转动惯量张量教学内容创新实践

郑　华[1]　张文超[1]　王新刚[1]　朱励霖[2]　刘星泉[3]

([1]陕西师范大学物理学与信息技术学院，陕西 西安　710119；[2]四川大学物理学院，四川 成都　610064；[3]四川大学原子核科学技术研究所，四川 成都　610064)

摘　要　张量是理论物理中非常重要的一个概念。转动惯量张量是本科课程中学生第一次接触张量这个概念。本文尝试通过对转动惯量张量教学内容的创新，对刚体转动惯量张量的教学内容进行重新编排，先计算刚体定点转动角动量，再引入矩阵形式，最后引进转动惯量张量、并矢的概念及其计算规则。让学生理解张量的引入是自然而然的，只是对问题描述数学形式的一种，但能带来方便。以此为切入点，为学生后续学习包含张量的理论打下坚实的基础，同时培养学生的创新思维。

关键词　张量；转动惯量；分析力学；并矢

THE INNOVATION AND PRACTICE IN TEACHING THE MOMENT OF INERTIA TENSOR

ZHENG Hua[1]　**ZHANG Wenchao**[1]　**WANG Xingang**[1]　**ZHU Lilin**[2]　**LIU Xingquan**[3]

([1] School of Physics & Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710119;

[2] College of Physics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064;

[3] Institute of Nuclear Science and Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064)

Abstract　Tensors are a very important concept in theoretical physics. The inertia tensor is the first concept of tensors that students encounter in undergraduate courses. This paper attempts to innovate the teaching content of the inertia tensor by reorganizing the teaching content of the inertia tensor of rigid bodies. It starts with calculating the angular momentum of a rigid body rotating about a fixed point, then introduces the matrix form, and finally introduces the concept of the inertia tensor, dyadic notation, and their calculation rules. This approach helps students understand that the introduction of tensors is natural and is just a mathematical form of problem description, but it brings convenience. Using this as a starting point, it lays a solid foundation for students' subsequent learning of theories involving tensors and also cultivates their innovative thinking.

Key words　tensor; moment of inertia; analytical mechanics; dyadic

刚体转动是大学本科课程分析力学或理论力学中的重难点内容之一，包括刚体的定轴转动与定点转动[1-4]。对于刚体的定轴转动，因为角动量方向与角速度方向平行，只需要引入转动惯量(标量)就可以描述。从方程形式上看可以让转动问题与平动问题类比，相对简单，容易被学生接受。但在讨论刚体定点转动时，由于刚体角动量方向与角速度方向不平行，会引入转动惯量张量或并矢的概念，同时还需要引入并矢的计算规则。这是学生在本科阶段首次接触张量或并矢的概念，

收稿日期：2025-05-25

基金项目：国家自然科学基金(11905120)资助。

通信作者：郑华，zhengh@snnu.edu.cn。

引文格式：郑华，张文超，王新刚，等．转动惯量张量教学内容创新实践[J]．物理与工程，2025，35(6)：52-55．

Cite this article: ZHENG H, ZHANG W C, WANG X G, et al. The innovation and practice in teaching the moment of inertia tensor[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 52-55. (in Chinese)

也是讲授刚体定点转动的一个难点。不同的教科书对此问题的切入点不同。有的是直接引入并矢的定义及计算规则[1]；有的是通过计算刚体的转动角动量并引入转动惯量的矩阵形式[2,3]；有的是通过计算刚体的转动动能并引入转动惯量的矩阵形式[4]。张量是理论物理中的一个非常重要的概念，比如电动力学中的电磁张量，场论中的协变、逆变张量，广义相对论中的高阶张量[5]等。更深层次的是张量的客观性和非坐标依赖性，这些是其作为数学和物理学工具的核心特征，体现了与参考系或坐标系选择无关的几何与物理本质。同时，张量在坐标变换下满足分量变换规则，随着张量的阶数增加会变得更复杂[5]。涉及张量的高阶课程，其学习难度会增加非常多。因此，在本科学习中让学生能理解张量的内涵意义重大。

关于讨论刚体转动惯量的文章，主要集中在转动惯量张量的具体计算、转动惯量张量在不同坐标系下的变换及历史[6-7]。在文献[8]中，我们按照逆向思维引导学生提问，是否必须引入转动惯量张量或并矢这个物理量才能描述刚体转动？当然答案是否定的。表明刚体转动惯量张量或并矢的引入，只是一种新的数学表示形式，但对物理问题的描述更方便，更能体现物理内涵。这是我们对转动惯量张量的教学方法进行创新的起点。同时转动惯量张量及并矢计算规则的引入是对学生之前所学知识的拓展，是培养学生的创新思维的土壤。同时告诉学生，创新不是无源之水，不是空中楼阁，而是植根于已有的知识对实际问题提出的解决方案。

本文通过计算刚体定点转动角动量，展示作者如何自然引入刚体转动惯量张量及并矢概念的教学实践，让学生知其然并知其所以然，降低学生学习此知识点的难度。同时通过此知识点中从0到1的创造性，强调在教学中培养学生的创新思维。值得指出的是，人工智能赋能本科教学已经开始实施，但在这种深度理解与创造性上，还无法完全替代老师。

1 刚体定点转动的角动量

由于生活中常见的刚体转动是定轴转动，教学中可以通过玩具陀螺展示刚体的定点转动，并举例我国卫星飞行姿态的调整等。刚体可以看作是一个多质点系统且质点与质点之间的相对距离不变。对于定点转动的刚体，其角动量为

$$\boldsymbol{L}=\sum_{a=1}^{n}\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a=\sum_{a=1}^{n}m_a\boldsymbol{r}_a\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_a)\tag{1}$$

利用矢量叉乘公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\tag{2}$$

将式(1)中的矢量计算展开

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\sum_{a=1}^{n}m_a[(\boldsymbol{r}_a\cdot\boldsymbol{r}_a)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}_a\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_a]\\&=\sum_{a=1}^{n}m_a[(x_a^2+y_a^2+z_a^2)\boldsymbol{\omega}-\\&\quad(x_a\omega_x+y_a\omega_y+z_a\omega_z)\boldsymbol{r}_a]\end{aligned}\tag{3}$$

取角动量的 x 分量

$$\begin{aligned}L_x&=\sum_{a=1}^{n}m_a[(x_a^2+y_a^2+z_a^2)\omega_x-\\&\quad(x_a\omega_x+y_a\omega_y+z_a\omega_z)x_a]\\&=\sum_{a=1}^{n}m_a(y_a^2+z_a^2)\omega_x-\sum_{a=1}^{n}m_ax_ay_a\omega_y-\\&\quad\sum_{a=1}^{n}m_ax_az_a\omega_z\end{aligned}\tag{4}$$

同理可得角动量的 y，z 分量

$$\begin{aligned}L_y=&-\sum_{a=1}^{n}m_ay_ax_a\omega_x+\sum_{a=1}^{n}m_a(x_a^2+z_a^2)\omega_y-\\&\sum_{a=1}^{n}m_ay_az_a\omega_z\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}L_z=&-\sum_{a=1}^{n}m_az_ax_a\omega_x-\sum_{a=1}^{n}m_az_ay_a\omega_y+\\&\sum_{a=1}^{n}m_a(x_a^2+y_a^2)\omega_z\end{aligned}\tag{6}$$

可见，刚体定点转动角动量的描述不需要引入转动惯量张量的概念。同时，式(4-6)可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{a=1}^{n}m_a(y_a^2+z_a^2) & -\sum_{a=1}^{n}m_ax_ay_a & -\sum_{a=1}^{n}m_ax_az_a\\ -\sum_{a=1}^{n}m_ay_ax_a & \sum_{a=1}^{n}m_a(x_a^2+z_a^2) & -\sum_{a=1}^{n}m_ay_az_a\\ -\sum_{a=1}^{n}m_az_ax_a & -\sum_{a=1}^{n}m_az_ay_a & \sum_{a=1}^{n}m_a(x_a^2+y_a^2)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}\tag{7}$$

通过变量代换，将式(7)进行适当简化，定义变量

$$I_{xx}=\sum_{a=1}^{n}m_a(y_a^2+z_a^2),\ I_{xy}=I_{yx}=-\sum_{a=1}^{n}m_a x_a y_a$$
$$I_{yy}=\sum_{a=1}^{n}m_a(z_a^2+x_a^2),\ I_{yz}=I_{zy}=-\sum_{a=1}^{n}m_a y_a z_a$$
$$I_{zz}=\sum_{a=1}^{n}m_a(x_a^2+y_a^2),\ I_{zx}=I_{xz}=-\sum_{a=1}^{n}m_a z_a x_a \tag{8}$$

可得

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}\tag{9}$$

角动量与角速度均是矢量,只需要一个角标描述。角速度列向量前面的系数矩阵对应着一个物理量,需要两个角标才能完全描述其全部信息,与矢量不同,称为转动惯量张量。值得指出的是,刚体转动惯量张量矩阵是对称实矩阵,利用式(9)可以很方便地找到刚体的惯量主轴方向,方便刚体运动问题的解决。

2 转动惯量张量与并矢

任意一矢量可以用单位矢量展开,也可用列向量描述,它们是描述矢量的不同的数学表示。原则是不同的数学表示需保留所描述量的全部信息,信息不能丢失。那么,转动惯量张量对应的矩阵能否用类似于矢量的记法?如果有,如何包含转动惯量张量所有的信息,相应的计算规则又是什么?

转动惯量张量矩阵中的每一个矩阵元需要两个指标,自然的想法是如果采用类似矢量的记法,则需要两次点乘,且这两次点乘需要彼此独立。实现的方式是将两个矢量并排写在一起,即并矢,彼此之间不进行运算。矢量 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 记为

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}_i+A_j\boldsymbol{e}_j+A_k\boldsymbol{e}_k \tag{10}$$
$$\boldsymbol{B}=B_i\boldsymbol{e}_i+B_j\boldsymbol{e}_j+B_k\boldsymbol{e}_k \tag{11}$$

由矢量 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 构造的并矢为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}=&A_iB_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i+A_iB_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j+A_iB_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k+\\&A_jB_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i+A_jB_j\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j+A_jB_k\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k+\\&A_kB_i\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i+A_kB_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j+A_kB_k\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k\end{aligned}\tag{12}$$

其有9个分量。可见并矢包含的信息量与3×3实矩阵的信息量是一样的。可以通过两次点乘得到各分量的信息,例如

$$(\boldsymbol{AB})_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{e}_j=A_iB_j \tag{13}$$

从以上的分析可以猜想,原则上,并矢可以是刚体转动惯量张量的另一种数学表示。利用并矢的概念,角速度矢量可以改写为

$$\boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{3}\omega_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{14}$$

刚体定点转动的角动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\sum_{a=1}^{n}m_a[(\boldsymbol{r}_a\cdot\boldsymbol{r}_a)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}_a\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_a]\\&=\sum_{a=1}^{n}m_a[(r_a^2\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{r}_a\cdot\boldsymbol{\omega}]\\&=\sum_{a=1}^{n}m_a[(r_a^2\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i)-\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{r}_a]\cdot\boldsymbol{\omega}\\&=\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\end{aligned}\tag{15}$$

记转动惯量并矢为

$$\overleftrightarrow{I}=\sum_{a=1}^{n}m_a\left[\left(r_a^2\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i\right)-\boldsymbol{r}_a\boldsymbol{r}_a\right]\tag{16}$$

按照并矢的计算规则,角动量的 x 分量为

$$\begin{aligned}L_x&=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{L}=\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e}_x\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\sum_{i=1}^{3}\omega_i\boldsymbol{e}_i\\&=I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z\end{aligned}\tag{17}$$

同理可得角动量的 y,z 分量

$$L_y=I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y+I_{yz}\omega_z \tag{18}$$
$$L_z=I_{zx}\omega_x+I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z \tag{19}$$

转动惯量张量的分量与式(8)一致。由此可见,利用并矢也可以对刚体的定点转动角动量进行描述,但形式上非常简洁 $\boldsymbol{L}=\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$,与平动的动量公式形式一致,让转动与平动具有了对称性。

3 刚体转动的动能

刚体的运动可以分解为刚体质心的平动与绕质心的转动,其动能可以分解为刚体质心平动动能与绕刚体质心转动动能之和,即

$$T=T_{\mathrm{trans}}+T_{\mathrm{rot}} \tag{20}$$

其中绕刚体质心转动动能为

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{rot}}&=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}m_a\boldsymbol{v}_a^2=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}m_a\boldsymbol{v}_a\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_a)\\&=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\boldsymbol{p}_a\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_a)=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\end{aligned}\tag{21}$$

可见,刚体绕质心转动的动能也可以由转动惯量

张量并矢描述，且形式简洁。

4 教学反馈

在笔者对所带本科生班级实施本文中讨论的关于刚体的转动惯量张量和并矢的教授后，学生普遍反馈比教材[1-2,4]中的对应内容逻辑性更强，更容易理解为什么引入转动惯量张量和并矢及相应的计算规则，理解了并矢是转动惯量张量的另一种数学形式。更加可贵的是从刚体的转动惯量张量和并矢的构造过程中体验到了从0到1的创新过程和创新的内涵，拓展了思维。这与笔者之前按照教材中的内容对此知识点进行教授的学生反馈形成鲜明对比，表明了本文中的讨论在教学实践中得到了学生的肯定。

5 结语

本文通过讨论刚体的转动惯量张量和并矢的自然引入——先计算刚体定点转动角动量，再引入矩阵形式，最后引进转动惯量张量、并矢的概念及其计算规则，让学生不仅知其然还知其所以然，亲历一次从0到1的构造范式，降低学习刚体定点转动问题的难度。转动惯量张量矩阵的引入，方便寻找刚体的惯量主轴，使得刚体问题容易解决。引入转动惯量并矢，使刚体的物理量表达式更加简洁，使转动与平动的公式具有对称性。我们强调，只要不丢失信息，对同一物理量可以有不同的数学描述形式，往往引入新的数学描述形式会带来对问题描述的方便。但创造引入新的数学形式时，同时也需要创造性地引入新的计算规则。例如数学、物理中引入求和符号与求和哑标时，会引入不同求和哑标不能用同一个符号的规则。在矩阵力学建立的过程中，海森堡在不知道矩阵计算规则的情况下，为描述氢原子光谱时创造性地给出了与矩阵计算规则一样的数学表达式。通过刚体的转动惯量张量和并矢的引入问题，让学生体会到创新并非凭空而来，是根植于已有知识为解决问题主动创造更优描述方式的必然结果，这与当前大学物理学专业“厚数理基础、强创新能力”的培养目标同频共振。

参 考 文 献

[1] 刘连寿. 理论物理教程[M]. 北京:高等教育出版社，2003.
LIU L S. Course of theoretical physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. (in Chinese)

[2] GOLDSTEIN H, POOLE C, SAFKO J. 经典力学[M]. 北京:高等教育出版社,2018.
GOLDSTEIN H, POOLE C, SAFKO J. Classical mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2018.

[3] 管靖,刘文彪. 理论力学简明教程[M]. 北京:科学出版社,2008.
GUAN J, LIU W B. A concise course in theoretical physics [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)

[4] 朗道,栗弗席兹著. 力学[M]. 李俊峰,鞠国兴,译校. 北京:高等教育出版社，2007.
LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Mechanics[M]. LI J F, JU G X, Trans. Beijing: Higher Education Press, 2007. (in Chinese)

[5] 赵峥,刘文彪. 广义相对论基础[M]. 北京:清华出版社，2010.
ZHAO Z, LIU W B. Foundations of general relativity[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2010. (in Chinese)

[6] 黄宏炜. 关于惯量张量的注释[J]. 物理与工程,2002,12(3):27-30.
HUANG H W. A note on the inertia tensor[J]. Physics and Engineering, 2002, 12(3): 27-30. (in Chinese)

[7] 俞琛. 惯量张量的一些问题[J]. 中央民族大学学报(自然科学版),1994, 3(1):72-75.
YU C. Notes on rotational inertial tensor[J]. Journal of MinZu University of China (Natural Sciences Edition), 1994, 3(1): 72-75. (in Chinese)

[8] 郑华,张文超,王新刚,等. 分析力学助力逆向思维培养[J]. 广西物理,2024,45(4):48-53.
ZHENG H, ZHANG W C, WANG X G, et al. Analytical mechanics helps cultivate reverse thinking [J]. Guangxi Physics, 2024, 45(4): 48-53. (in Chinese)

(上接第51页)

[17] 李永平，张帆. 环形电流的磁场分布[J]. 济南大学学报，1998，8(4)：61-64.
LI Y P, ZHANG F. The distribution of magnetic field of annular electric current[J]. Journal of Jinan University, 1998, 8(4): 61-64. (in Chinese)

[18] 彭中汉，蔡领. 圆电流平面上的磁场分布[J]. 大学物理，1983，(11)：12-16.
PENG Z H, CAI L. Magnetic field distribution in the plane of a circular current[J]. College Physics, 1983, (11): 12-16. (in Chinese)

[19] 赵凯华，陈熙谋. 新概念物理教程·电磁学[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2006：127-128.
ZHAO K H, CHEN X M. New conceptual physics course: Electromagnetism[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006: 127-128. (in Chinese)