

磁感线的取样方法和绘制 ——以圆电流磁场磁感线的可视化为例

宋立涛¹ 何 杰² 王杰芳¹

(¹ 郑州大学物理学院、中原之光实验室, 河南 郑州 450001; ² 河南工业大学物理学院, 河南 郑州 450001)

摘 要 磁感线在许多磁场相关问题的分析中发挥着重要作用, 以往文献关于磁感线可视化方法的讨论主要集中在“如何使磁感线上每一点的切线方向与该点的磁感应强度的方向一致”, 而忽略了“如何使磁感线疏密程度反映磁场强弱”这一物理要求。本文基于 Python 编程语言, 以圆电流磁场磁感线的可视化方法为例, 具体介绍了如何使绘制出的磁感线满足“疏密程度反映磁场强弱”这一物理要求的取样方法和实现过程。该方法原理简单, 通用性强。

关键词 电磁学; 磁感线; 可视化; Python

SAMPLING METHODS AND PLOTTING OF MAGNETIC FIELD LINES —TAKING THE VISUALIZATION OF MAGNETIC FIELD LINES IN A CIRCULAR CURRENT AS AN EXAMPLE

SONG Litao¹ HE Jie² WANG Jiefang¹

(¹ School of Physics and Laboratory of Zhongyuan Light, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan 450001;

² School of Physics, Henan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450001)

Abstract Magnetic field lines play a significant role in the analysis of many magnetic field-related problems. Previous literature on visualization methods of magnetic field lines has predominantly focused on “ensuring that the tangential direction at each point along a field line aligns with the direction of the local magnetic induction intensity vector”, while neglecting the physical requirement of “using line density to reflect magnetic field strength”. Based on Python programming language, taking the visualization method of magnetic field lines of the magnetic field of a circular current as an example, the sampling method and implementation process of making the drawn magnetic field lines meet the physical requirement of “the density of the lines reflects the strength of the magnetic field” are introduced in detail. This method features simple principles and strong general applicability.

Key words electromagnetism; magnetic field lines; visualization; Python

为了形象的描述磁场的空间分布, 物理学家提出了磁感线的概念。磁感线在许多磁场相关问题

的分析中发挥着重要作用。圆电流是电磁学理论中的基本模型, 可作为许多复杂电流的基本单

收稿日期: 2025-03-25

基金项目: 郑州大学数智化一流课程(2024ZZUYLKC017); 郑州大学教改项目(2024ZZUJGXM053); 河南工业大学智慧课程(2024zhkc-65)。

通信作者: 何杰, hejiehb@163.com。

引文格式: 宋立涛, 何杰, 王杰芳. 磁感线的取样方法和绘制——以圆电流磁场磁感线的可视化为例[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 47-51, 55.

Cite this article: SONG L T, HE J, WANG J F. Sampling methods and plotting of magnetic field lines—Taking the visualization of magnetic field lines in a circular current as an example[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 47-51, 55. (in Chinese)

元。例如在分析密绕螺线管、密绕螺绕环或亥姆霍兹线圈的磁场时,经常将它们视作圆电流的组合。目前被广泛使用的《电磁学》教材^[1-3]中给出的圆电流磁感线的分布图多为定性而非定量分布图。为弥补这种不足,已有不少作者定量讨论了圆电流的磁场分布和磁感线分布图^[4-18]。文献[5]指出文献[7]和文献[9]所给出的磁感线分布图存在较大差异,且均不符合“磁感线疏密程度反映磁场强弱”的物理要求。文献[5]对圆电流磁感线分布图进行了修正,但仅是基于磁感应强度的分布确定了一个磁感线集,没有给出具体方法,也无定量讨论。随后发表的文献[4]给出的磁感线分布图同样不符合“磁感线疏密程度反映磁场强弱”的物理要求。

Python 作为一种易学易用的高级程序设计语言,具有大量的第三方库,非常适合用来做科学计算、数值模拟以及数据可视化等工作。由于其免费,编程效率高,可以用来替代 Matlab、Mathematica 等商用软件用于电磁学的辅助教学。本文基于 Python 编程语言,以圆电流磁场的磁感线可视化方法为例,具体介绍了如何使绘制出的磁感线满足“疏密程度反映磁场强弱”这一要求的取样方法和实现过程。该方法原理简单,易于推广,引入到电磁学的辅助教学,可以帮助学生更好的理解圆电流磁场的空间分布特征。

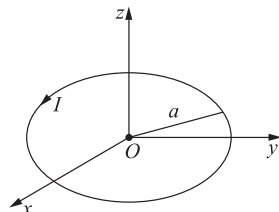


图1 圆电流与直角坐标系

1 圆电流磁感应强度的表达式和磁感线方程

设圆电流的半径为 a , 电流为 I , 以其圆心 O 为坐标原点建立如图1所示的直角坐标系, 使圆电流位于坐标系的 xOy 平面内。由电流分布的对称性可知, 空间磁场关于 z 轴呈轴对称分布。因而可将求解圆电流磁场空间分布的问题简化为求解 xOz 平面上磁场分布的问题。如无特别说明, 下面讨论中的磁感应强度和磁感线方程均指 xOz 平面内的磁感应强度和磁感线方程。

由于很多文献都对圆电流磁感应强度的表达式和磁感线方程进行过详细推导^[5,8-11,15-18], 这里直接给出结论。设 $P(x, z)$ 为 xOz 平面内任意一点, 则对于磁感应强度有

$$B_x = \frac{azB_d}{\pi x [(a+x)^2 + z^2] \sqrt{(a-x)^2 + z^2}} \cdot \left\{ (a^2 + x^2 + z^2) \text{EllipticE} \left[\frac{-4ax}{(a-x)^2 + z^2} \right] - [(a+x)^2 + z^2] \text{EllipticK} \left[\frac{-4ax}{(a-x)^2 + z^2} \right] \right\} \quad (1)$$

$$B_y = 0 \quad (2)$$

$$B_z = \frac{aB_d}{\pi [(a+x)^2 + z^2] \sqrt{(a-x)^2 + z^2}} \cdot \left\{ (a^2 - x^2 - z^2) \text{EllipticE} \left[\frac{-4ax}{(a-x)^2 + z^2} \right] + [(a+x)^2 + z^2] \text{EllipticK} \left[\frac{-4ax}{(a-x)^2 + z^2} \right] \right\} \quad (3)$$

其中, B_x, B_y 和 B_z 分别是磁感应强度的 x, y 和 z 分量, 因而有

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_z \mathbf{k} \quad (5)$$

用磁矢势表示的磁感线方程为

$$|x| A(|x|, z) = C \quad (6)$$

其中

$$A = A_y = \frac{A_d}{\pi x \sqrt{(a-x)^2 + z^2}} \left\{ (a^2 + x^2 + z^2) \cdot \text{EllipticK} \left[\frac{-4ax}{(a-x)^2 + z^2} \right] - [(a-x)^2 + z^2] \text{EllipticE} \left[\frac{-4ax}{(a-x)^2 + z^2} \right] \right\} \quad (7)$$

为磁矢势。在上述公式中, $B_d = \mu_0 I / (2a)$, $A_d = \mu_0 I / 2$, $\text{EllipticK}[x]$ 和 $\text{EllipticE}[x]$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分。

2 圆电流磁场磁感线的取样和绘制

由场点处磁感应强度方向的唯一性可知两磁感线不能相交, 即过空间任意场点都有唯一确定的磁感线。在 xOz 平面内使用式(6)绘制磁感线

时,不同磁感线对应于不同常数 C ,能够绘制的磁感线有无穷多条。在实际绘制中,不可能把所有磁感线都绘制出,要使所绘制的磁感线的疏密程度反映磁场强弱,需要合理取样,即需合理选择绘制哪些位置处的磁感线。

2.1 两个结论

1) 结论 1

如图 2 所示,在磁场中的 a 、 b 两场点处分别取面元 dS_a 和 dS_b 。设 a 处磁感强度的大小为 B_a ,磁感线密度为 n_a ,穿过 dS_a 的磁感线数目为 dN_a ,过 dS_a 磁通量为 $d\Phi_a$, b 处磁感强度的大小为 B_b ,磁感线密度为 n_b ,穿过 dS_b 的磁感线数目为 dN_b ,过 dS_b 磁通量为 $d\Phi_b$,且 dS_a 和 dS_b 都与它们所在处的磁感应强度方向垂直。则有

$$dN_a = n_a dS_a \quad (8)$$

$$dN_b = n_b dS_b \quad (9)$$

若磁感应强度的大小与磁感线密度成正比,则有

$$\frac{B_a}{B_b} = \frac{n_a}{n_b} \quad (10)$$

变形可得

$$\frac{B_a dS_a}{B_b dS_b} = \frac{n_a dS_a}{n_b dS_b} = \frac{dN_a}{dN_b} = \frac{d\Phi_a}{d\Phi_b} \quad (11)$$

取 $d\Phi_a = d\Phi_b$,可得

$$dN_a = dN_b \quad (12)$$

由此可得结论 1:当磁感应强度的大小与磁感线密度成正比时,磁通量相同的面积内穿过的磁感线数目一样多。

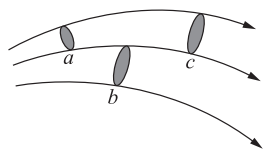


图 2 磁感线和磁感应管

2) 结论 2

如图 2 所示,在点 c 处取面元 dS_c ,选择面元 dS_a 和 dS_c 之间的一段磁感应管^[19],同样假设 c 处磁感强度的大小为 B_c ,磁感线密度为 n_c ,穿过 dS_c 的磁感线数目为 dN_c , dS_c 与其所在处的磁感应强度方向垂直。则有

$$dN_a = dN_c = n_a dS_a = n_c dS_c \quad (13)$$

取 dS_a 、 dS_c 和磁感应管的侧壁组成一闭合高斯面,由磁场的高斯定理易得

$$B_a dS_a = B_c dS_c \quad (14)$$

式(13)和式(14)联立得

$$\frac{B_a}{n_a} = \frac{B_a dS_a}{n_a dS_a} = \frac{B_c dS_c}{n_c dS_c} = \frac{B_c}{n_c} \quad (15)$$

由此可得结论 2:所绘制的磁感线如果在某一位置处满足磁感应强度的大小与磁感线的密度成正比,则在沿磁感线方向的任意位置处满足相同的正比关系。

据此,有一个简单的方法可以使所绘制磁感线的疏密程度反映磁场强弱,即在磁场中找到一个合适的曲面或平面,把其分割成若干磁通量相同的小区域,每一小区域按一定规则绘制相同数量的磁感线,比如一条。小区域的个数需视情况而定,太多会使磁场较强的区域磁感线过于密集连成一片,太少则不能呈现出磁场空间分布的特征,以能清晰反映磁场空间分布特征即可。下面以圆电流磁场的磁感线的绘制为例,介绍其具体实现方法。

2.2 圆电流磁感线的取样方法

图 3 是圆电流所围圆面内磁感应强度沿径向的分布图,其中横坐标为 r/a , r 为场点到圆电流圆心的距离, a 为圆电流半径,纵坐标为 B/B_0 , B_0 为圆心处磁感应强度的大小。由图可以看出,当 $r/a \rightarrow 1$ 时, B 急剧增加并趋于无穷,这是因为采用了线电流的模型,文献[18]指出此时圆电流可看作无限长直电流。因此 $r/a \rightarrow 1$ 时,磁感线会由于特别密集而连成一片,所以后面选择绘制 $r/a < 0.97$ 范围内的磁感线分布图。

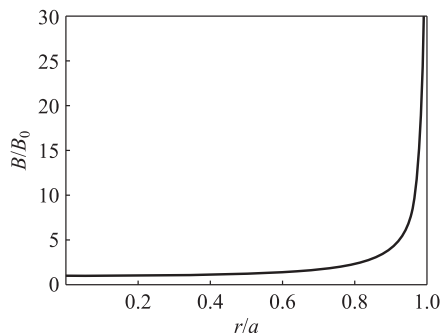


图 3 圆电流所围圆面内磁感强度的径向分布

如图 4 所示,为了使所绘制磁感线的疏密程度反映磁场强弱,根据对称性,在圆电流所围圆面内以 x 轴为对称轴做一系列小扇环,使小扇环的外弧长等于侧边长,且过各小扇环的磁通量都等于某一设定值 $\Delta\Phi$ 。取两相邻小扇环分界线的中心位置 x_i 作为所需绘制的磁感线与圆面的交点,

求出其集合 $\{x_i\}$ 。将 $\{x_i\}$ 代入磁感线方程式(6), 求出对应常数的集合 $\{C_i\}$, 就可利用 Matplotlib 可视化库中的 contour 函数绘制出 xOz 平面内磁感线的分布图。绘制时, 也可选择各小扇环的中心位置进行取样, 两种取样方法所绘制磁感线分布一致, 仅是所绘制的磁感线位置略有不同。

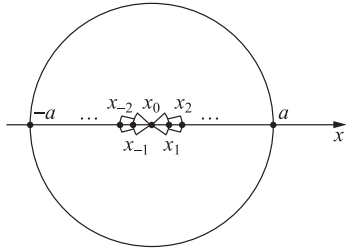


图4 圆电流磁感线的取样方法

由于 x_i 的分布相对于圆心对称, 以下以正半轴 x_i 的求解为例进行讨论。设过第 i 个小扇环的磁通量为 Φ_i , 则有

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} B(r) \cdot \theta_i r \cdot dr \\ &= \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} B(r) \cdot r \cdot dr \quad (16)\end{aligned}$$

其中, θ_i 为第 i 个小扇环所对应圆心角。

在所需计算区间 $[0, 0.97a]$, 取计算步长为 Δx , Δx 足够小, 令式(16)积分上限为 $x_{i-1} + n\Delta x$, n 为整数, ϵ 为一小量, n 从 1 开始取值, 逐次利用 scipy 库中的 quad 数值积分函数对式(16)进行数值积分, 如果某个 n 值使 $|\Phi_i - \Delta\Phi| < \epsilon$, 则取 $x_i = x_{i-1} + n\Delta x$ 。实际操作中, 可取 $x_0 = 0$ 为计算的起点, 小区域磁通量的设定值 $\Delta\Phi$ 则需根据所需绘制磁感线的数目先给定一个试探值, 然后根据求出的 x_i 的个数调整 $\Delta\Phi$ 的大小, 使其满足要求。

这里选择外弧长等于侧边长的小扇环是为了兼顾沿扇环的径向和切向同时满足“磁感线疏密程度反映磁场强弱”的物理要求。如果选择相同圆心角的扇环, 所绘制磁感线沿扇环切向随半径增加会变得越来越稀疏, 且其疏密程度是和所在半径处磁感强度的大小无关的。符合要求的磁感线应该是沿径向变密集的同时, 沿切向也应该变得密集。因而合适的选择为外弧长等于侧边长的小扇环。这样绘制出的磁感线在圆面内的分布似

乎会失去轴对称性, 实则不然, 这里的轴对称性应该理解为等半径处疏密程度一样, 而不是简单的沿对称轴的旋转对称性。

2.3 圆电流磁感线分布图及其讨论

图5是按照上述方法用 Python 语言编程绘制的圆电流磁场在 xOz 平面内的磁感线分布图。图中电流所在位置处两个白色圆形区域的出现, 是由于在进行磁感线取样时设定了 $r/a < 0.97$ 的范围, $1 > r/a > 0.97$ 的区域内没有绘制磁感线。

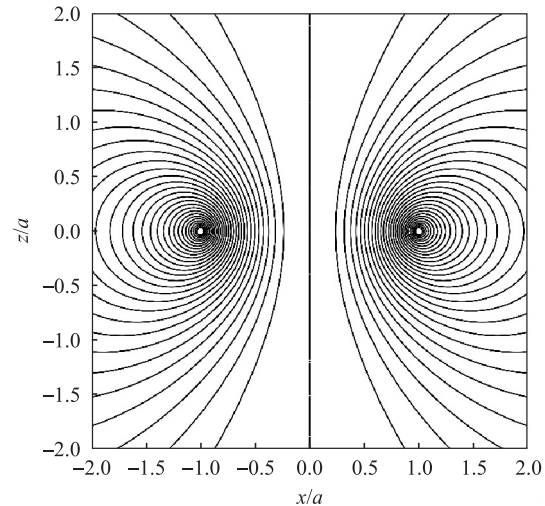


图5 圆电流磁感线分布图

为了验证上述方法的有效性, 我们绘制了 xOz 平面内的磁感应强度大小 $|B|$ 的等值线图, 如图6所示。可以看出, 在临近电流的区域内, 由于磁感应强度迅速增大, 等值线连成了一片。比较图5和图6可以看出, 两图所反映的磁感应强度强弱的分布是一致的。

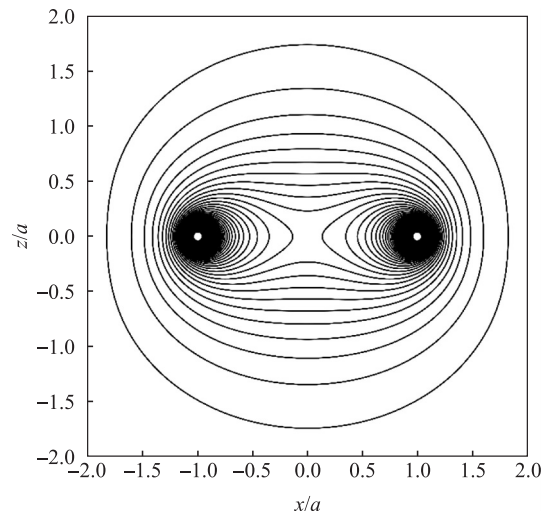


图6 xOz 平面内的磁感应强度大小的等值线图

3 结语

本文基于 Python 编程语言,以圆电流磁场的磁感线可视化方法为例,详细介绍了如何使磁感线满足“疏密程度反映磁场强弱”这一物理要求的取样方法和实现过程。该方法原理简单,易于推广,例如在绘制载流密绕有限长螺线管或椭球形线圈的磁感线时,可以选择通过确定磁感线与其中垂面的交点位置获得常数 C 的序列,绘制出满足要求的磁感线分布图,特别是它们细长时,中垂面上的磁场近似为均匀场,在中垂面上选择均匀分布的场点即可。该方法还具有较强的通用性,不仅适用于使用磁感线方程绘制磁感线,也适用于另外一种常用的绘制磁感线的方法——折线法^[4,7]。前者中该方法可以帮助确定所需绘制磁感线方程的常数 C ,后者中该方法可以帮助得到所需绘制磁感线绘制起点的坐标。

本文介绍的方法简单易懂,可操作性强,有益于电磁学课程的辅助教学,提升学生的学习兴趣和学习课程的获得感。

参 考 文 献

- [1] 赵凯华,陈熙谋. 电磁学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2018: 205. ZHAO K H, CHEN X M. Electromagnetism[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2018: 205. (in Chinese)
- [2] 梁灿彬,秦光戎,梁竹健. 电磁学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980: 289. LIANG C B, QIN G R, LIANG Z J. Electromagnetism[M]. Beijing: People's Education Press, 1980: 289. (in Chinese)
- [3] 贾瑞皋,薛庆忠. 电磁学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2011: 163. JIA R G, XUE Q Z. Electromagnetism[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2011: 163. (in Chinese)
- [4] 李超,洪倩,杨雪冰,等. 环形电流磁场分布及磁感线基于 C++ 的数值模拟[J]. 大学物理实验, 2021, 34(3): 28-30. LI C, HONG Q, YANG X B, et al. Numerical simulation of magnetic field distribution and magnetic field lines of ring-like current based on C++ [J]. Physical Experiment of College, 2021, 34(3): 28-30. (in Chinese)
- [5] 江俊勤. 轴对称磁矢势和磁感线[J]. 大学物理, 2018, 37(1): 30-36. JIANG J Q. Axial symmetry magnetic vector potential and magnetic induction lines[J]. College Physics, 2018, 37(1): 30-36. (in Chinese)
- [6] 郭智勇,刘得军. 一种圆环电流空间磁场数值计算方法[J]. 科学技术与工程, 2013, 13(29): 8715-8720. GUO Z Y, LIU D J. A numerical calculation method for spatial magnetic field of circular current[J]. Science Technology and Engineering, 2013, 13(29): 8715-8720. (in Chinese)
- [7] 董键. Mathematica 与大学物理计算[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013: 186-187. DONG J. Mathematica and university physics calculations [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 186-187. (in Chinese)
- [8] 贾秀敏. 圆形线电流的磁场分布[J]. 河北科技大学学报, 2006, 27(1): 25-27. JIA X M. Magnetic field distribution of circular current[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2006, 27(1): 25-27. (in Chinese)
- [9] 张星辉. 圆电流磁感线的分布及磁感应强度的函数表达式[J]. 大学物理, 2006, 25(1): 32-37. ZHANG X H. The distribution of the magnetic line of force and the formula for magnetic induction induced by a circular current [J]. College Physics, 2006, 25(1): 32-37. (in Chinese)
- [10] 朱平. 圆电流空间磁场分布[J]. 大学物理, 2005, 24(9): 13-17. ZHU P. Spatial distribution of magnetic field generated by current loop[J]. College Physics, 2005, 24(9): 13-17. (in Chinese)
- [11] 代洪霞. 圆形电流面内的磁场分布研究[J]. 渝西学院学报(自然科学版), 2005, 4(1): 30-31. DAI H X. Study on magnetic induction distribution in round electric plan[J]. Journal of Western Chongqing University (Nature Sciences Edition), 2005, 4(1): 30-31. (in Chinese)
- [12] 李建青. 用毕奥-萨伐尔定律计算磁偶极子的磁场分布[J]. 物理与工程, 2004, 14(4): 14-15, 47. LI J Q. Calculating the magnetic field of a magnetic dipole by Biot-Savart's law[J]. Physics and Engineering, 2004, 14(4): 14-15, 47. (in Chinese)
- [13] 吴崇试. 对《圆形线电流的磁感应强度》一文的补正[J]. 大学物理, 2004, 23(4): 63. WU C S. Corrections to the article "Magnetic induction of a circular current"[J]. College Physics, 2004, 23(4): 63. (in Chinese)
- [14] 于凤军. 圆形面偶极层与圆电流的电场[J]. 大学物理, 2001, 20(2): 19-20, 26. YU F J. Electromagnetic fields due to a circular dipole layer and a circular current[J]. College Physics, 2001, 20(2): 19-20, 26. (in Chinese)
- [15] 李海,张玉颖. 圆形线电流的磁感应强度[J]. 大学物理, 1999, 18(6): 21-23. LI H, ZHANG Y Y. Magnetic induction of a circular current [J]. College Physics, 1999, 18(6): 21-23. (in Chinese)
- [16] 向裕民. 圆环电流磁场的普遍分布[J]. 大学物理, 1999, 18(1): 14-17. XIANG Y M. Space distribution of magnetic field generated by a ringed current[J]. College Physics, 1999, 18(1): 14-17. (in Chinese)

(下转第 55 页)

张量并矢描述,且形式简洁。

4 教学反馈

在笔者对所带本科生班级实施本文中讨论的关于刚体的转动惯量张量和并矢的教授后,学生普遍反馈比教材^[1-2,4]中的对应内容逻辑性更强,更容易理解为什么引入转动惯量张量和并矢及相应的计算规则,理解了并矢是转动惯量张量的另一种数学形式。更加可贵的是从刚体的转动惯量张量和并矢的构造过程中体验到了从 0 到 1 的创新过程和创新的内涵,拓展了思维。这与笔者之前按照教材中的内容对此知识点进行教授的学生反馈形成鲜明对比,表明了本文中的讨论在教学实践中得到了学生的肯定。

5 结语

本文通过讨论刚体的转动惯量张量和并矢的自然引入——先计算刚体定点转动角动量,再引入矩阵形式,最后引进转动惯量张量、并矢的概念及其计算规则,让学生不仅知其然还知其所以然,亲历一次从 0 到 1 的构造范式,降低学习刚体定点转动问题的难度。转动惯量张量矩阵的引入,方便寻找刚体的惯量主轴,使得刚体问题容易解决。引入转动惯量并矢,使刚体的物理量表达式更加简洁,使转动与平动的公式具有对称性。我们强调,只要不丢失信息,对同一物理量可以有不同的数学描述形式,往往引入新的数学描述形式会带来对问题描述的方便。但创造引入新的数学形式时,同时也需要创造性地引入新的计算规则。例如数学、物理中引入求和符号与求和哑标时,会引入不同求和哑标不能用同一个符号的规则。在矩阵力学建立的过程中,海森堡在不知道矩阵计算规则的情况下,为描述氢原子光谱时创造性地给出了与矩阵计

算规则一样的数学表达式。通过刚体的转动惯量张量和并矢的引入问题,让学生体会到创新并非凭空而来,是根植于已有知识为解决问题主动创造更优描述方式的必然结果,这与当前大学物理专业“厚数理基础、强创新能力”的培养目标同频共振。

参 考 文 献

- [1] 刘连寿. 理论物理教程[M]. 北京:高等教育出版社, 2003.
LIU L S. Course of theoretical physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. (in Chinese)
- [2] GOLDSTEIN H, POOLE C, SAFKO J. 经典力学[M]. 北京:高等教育出版社, 2018.
GOLDSTEIN H, POOLE C, SAFKO J. Classical mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2018.
- [3] 管靖,刘文彪. 理论力学简明教程[M]. 北京:科学出版社, 2008.
GUAN J, LIU W B. A concise course in theoretical physics [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [4] 朗道,栗弗席兹著. 力学[M]. 李俊峰,鞠国兴,译校. 北京:高等教育出版社, 2007.
LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Mechanics[M]. LI J F, JU G X, Trans. Beijing: Higher Education Press, 2007. (in Chinese)
- [5] 赵峥,刘文彪. 广义相对论基础[M]. 北京:清华大学出版社, 2010.
ZHAO Z, LIU W B. Foundations of general relativity[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2010. (in Chinese)
- [6] 黄宏伟. 关于惯量张量的注释[J]. 物理与工程, 2002, 12(3): 27-30.
HUANG H W. A note on the inertia tensor[J]. Physics and Engineering, 2002, 12(3): 27-30. (in Chinese)
- [7] 俞琛. 惯量张量的一些问题[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 1994, 3(1): 72-75.
YU C. Notes on rotational inertial tensor[J]. Journal of MinZu University of China (Natural Sciences Edition), 1994, 3(1): 72-75. (in Chinese)
- [8] 郑华,张文超,王新刚,等. 分析力学助力逆向思维培养[J]. 广西物理, 2024, 45(4): 48-53.
ZHENG H, ZHANG W C, WANG X G, et al. Analytical mechanics helps cultivate reverse thinking[J]. Guangxi Physics, 2024, 45(4): 48-53. (in Chinese)

(上接第 51 页)

- [17] 李永平,张帆. 环形电流的磁场分布[J]. 济南大学学报, 1998, 8(4): 61-64.
LI Y P, ZHANG F. The distribution of magnetic field of annular electric current[J]. Journal of Jinan University, 1998, 8(4): 61-64. (in Chinese)
- [18] 彭中汉,蔡领. 圆电流平面上的磁场分布[J]. 大学物理, 1983, (11): 12-16.
PENG Z H, CAI L. Magnetic field distribution in the

plane of a circular current[J]. College Physics, 1983, (11): 12-16. (in Chinese)

- [19] 赵凯华,陈熙谋. 新概念物理教程·电磁学[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2006: 127-128.
ZHAO K H, CHEN X M. New conceptual physics course: Electromagnetism[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2006: 127-128. (in Chinese)