

基于梁弯曲问题的弹性力学教学实践研究

岳 盈 赵 霞 赵 伟 韦先涛 王中平 张增明

(中国科学技术大学国家级物理实验教学示范中心, 安徽 合肥 230026)

摘 要 弹性力学是物理学与工程领域之间的重要接口, 蕴含丰富的数学工具与物理概念, 对学生夯实理论基础与提升实践能力具有重要意义。本文围绕梁的弯曲问题, 从弹性力学基本方程的角度阐述了铁木辛柯梁理论的构建思路, 并结合格林函数法与拉普拉斯变换求解了挠度方程。以干意大利面与 3D 打印支架构建的外伸梁为教学模型, 通过计算挠度曲线并模拟应变场, 与实验测量结果对比, 验证了理论模型与数值方法的有效性。本研究将理论模型、数值计算、仿真模拟与实验测量深度融合, 可为高校物理与工程类课程的实验教学提供一个启发性的教学案例。

关键词 弹性力学; 铁木辛柯梁理论; 3D 打印; 挠度

A STUDY OF TEACHING PRACTICE IN ELASTICITY MECHANICS BASED ON BEAM BENDING PROBLEMS

YUE Ying ZHAO Xia ZHAO Wei WEI Xiantao WANG Zhongping ZHANG Zengming

(National Physical Experiment Teaching Demonstration Center, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026)

Abstract Elasticity is an important interface between physics and engineering, encompassing a wealth of mathematical tools and physical concepts, which is of great significance for students to solidify their theoretical foundation and enhance their practical abilities. This paper focuses on the bending problem of beams and elaborates on the construction of Timoshenko beam theory from the perspective of the basic equations of elasticity. The deflection equation is solved by combining the Green's function method and the Laplace transform. A cantilever beam teaching model constructed with dry spaghetti and a 3D-printed support is used. By calculating the deflection curve and simulating the strain field, and comparing the results with experimental measurements, the effectiveness of the theoretical model and numerical methods is verified. This study integrates theoretical models, numerical calculations, simulation modeling, and experimental measurements deeply, and can provide an inspiring teaching case for experimental teaching in physics and engineering courses in colleges and universities.

Key words elasticity mechanics; Timoshenko beam theory; 3D printing; deflection

弹性力学研究固体材料在受到外力作用时如何变形以及内部应力的分布情况, 是物理学与工

程力学、材料科学之间的桥梁。尽管弹性力学不在物理系本科生的专业必修课程列表中, 但学习

收稿日期: 2025-07-31

基金项目: 中国科学技术大学教育教学改革研究项目(2025xjyxm054)。

通信作者: 岳盈, yingyue@ustc.edu.cn。

引文格式: 岳盈, 赵霞, 赵伟, 等. 基于梁弯曲问题的弹性力学教学实践研究[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 24-29, 34.

Cite this article: YUE Y, ZHAO X, ZHAO W, et al. A study of teaching practice in elasticity mechanics based on beam bending problems [J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 24-29, 34. (in Chinese)

它仍然具有重要的意义。一方面,弹性力学作为固体力学的分支,涵盖了连续介质力学的基本概念和数学工具,如张量分析与微分方程等内容。这些知识不仅经典力学内容相衔接,也为学生进一步理解量子力学、广义相对论等后续课程提供了必要的数学与物理基础。另一方面,探究应力与应变之间的关系可以帮助学生更好地理解固体材料的行为,拓宽学生在工程力学、新材料开发等领域的知识面。实际上,像国际青年物理学家竞赛(IYPT)和全国大学生物理实验竞赛(创新赛)等面向物理系学生的赛事,其赛题中常涉及弹性力学内容。例如,2025年IYPT的“尺子加农炮”与创新赛中的“弱压力测量”问题,均需用弹性力学理论进行分析。通过这些学科竞赛或研究性课题,可在实验教学中引入弹性力学的实际问题案例,引导学生将理论知识与实践相结合,提升其解决实际物理问题的能力。

梁的弯曲问题是弹性力学中的经典内容之一,具有重要的理论与实际意义。为了体现弹性力学理论的系统性与一般性,本文从基本方程出发,介绍了经典梁理论的构建过程。同时,引入格林函数法和拉普拉斯变换等数学工具来求解其控制方程。在具体应用方面,以一种典型的外伸梁结构为研究对象,通过数值方法求解挠度方程,并通过仿真模拟关联应变场。验证性实验部分借助3D打印技术制作实物模型,并利用Tracker软件对梁的弯曲变形进行可视化测量与分析,实验结果与理论分析呈现出良好的一致性。该教学实例有助于学生理解弹性力学的基本理论并应用于实际问题,可作为高校实验教学中具有实践价值的教学案例。

1 弹性力学理论基础

弹性力学的基本方程是描述应力、应变与位移之间关系的核心数学框架,主要包括平衡方程、几何方程和本构方程三类,其张量表达式为

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 & \text{①} \\ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = x, y, z) & \text{②} \\ \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} & \text{③} \end{cases} \quad (1)$$

其中,平衡方程描述了物体内部应力场与外力之间的平衡关系(式1①),满足牛顿第二定律,式中 $\sigma_{ij,j}$ 为应力分量, F_i 为体积力(如重力)。几何方程(应变-位移关系)描述了应变张量与位移场之间的数学关系,在小变形条件下其张量表达式如式1②所示,式中 ϵ_{ij} 为应变分量, $u_{i,j}$ 和 $u_{j,i}$ 代表位移梯度张量的分量。本构方程(广义胡克定律)建立了应力张量与应变张量之间的关系,式1③给出了各向同性线弹性材料的本构关系,式中 ϵ_{kk} 表示体积应变, λ 和 μ 为拉梅常数, δ_{ij} 为克罗内克符号。这三类基本方程相互耦合,共同构成了描述弹性体力学行为的完备方程组。弹性力学中的经典梁理论均可由这三类基本方程导出。

2 基于铁木辛柯梁理论的建模

欧拉-伯努利梁理论基于细长梁假设,研究小变形条件下的梁弯曲行为,通过忽略剪切应变,可由几何方程与本构方程直接推导得出。然而,在实际工程应用中,特别是当梁的高跨比较大时,剪切变形的影响不可忽略。为描述此类梁的力学行为,发展出了铁木辛柯梁理论。该理论适用范围更广,能够更准确地反映实际工程中短梁或深梁的力学特性。

2.1 控制方程

在铁木辛柯梁理论^[1]中,假设梁截面变形后仍保持平面但相对中性轴发生偏转(如图1所示)。这种偏转由剪切应变引起,是由于剪切应力作用下相邻截面之间发生相对滑移所导致的角度变化。

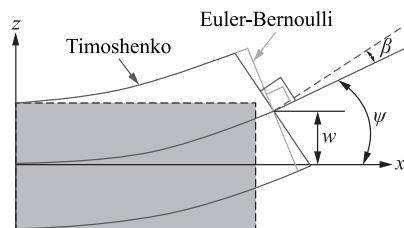


图1 欧拉-伯努利梁和铁木辛柯梁弯曲变形示意图

为了能够独立反映剪切应变和截面转角(ψ)的影响,需完整引入平衡方程、几何方程和本构方程进行推导。在静力学分析中,通过忽略方程中与时间相关的加速度项,可导出不包含惯性项的控制方程为

$$\kappa GA \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - \frac{d\psi(x)}{dx} \right) + q(x) = 0 \quad (2a)$$

$$EI \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \kappa GA \left(\frac{dw(x)}{dx} - \psi(x) \right) = 0 \quad (2b)$$

其中, $w(x)$ 表示挠度, 其定义为梁轴线相对于其原始(未变形)位置在 z 方向的位移。 $q(x)$ 表示分布载荷, E 为杨氏模量, G 为剪切模量 ($G = E / (2(1+\nu))$), ν 为泊松比, κ 为截面剪切形状系数, A 为横截面积, I 为截面惯性矩。上式为含有空间变量的常微分方程组, 可以引入数学工具进行求解。

2.2 挠度方程的通解

作为控制方程的因变量, 梁的挠度在力学分析与工程设计中具有核心意义^[2,3]。一方面, 通过挠度方程的导数关系可得到应力应变场。另一方面, 对挠度方程进行积分, 可得到系统的弯曲应变能和剪切应变能。在实际工程应用中, 需确保梁的最大挠度不超过规定的挠度限值, 以保证结构在载荷作用下的安全性。

考虑一个在点载荷作用下发生弯曲的铁木辛柯梁(图2)。该梁为各向同性的线弹性体, 满足小变形条件, 且具有较大的高跨比, 符合深梁的特征。

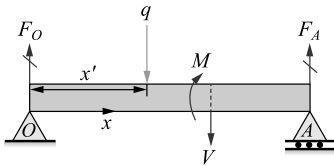


图2 铁木辛柯梁受载荷作用示意图。

图中使用带斜线的箭头来表示反作用力, 以区别于载荷

为了得到挠度的控制方程, 在式2中消除变量 $\psi(x)$, 得到

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{\kappa GA} \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \quad (3)$$

式(3)为复杂的非齐次微分方程, 考虑 $q(x)$ 为集中力, 可将其转化为格林函数形式, 从而更易于求解, 即

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q\delta(x-x') - \frac{qEI}{\kappa GA} \frac{d^2 \delta(x-x')}{dx^2} \quad (4)$$

其中, 使用 $q\delta(x-x')$ 表征在位置 x' 施加的集中力。那么 $w(x; x')$ 即为该控制方程的格林函数, 表征梁在位置 x 的挠度响应。

接下来, 对式4中的空间变量 x 进行拉普拉斯变换, 从而将控制方程由实空间的四阶微分方程转化为复数域中的代数方程。经整理, 得到挠

度在复数域的表达式

$$\tilde{w}(s; x') = \frac{qe^{-sx'}}{EI s^4} \left(1 - \frac{EI s^2}{\kappa GA} \right) + \frac{w(0)}{s} + \frac{w'(0)}{s^2} + \frac{w''(0)}{s^3} + \frac{w'''(0)}{s^4} \quad (5)$$

其中, s 为复数变量, $w(0), w'(0), w''(0), w'''(0)$ 为由边界条件确定的常数。

接下来, 对复数域中的挠度表达式进行逆拉普拉斯变换, 参照标准表格^[4], 即可得到实空间的挠度表达式

$$w(x; x') = H(x-x') \Phi_1(x-x') + w(0) \Phi_2(x) + w'(0) \Phi_3(x) + w''(0) \Phi_4(x) + w'''(0) \Phi_5(x) \quad (6a)$$

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qx}{\kappa GA} \\ \Phi_2(x) = 1 \\ \Phi_3(x) = x \\ \Phi_4(x) = \frac{x^2}{2} \\ \Phi_5(x) = \frac{x^3}{6} \end{cases} \quad (6b)$$

其中, H 表示单位阶跃函数。

至此, 求得挠度方程的通解。

2.3 边界条件与待定常数的确定

根据边界条件的不同, 梁可以分为简支梁、固支梁、悬臂梁等多种形式。然而, 在工程实践中还存在一种虽在文献中较少专门讨论、但具有实际应用价值的梁型——外伸梁。该类梁在一端或两端超出支座形成悬挑结构, 具有独特的力学性能与空间利用优势。悬挑部分下方无需设置额外支撑, 能够有效创造出开阔的空间, 广泛应用于阳台、体育场馆看台、机场航站楼等建筑结构中。此外, 在桥梁施工中, 也常通过外伸梁的方式实现逐段拼接, 适应复杂地形与施工条件。本小节将以典型外伸梁为例, 分析其受力与变形特性, 并求解其挠度方程。

对于受载荷作用的外伸梁(图3(a)), 可采用分段分析。将支撑段 OA 定义为第1段(长度为 l_1), 悬臂段 AB 定义为第2段(长度为 l_2), 并分别以 O 点和 A 点作为第1段和第2段的坐标原点。根据外伸梁弯曲的几何特征以及梁自由体的平衡条件(图3(b)), 可分别写出1段和2段的边界条件。考虑 O 为铰链简支端, 则该点的挠度和弯矩应为零, 即 $w_1(0) = 0, M_1(0) = 0$, (若 O 为固支

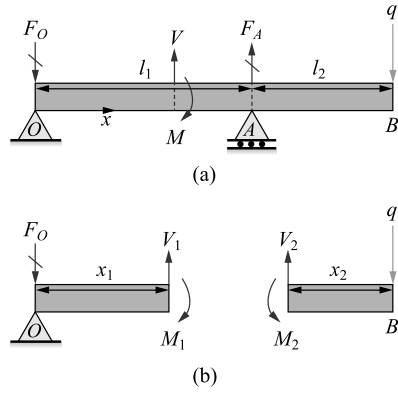


图3 铁木辛柯外伸梁

(a) 受载荷作用示意图; (b) 切割该梁得到的自由体图^[5], 根据力矩平衡条件可知 $M_1 = F_O \cdot x_1$, $M_2 = q \cdot x_2$ 。图中使用带斜线的箭头来表示反作用力, 以区别于载荷

端, 则挠度和转角为零, $w_1(0) = 0$, $\phi_1(0) = 0$ 。

对于 A 简支端, 该点挠度为零, 即 $w_1(l_1) = w_2(0) = 0$ 。对于 B 自由端, 其弯矩为零, 即 $M_2(l_2) = 0$ 。此外, 由于整个外伸梁的挠度曲线应为光滑函数, 那么 $w'_1(l_1) = w'_2(0)$, $w''_1(l_1) = w''_2(0)$, $w'''_1(l_1) = w'''_2(0)$ 。

通过式 2 可以得到转角与挠度的关系(式 7 ①), 并结合弯矩和剪力的表达式(式 7 ②③), 共同引入相应的边界条件中, 即

$$\begin{cases} \phi = \frac{dw}{dx} + \frac{EI}{\kappa GA} \frac{d^3w}{dx^3} & \text{①} \\ M = EI \frac{d\phi}{dx} & \text{②} \\ V = \kappa GA \left(\phi - \frac{dw}{dx} \right) & \text{③} \end{cases} \quad (7)$$

再将挠度方程的通解(式(6))代入, 即可建立用于求解待定常数的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \Phi_3(l_1) & \Phi_4(l_1) & \Phi_5(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi'_3(l_1) & \Phi'_4(l_1) & \Phi'_5(l_1) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi''_3(l_1) & \Phi''_4(l_1) & \Phi''_5(l_1) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi'''_3(l_1) & \Phi'''_4(l_1) & \Phi'''_5(l_1) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{EI}{\kappa GA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_3(l_2) & \Phi_4(l_2) & \Phi_5(l_2) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi'_3(l_2) & \Phi'_4(l_2) & \Phi'_5(l_2) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi''_3(l_2) & \Phi''_4(l_2) & \Phi''_5(l_2) & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi'''_3(l_2) & \Phi'''_4(l_2) & \Phi'''_5(l_2) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{EI}{\kappa GA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w'_1(0) \\ w''_1(0) \\ w'''_1(0) \\ w''''_1(0) \\ w'_1(l_1) \\ w''_1(l_1) \\ w'''_1(l_1) \\ w'_2(0) \\ w''_2(0) \\ w'''_2(0) \\ w_2(l_2) \\ w'_2(l_2) \\ w''_2(l_2) \\ w'''_2(l_2) \\ w''''_2(l_2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_1(0) \\ \Phi'_1(0) \\ \Phi''_1(0) \\ \Phi'''_1(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

利用 Matlab 对(式 8)进行求解,得到各待定常数 $w'_1(0)$, $w''_1(0)$, $w'''_1(0)$, $w'_2(0)$, $w''_2(0)$, $w'''_2(0)$ 。将这些常数结果代回挠度方程的通解(式(6)),最终可得外伸梁的挠度表达式

$$\begin{cases} w_1(x) = \frac{q}{6EI}[-x^3 + 3(l_1 + l_2)x^2 - (2l_1^2 + 3l_1l_2)x] \\ w_2(x; l_2) = \frac{q}{12EI}[2l_2x^3 + (l_1^2 + 3l_1l_2)x^2 - 12x] \end{cases} \quad (9)$$

3 数值求解与实验

工程中常见的梁材料包括钢材、混凝土和木材等。但在实验教学中,干意大利面却是一个既有趣又实用的选择。它截面均匀、几何形状标准,且弹性模量适中,使用普通传感器即可测量变形。此外,价格低廉、安全环保、易于加工也是其用作学生实验的优势。像著名的费曼厨房实验,以及 IYPT 近年的赛题(2025 年“意大利面加速器”,2026 年“扭曲的意大利面”)均以意大利面为研究对象。这里选用一段约 3 厘米长的意大利面(莫利 5#),其高跨比大于 1/20,适合作为铁木辛柯梁进行建模。

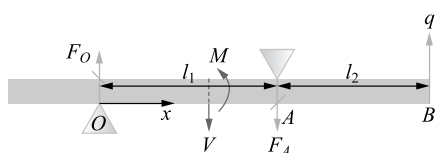


图 4 意大利面外伸梁受载荷作用示意图

实验中采用这段意大利面搭建了一个外伸梁结构(图 4)。其主要几何与力学参数汇总在表 1。其中,意大利面的直径 d 通过游标卡尺进行 6 次测量,取平均值并计算标准不确定度^[6]。其截面近似为圆形,惯性矩^[5]可表示为 $I = \pi d^4/64$,剪切形状系数^[7]为 $\kappa = (6(1+\nu))/(7+6\nu)$ 。杨氏模量与泊松比的大小采用文献中广泛认可的典型值^[8,9]。实验中梁的支撑跨距 l_1 和悬臂段长度 l_2 均经直尺测量并由 Tracker 软件复核。

在本实验中,外伸梁的支架及施力模块均使用 3D 打印技术设计制作。将意大利面架设为外伸梁后,支架缓慢下降,使意大利面逐渐承受施力

表 1 意大利面的几何与力学参数汇总

$\bar{d}/\text{m}$	A/m^2	I/m^4	ν	κ
$1.64(1) \times 10^{-3}$	2.12×10^{-6}	3.58×10^{-13}	0.30	0.89
E/GPa	G/GPa	l_1/cm	l_2/cm	q/N
3.80	1.46	1.50	1.40	0.0.31,0.65

模块传递的载荷。施力模块下方连接电子秤,用于精确测量和记录载荷 q 。随着载荷增加,可以直接观察到意大利面的弯曲程度逐步增加(图 5(a)~(c))。同时,使用 Tracker 软件测量并记录其实际挠度变化(图 5(d)~(f)),从而实现对弯曲特性的定量分析。

将上述参数条件代入式 9 后,采用 Matlab 数值方法对意大利面的理论挠度曲线进行了计算(图 5(d)~(f))。可以看出,理论曲线与实验结果符合良好,尤其在变形较小时一致性更为显著。随着载荷增加,理论值与实验结果的变化趋势基本一致,表明所采用的理论模型能够较好地反映实际变形行为。

为深入分析模型的符合程度并评定实验结果的不确定度,选取外伸梁挠度变化最大的位置——自由端 B 点,对比其理论与实验值并计算 B 类标准不确定度和相对误差(表 2)。在无外加载荷(0N)时,B 点挠度的微小负值主要由意大利面自重引起。在载荷为 0.31N 时,此时可认为挠度变化满足小变形条件,理论挠度与实验测量值之间的相对误差仅为 6%,验证了本文所采用的铁木辛柯外伸梁理论挠度曲线计算方法的有效性。此外,当载荷增至 0.65N 时,理论挠度明显大于实验值,相对误差增至 16%,此时梁的弯曲已超出小变形范围,偏离了铁木辛柯梁理论的基本假设。由此可见,在相关教学实验中,需特别注意控制载荷大小,确保变形处于小变形范围内,以保证理论模型的适用性。

表 2 不同载荷下意大利面外伸梁自由端 B 点挠度

q/N	$w_{B\text{-Theory}}/\text{mm}$	$w_{B\text{-Experiment}}/\text{mm}$	相对误差
0	0	-0.024	—
0.31	0.670	0.631(1)	6%
0.65	1.384	1.165(1)	16%

此外,通过 COMSOL 仿真,将梁的应变分布与挠度曲线进行关联(图 5(g)~(i))。结果表明,

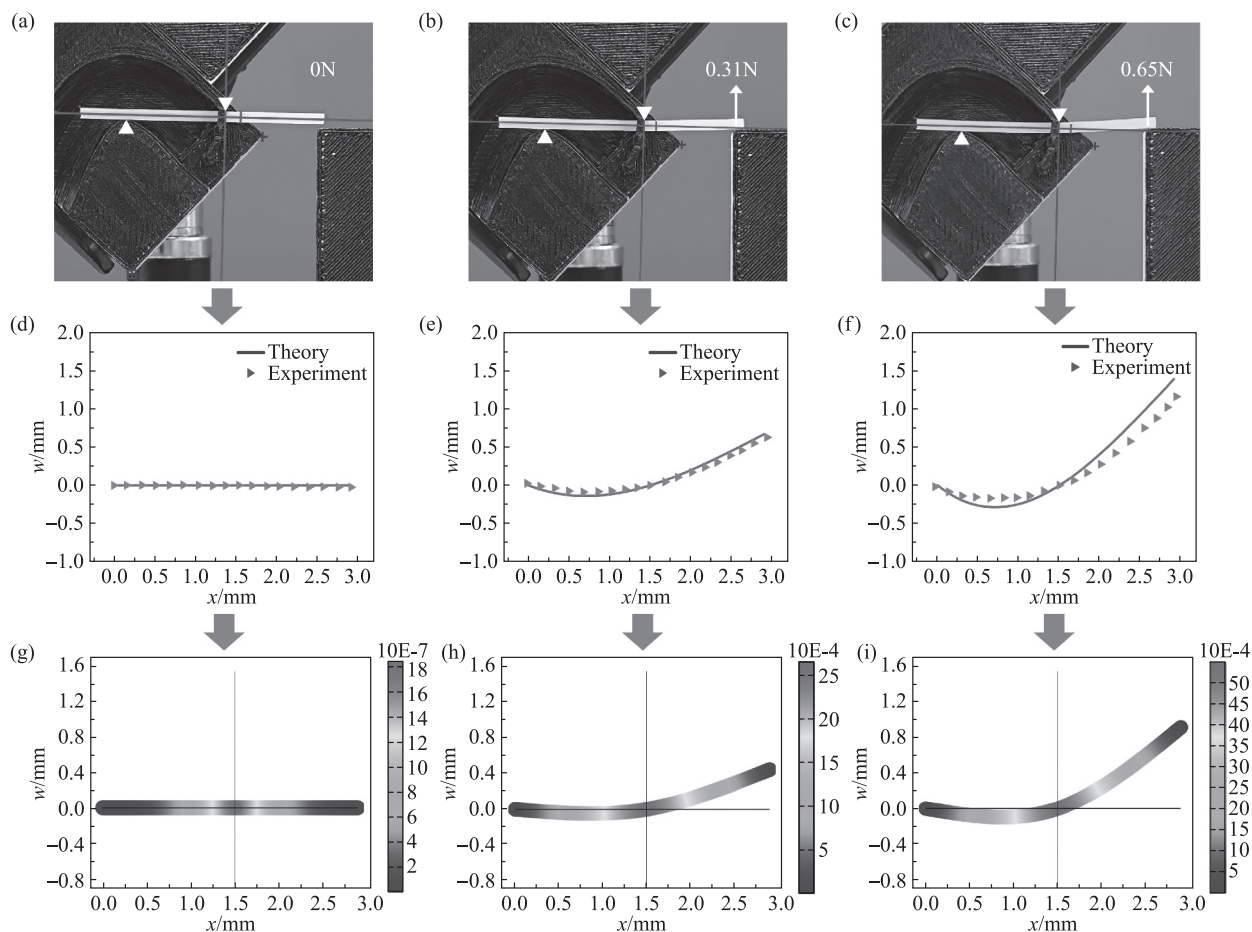


图5 意大利面外伸梁

(a)~(c) 该梁在 0N, 0.31N, 0.65N 载荷下弯曲情况照片。定标杆(直尺测量)如图中浅色线(蓝线)所示; (d)~(f) 对应载荷下该梁的理论与实际挠度曲线对比; (g)~(i) 对应载荷下该梁的仿真挠度曲线与最大法向应变(无量纲)

在自重及外加载荷作用下,应变主要集中于外伸梁支点 A 附近区域,表明该部位为应力集中区,预计裂纹将优先在此产生。这与实验观测结果高度一致,所有试样的断裂均发生于支点 A 附近。因此,在实际工程应用中,需要对支点区域进行重点监测与结构强化,以提高外伸梁的耐久性与安全性。

4 结语

本文从弹性力学基本方程出发,系统阐述了铁木辛柯梁理论的建构思路与控制方程,并结合格林函数法与拉普拉斯变换对挠度方程进行了求解。以意大利面和 3D 打印支架搭建的外伸梁为教学实例,使用数值方法计算了梁的挠度曲线,并将其与通过 Tracker 软件提取的实验测量值进行对比。结果显示,理论挠度曲线与实验测量值符

合良好,有效验证了本文理论模型的准确性与计算方法的可行性。此外,通过仿真模拟将挠度曲线与应变分布关联,成功预测了外伸梁的断裂位点。该教学实例通过融合理论计算、仿真模拟与实验验证,使学生在动手实践中不仅深化了对弹性力学基本方程、应力应变张量、经典梁理论及微分方程求解等核心概念的理解,更掌握了综合运用多手段分析与解决实际物理问题的能力,达到了良好的教学效果。

参考文献

- [1] TIMOSHENKO S P. Theory of Elasticity[M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [2] CHEN T, SU G Y, SHEN Y S, et al. Unified Green's functions of forced vibration of axially loaded Timoshenko beam: Transition parameter[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 113: 211-20.

(下转第 34 页)

- 号)[Z]. 2019.
- Ministry of Education. Opinions on the construction of first-class undergraduate courses(〔2019〕8)[Z]. 2019. (in Chinese)
- [3] 张宝武,孔明,许新科,等. 物理光学中多光束叠加强度求解方法的探讨[J]. 物理与工程, 2024, 34(2): 98-103.
- ZHANG B W, KONG M, XU X K, et al. Discussion on the method of solution to multi-beam superposition intensity in physical optics [J]. Physics and Engineering, 2024, 34(2): 98-103. (in Chinese)
- [4] 李俊昌,陈劲波,樊则宾,等. 衍射的基尔霍夫传递函数及瑞利-索末菲传递函数[J]. 光电子·激光, 2002, 13(1): 87-89.
- LI J C, CHEN J B, FAN Z B, et al. The kirchhoff transfer function and Rayleigh-Sommerfeld transfer function of diffraction[J]. Journal of Optoelectronics Laser, 2002, 13(1): 87-89. (in Chinese)
- [5] 陈培锋. 如何在“电动力学”课程中统一描述光的传输模型[J]. 大学物理, 2022, 41(4): 7-10.
- CHEN P F. How to uniformly describe the transmission model of light in the course of electrodynamics[J]. College Physics, 2022, 41(4): 7-10. (in Chinese)
- [6] 郁道银,谈恒英. 工程光学[M]. 4版. 北京:机械工业出版社, 2015.
- YU D Y, TAN H Y. Engineering Optics[M]. 4th ed. Beijing: China Machine Press, 2015. (in Chinese)
- [7] 梁铨廷. 物理光学[M]. 5版. 北京:电子工业出版社, 2018.
- LIANG Q T. Physical Optics[M]. 5th ed. Beijing: Electronic Industry Press, 2018. (in Chinese)
- [8] 姜宗福,刘文广,杨丽佳,等. 物理光学导论[M]. 2版. 北京:科学出版社, 2018.
- JIANG Z F, LIU W G, YANG L J, et al. Physical optics [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2018. (in Chinese)
- [9] 鲁欣,任朗,袁炳南译. 场论[M]. 8版. 北京:高等教育出版社, 2012.
- LU X, REN L, YUAN B N. Field theory[M]. 8th ed. Beijing: Higher Education Press, 2012. (in Chinese)
- [10] LIPSON A, LIPSON S G, LIPSON H. Optical physics [M]. 4th ed. New York: Cambridge University Press, 2011.
- [11] 马文蔚,周雨青,解希顺. 物理学[M]. 6版. 北京:高等教育出版社, 2014.
- MA W W, ZHOU Y Q, XIE X S. Physics[M]. 6th ed. Beijing: Higher Education Press, 2014. (in Chinese)
- [12] 束星北. 关于波动方程式之“超前解”[J]. 物理学报, 1950, 7(6): 97-104.
- SHU X B. The “lead solution” of the wave equation[J]. Acta Physica Sinica, 1950, 7(6): 97-104. (in Chinese)
- [13] 杨俊秀,赵文来,夏海霞. 达朗贝尔方程及其解教学思考[J]. 电气电子教学学报, 2011, 33(2): 113-115.
- YANG J X, ZHAO W L, XIA H X. Consideration of teaching on D'Alembert equations and its solutions[J]. Journal of EEE, 2011, 33(2): 113-115. (in Chinese)
- [14] 姚端正,李中辅. 用达朗贝尔公式求解二、三维波动方程的初值问题[J]. 大学物理, 1977, 16(4): 18-21.
- YAO D Z, LI Z F. Initial-value problems for two- and three-dimensional wavelength equations solved by D'Alembert formula[J]. College Physics, 1977, 16(4): 18-21. (in Chinese)
- [15] 刘宝容,丘国春. 从达朗贝尔方程到推迟势教学方法探讨[J]. 广西民族大学学报(自然科学版), 2014, 20(3): 111-113.
- LIU B R, QIU G C. Discussion on teaching of the D'Alembert equations to retarded potential[J]. Journal of Guangxi University for Nationalities, 2014, 20(3): 111-113. (in Chinese)
- [16] COLLIN R E. Field theory of guided waves[M]. 2nd ed. Hoboken: Wiley-IEEE Press, 1991.
- [17] 梁昆森,俞超,邱树业. 力学讨论[M]. 成都:四川教育出版社, 1987.
- LIANG K M, YU C, QIU S Y. Mechanical discussion[M]. Chengdu: Sichuan Education Press, 1987. (in Chinese)

(上接第 29 页)

- [3] 王续宏,李翔宇. 轴向受载铁木辛柯梁的弯曲研究[J]. 成都大学学报(自然科学版), 2019, 38(2): 187-9, 205.
- WANG X H, LI X Y. Bending study of Timoshenko beams under axial load[J]. Journal of Chengdu University (Natural Science Edition), 2019, 38(2): 187-189, 205. (in Chinese)
- [4] KREYSZIG E. Advanced engineering mathematics [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.
- [5] GOODNO J M G B J. Mechanics of materials[M]. Cengage Learning, 2009.
- [6] 张增明. 大学物理实验[M]. 北京:高等教育出版社, 2024.
- ZHANG Z M. University physics experiments[M]. Beijing: Higher Education Press, 2024. (in Chinese)
- [7] 付宝连. 弹性力学中的能量原理及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2004.
- FU B L. Energy principles in elasticity and their applications [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [8] ZHANG Y, LI X, DAI Y, et al. On the number of fractured segments of spaghetti breaking dynamics[J]. Theoretical and Applied Mechanics Letters, 2022, 12(4).
- [9] HEISSER R H, PATIL V P, STOOP N, et al. Controlling fracture cascades through twisting and quenching[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2018, 115(35): 8665-70.