c^2 \sin\theta \dot{\phi}$,可得

$$\dot{\phi} = -\frac{L_r \cot\theta}{mr_c^2 \sin\theta} \quad (15)$$

由于 $\dot{\phi}$ 由0开始逐渐变大,当 $\dot{\phi}$ 很小时,式(14)右侧第一项占主导, θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 开始变大,即陀螺仪质心开始下沉,这个过程中随着极角 θ 变大,由式(15)分析可得随着 θ 变大进动的角速度 $\dot{\phi}$ 变大,极向角动量 L_θ 也变大;所以式(14)等号右侧第二项 $(L_r \sin\theta + L_\theta \cos\theta) \dot{\phi} = L_r^2 \cot\theta + L_\theta \cos\theta \dot{\phi}$ 随着 θ 变大增大, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ 变小,小于零后,章动由加快变为减慢直到 $\dot{\theta} = 0$,章动到最低点。此时进动角速度达到最大值;当陀螺仪的质心开始抬起,同样

的分析进动角速度减小,当抬起到释放的高度,进动角速度变为零;回到初始条件,这个过程周而复始进行。

式(14)变形化简为

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\left(\frac{L_r}{mr_c^2} - \dot{\phi}\cos\theta\right)\sin\theta\dot{\phi} + \frac{g}{r_c}\sin\theta \quad (16)$$

2.3 Matlab 数值模拟求解

在 $\dot{\phi}$ 与 θ 较小时,该方程与简谐振动动力学方程趋近,所以章动类似简谐振动。利用式(15)、式(16)离散可数值分析陀螺仪的质心的运动轨迹和章动的频率,取 $Lr = 4\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 、 $r_c = 0.3\text{m}$ 、 $m = 2.5\text{kg}$ 、 $g = 9.81\text{m/s}^2$,初始条件为: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ 、 $\phi_0 = 0$ 、 $\dot{\theta}_0 = 0$ 、 $\dot{\phi}_0 = 0$ 。Matlab 编程数值求解得陀螺仪章动角与进动角之间的关系如图 3 所示,质心的三维轨迹图如图 4 所示,章动角速度与进动角速度关于时间的曲线如图 5 所示,图 5 很明显显示了进动与章动的“竞争关系”和类似“简谐振动”,图 5 中的 t_1 时刻,当章动角达到最大值时,章动角速度为“零”,此刻进动角速度达到“最大值”; t_2 时刻当章动到初始释放位置时,章动角速度与进动角速度同时回到零,与不考虑耗散力做功的机械能守恒结论一致,数值仿真结果与很多学者其他方法的数值解一致。^[7,8]

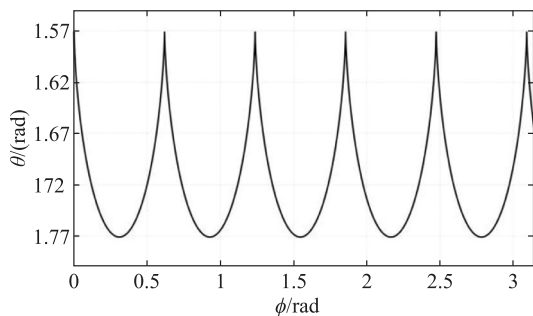


图 3 章动角与进动角的关系图

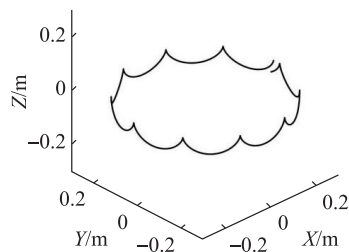


图 4 陀螺仪质心的三维轨迹

如果初始时刻陀螺仪对称轴不在水平面内,

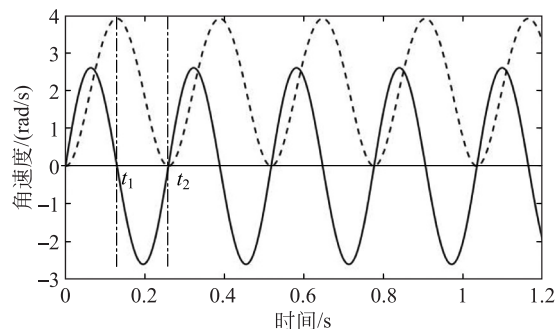


图 5 章动角速度与进动角速度关于时间的关系,实线是章动角速度,虚线是进动角速度

只改变式(13)让其等式右侧为初始角动量值即可,基于本文推导的动力学方程,可以调整自转角动量,质心位置,质量,初始条件等来验证陀螺仪的更复杂运动。数值模拟结果表明如果 L_r 很大,章动角度非常小,实验中由于阻尼章动角速度逐渐衰减为零,进动角速度趋近于定值,所以一般力学教材只讨论进动,忽略章动。

3 结语

本文推导了球坐标系下的角动量定理,应用其对陀螺仪的定点运动进行了动力学分析,在忽略摩擦的理想情况下得出三个结果:陀螺仪自转角速度不变;陀螺仪对过定点的竖直轴的角动量守恒;陀螺仪的进动与章动的动力学方程。对动力学方程数值模拟求解,给出了普通物理阶段的学生就可以理解的陀螺仪的进动与章动清晰的物理图像;本文只使用了角动量定理,没有用到机械能守恒,理论思路清晰、简单、易理解。

参 考 文 献

- [1] 廖耀发,余守宪. 陀螺与陀螺仪进动及章动的一种初等分析[J]. 湖北工业学院学报, 2004, (5): 43-46.
LIAO Y F, SHE S X. An elementary analysis of precession and nutation of top and gyroscope[J]. Journal of Hubei University of Technology, 2004, (5): 43-46. (in Chinese)
- [2] 常振军,张志利,周召发. 陀螺仪进动与章动运动分析[J]. 传感器与微系统, 2012(9): 54-56.
CHANG Z J, ZHANG Z L, ZHOU Z F. Movement analysis of precession and nutation of gyroscope[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2012(9): 54-56. (in Chinese)
- [3] 施鹏毅,涂展春. 对球坐标系质点加速度的理解与严格推导[J]. 大学物理, 2020, 39(7): 60-62, 65.

- SHI P Y, TU Z C. The intuitive understanding and strict derivation of particle acceleration in spherical coordinate system[J]. College Physics, 2020, 39(7): 60-62, 65. (in Chinese)
- [4] 赵凯华, 罗蔚茵. 力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 195-196.
- ZHAO K H, LUO Y Y. Mechanics[M]. 4 th ed. Beijing: Higher Education Press, 2004: 195-196. (in Chinese)
- [5] 邵怀华, 卓玉霖. 陀螺进动中的“角动量不守恒”问题[J]. 物理与工程, 2018, 28(6): 39-42.
- SHAO H H, ZHUO Y L. The explanation of “non conservation of angular momentum” in gyroscope precession[J]. Physics and Engineering, 2018, 28(6): 39-42. (in Chinese)
- [6] 张汉壮. 力学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 147-148.
- ZHANG H Z. Mechanics[M]. 4 th ed. Beijing: Higher Education Press, 2019: 147-148. (in Chinese)
- [7] 刘贤雨. 对称陀螺在重力场中定点转动的分析[J]. 大学物理, 2020, 39(8): 51-57, 67.
- LIU X Y. Analysis of the rotation modes of the symmetric top around fixed point in gravitational field[J]. College Physics, 2020, 39(8): 51-57, 67. (in Chinese)
- [8] 熊永建. 基于解析结果的拉格朗日陀螺运动特性分析[J]. 大学物理, 2023, 42(2): 1-5, 17.
- XIONG Y J. Motion characteristics of Lagrange gyroscope based on analytical results[J]. College Physics, 2023, 42(2): 1-5, 17. (in Chinese)
- (上接第 61 页)
- [6] 李济魁, 张福林. 非完全弹性碰撞问题的讨论[J]. 物理与工程, 2022, 32(2): 31-35.
- LI J K, ZHANG F L. Discussion on the problem of incomplete elastic collision[J]. Physics and Engineering, 2022, 32(2): 31-35. (in Chinese)
- [7] 邱红梅, 秦吉红, 徐美, 等. 碰撞问题中的动量和角动量守恒辨析[J]. 大学物理, 2023, 42(10): 6-9, 30
- QIU H M, QIN J H, XU M, et al. Analysis of conservation of momentum and angular momentum in collision problems[J]. College Physics, 2023, 42(10): 6-9, 30. (in Chinese)
- [8] 邱晓燕, 唐志海. 一道力学碰撞问题中动量守恒与角动量守恒辨析[J]. 物理教学探讨, 2011, 29(11): 40-41.
- QIU X Y, TANG Z H. Analysis of conservation of momentum and conservation of angular momentum in a mechanical collision problem[J]. Journal of Physics Teaching, 2011, 29(11): 40-41. (in Chinese)