



一般激光光束参量的变换理论

陈培锋 钱壮林 吕 暄

(华中科技大学光学与电子信息学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要 高斯光束经过薄透镜后的变换是激光原理课程的重要内容,该内容有助于加强学生对激光光学系统设计的理解,但是由于课程缺少一般激光光束通过线性光学系统的变换过程,学生在拓展发散的学习过程中会产生疑问。本文推导了二阶矩定义下的一般激光光束的腰斑直径、腰斑位置和远场发散角,通过一个由光线矩阵表示的线性光学系统后的变化规律。此外,本文采用 q 参数的方法进行光束参数变换的证明,证实了两种推导方法的一致性,有助于加强学生对激光光束的理解。可以预见,一般激光光束参量的变换理论可以应用于透镜组光束变换系统设计之中。

关键词 激光原理; 光束参量; 变换规律

THEORY OF THE TRANSFORMATION OF GENERAL LASER BEAM PARAMETERS

CHEN Peifeng QIAN Zhuanglin LYU Xuan

(School of Optics and Electronic Information, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074)

Abstract The transformation of a Gaussian beam by a thin lens is an important component of the laser principles course, as it enhances students' understanding of laser optical system design. However, because the course usually omits the general propagation of arbitrary laser beams through linear optical systems, students often raise questions when they try to extend their knowledge. This paper derives, under the second-order moment definition, the waist diameter, waist position, and far-field divergence angle of a general laser beam after passing through a linear optical system represented by a ray-transfer matrix. In addition, we retrace the beam-parameter transformation with the q -parameter method, demonstrating the consistency of the two approaches and thereby reinforcing students' understanding of laser-beam behavior. The general beam-parameter transformation theory can be expected to find direct application in the design of multi-lens beam-transformation systems.

Key words laser principles; laser beam parameters; transformation Law

拉盖尔-高斯光束和厄米-高斯光束的腰斑尺寸 ω_0 、远场发散角 θ 通过光学系统后的变换,已经研究得很充分了。 M^2 参数作为表征激光光束

质量的重要参数,在通过 M^2 参数表征激光束特性的理论体系下,通过二阶矩方法可以定义任意一般光束的光斑直径 D 和光束发散角 $\theta^{[1]}$ 。在这

收稿日期: 2025-06-25

通信作者: 陈培锋, pfchen@hust.edu.cn。

引文格式: 陈培锋, 钱壮林, 吕暄. 一般激光光束参量的变换理论[J]. 物理与工程, 2025, 35(6): 13-17.

Cite this article: CHEN P F, QIAN Z L, LYU X. Theory of the transformation of general laser beam parameters[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(6): 13-17. (in Chinese)

种情况下,光束的传输特性可以通过束腰光斑直径 D_0 、光束远场发散角 θ 和束腰光斑位置 L_0 来描述^[1]。

沿光轴传输的激光束在位置 L 处的光斑直径^[1]

$$D^2(L) = D_0^2 + \theta^2(L - L_0)^2 \quad (1)$$

M^2 参数则定义为^[1]

$$M^2 = \frac{D_0\theta}{4\lambda/\pi} \quad (2)$$

由 D_0 、 L_0 和 θ 表征的光束经过光学系统变换后,新的光束参量将变化为 D'_0 、 L'_0 和 θ' 。在光学系统设计过程中,正确地计算这些光束参量的变换很有意义。本文作者曾针对薄透镜给出了这个变换过程^[2],所给出的变换理论很直接,比较适合理论教学。但由于并没有对一般线性光学系统解决一般情况下的变换过程,所以学生在将该方法推广到一般光学系统时总存在一些疑问。本文在上述的基础上进一步给出,光束参数通过一个 ABCD 矩阵所描述的线性光学系统后的一般变化过程。可以预见,本文的研究结果可以在透镜组光束变换系统设计中得到应用,如光纤耦合系统^[3]和激光缩束聚焦系统^[4-6]。

1 一般激光束经过光学系统的参量方程组

本文使用的模型如图 1 所示。光学系统由 ABCD 光线矩阵描述,入射到光学系统的激光束光束参量为 D_0 、 L_0 和 θ 表征,其中 L_0 为入射光束束腰位置距离光学系统入口的距离;从光学系统出射的激光束光束参量为 D'_0 、 L'_0 和 θ' 表征,其中 L'_0 为出射光束束腰位置距离光学系统出口的距离。

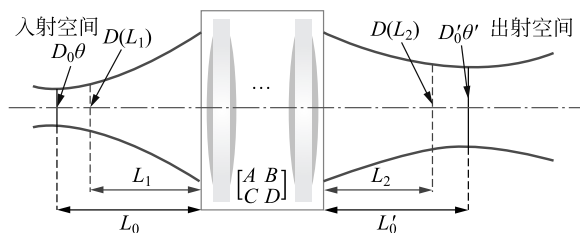


图 1 光束通过一个光学系统变化示意图

上述问题实际是在已知 D_0 、 L_0 和 θ 参量的条件下,求出 D'_0 、 L'_0 和 θ' 参量的问题,也就是需要找出 3 个关于 D'_0 、 L'_0 和 θ' 参量的方程。下面通过

光学系统的特性找出 3 个变量方程。

1.1 入射空间焦平面及其方程

从入射光束空间距离 L_1 处开始计算,通过光学系统后的光线矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AL_1 + B \\ C & CL_1 + D \end{pmatrix} \quad (3)$$

如图 1 所示,假设 L_1 处为入射空间焦平面,则有入射光束空间距离 L_1 面上 x_0 点的任意角度光线,通过光学系统后全部变化为 θ'_0 方向的光束,即

$$\begin{pmatrix} A & AL_1 + B \\ C & CL_1 + D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

由于 θ 是任意角度,故如果 θ'_0 为单一值,则需要满足

$$CL_1 + D = 0 \quad L_1 = -\frac{D}{C} \quad (5)$$

$$\theta'_0 = Cx_0 + (CL_1 + D)\theta = Cx_0 \quad (6)$$

此时 L_1 处 x_0 点发出的不同角度光线经光学系统后均变为同一方向 θ'_0 的平行光束(即平面波前),根据二阶矩的定义有

$$C \times D(L_1) = \theta' \quad (7)$$

其中, θ' 为出射空间光束参量, $D(L_1)$ 为入射光束距离光学系统 L_1 处的光斑直径

$$D(L_1) = \sqrt{D_0^2 + \theta^2(L_0 - L_1)^2} \quad (8)$$

由此得出第一个方程

$$C \sqrt{D_0^2 + \theta^2(L_0 + D/C)^2} = \theta' \quad (9)$$

$$C^2 [D_0^2 + \theta^2(L_0 + D/C)^2] = \theta'^2 \quad (10)$$

1.2 出射空间焦平面及其方程

通过光学系统后再传输空间距离 L_2 的光线矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + L_2C & B + L_2D \\ C & D \end{pmatrix} \quad (11)$$

如图 1 所示,假设 L_2 处为出射空间焦平面,则有光学系统入口处方向为 θ_1 的光线,通过光学系统后再在出射空间距离 L_2 面上汇合到 x'_1 点,即

$$\begin{pmatrix} A + L_2C & B + L_2D \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \theta'_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

由于 x 是任意位置,故如果 x'_1 为单一值,则需要满足

$$A + L_2C = 0 \quad L_2 = -\frac{A}{C} \quad (13)$$

$$x'_1 = (B + L_2 D) \theta_1 = \left(B - \frac{A}{C} D\right) \theta_1 \quad (14)$$

如图 1 所示,假设线性光学系统两侧均为空气,则有

$$AD - BC = 1 \quad (15)$$

故式(14)可以表示为

$$x'_1 = -\frac{1}{C} \theta_1 \quad (16)$$

此时对于光束参量变换,入射方 θ_1 的平面波对应变换后 L_2 处的点 x'_1 ,根据二阶矩的定义有

$$C \times D(L_2) = \theta \quad (17)$$

其中, θ 为入射空间光束参量, $D(L_2)$ 为出射光束距离光学系统 L_2 处的光斑直径

$$D(L_2) = \sqrt{D_0'^2 + \theta'^2 (L'_0 - L_2)^2} \quad (18)$$

由此得出第二个方程

$$C^2 [D_0'^2 + \theta'^2 (L'_0 + A/C)^2] = \theta^2 \quad (19)$$

1.3 入射和出射空间的成像关系方程

考虑从入射 L_3 距离到出射 L_4 距离的光线矩阵 K

$$K = \begin{pmatrix} 1 & L_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A + L_4 C & AL_3 + B + L_4 (CL_3 + D) \\ C & CL_3 + D \end{pmatrix} \quad (20)$$

如果要求将 L_3 处的 x_2 点出射的光线全部汇聚到 L_4 处的 x'_2 点,即两处满足成像关系,则要求

$$K \begin{pmatrix} x_2 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_2 \\ \theta' \end{pmatrix} \quad (21)$$

由于 θ 是任意角度,故如果 x'_2 为单一值,则需要满足

$$AL_3 + B + L_4 (CL_3 + D) = 0 \quad (22)$$

$$L_4 = -\frac{AL_3 + B}{CL_3 + D} \quad (23)$$

如果假设光学系统为一个焦距 f 的薄透镜,则式(23)可表示为

$$\frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} = \frac{1}{f} \quad (24)$$

成像的横向放大率为

$$\frac{x'_2}{x_2} = A + L_4 C \quad (25)$$

整个图像以相同的比率放大或缩小,为简单起见,取 L_4 为 0。实际上意味着如果 L_3 处的光斑 D_1 ,则 L_4 处的光斑应该为 $|A|D_1$ 。综上有

$$L_3 = -\frac{B}{A} \quad (26)$$

则有第三个方程

$$D_0'^2 + \theta'^2 L_0'^2 = A^2 \left[D_0^2 + \theta^2 \left(L_0 + \frac{B}{A} \right)^2 \right] \quad (27)$$

1.4 方程组求解

综合式(10)、式(19)和式(27)有方程组

$$\begin{cases} (CD_0)^2 + (CL_0 + D)^2 \theta^2 = \theta'^2 \\ D_0'^2 + \theta'^2 L_0'^2 = (AD_0)^2 + \theta^2 (AL_0 + B)^2 \\ (CD'_0)^2 + (CL'_0 + A)^2 \theta'^2 = \theta^2 \end{cases} \quad (28)$$

考虑一个焦距 f 的薄透镜

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

方程组变为

$$\begin{cases} D_0^2 + (L_0 - f)^2 \theta^2 = f^2 \theta'^2 \\ D_0'^2 + \theta'^2 L_0'^2 = D_0^2 + \theta^2 L_0^2 \\ D_0'^2 + (L'_0 - f)^2 \theta'^2 = f^2 \theta^2 \end{cases} \quad (30)$$

方程组(30)与文献[2]吻合。

若线性光学系统仅为一个长度为 L_5 的距离

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

方程组变为

$$\begin{cases} \theta^2 = \theta'^2 \\ L'_0 = -(L_0 + L_5) \\ D'_0 = D_0 \end{cases} \quad (32)$$

符合实际情况。

为了进一步对方程组(28)进行验证,假设光束通过双透镜系统,如图 2 所示。

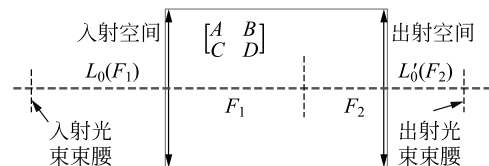


图 2 光束通过双透镜系统示意图

线性系统的光学矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F_2}{F_1} & F_1 + F_2 \\ 0 & -\frac{F_1}{F_2} \end{pmatrix} \quad (33)$$

方程组变为

$$\begin{cases} \theta' = \frac{F_1}{F_2} \theta \\ L'_0 = F_2 \\ D'_0 = \frac{F_2}{F_1} D_0 \end{cases} \quad (34)$$

符合实际情况。

2 采用 q 参数进行光束参数变换

2.1 采用 q 参数与直接求解三方程的一致性

在文献[2]中,作者仿照高斯光束的定义,定义一般光束的 q 参数

$$q(z) = i \frac{\pi D_0^2}{4\lambda M^2} + z = i \frac{D_0}{\theta} + z \quad (35)$$

q 参数为复数,其实部中隐含着坐标系零点位置的定义(也即实际光束束腰位置的确定),虚部表征光束准直性(虚部绝对值越大,光束准直性越强),以上定义将高斯光束 q 参数的相位曲率半径推广至一般光束的等效波前曲率。

根据薄透镜的类比结果,预计对一般线性光学系统存在一般的 $ABCD$ 关系,即

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (36)$$

因为 q 参数为复数,因此上述变换包含两个参量变换规律,如果结合通过线性光学系统 M^2 参数不变的基本规律,即 $D_0\theta = D'_0\theta'$,同样可以获得三个光束参量之间的变换规律。下面说明通过 q 参数的变换可以同样导出上述方程组(28),由此说明通过上述三个方程得到的结果与由 q 参数变换得到的结果是一致的。根据上面的假设,入射到光学系统光束的 q 参数和从光学系统出射光束的 q 参数分别为

$$q_1 = L_0 + i \frac{D_0}{\theta} \quad (37)$$

$$q_2 = -L'_0 + i \frac{D'_0}{\theta'} \quad (38)$$

根据 $ABCD$ 法则有

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \\ &= \frac{A\left(i \frac{D_0}{\theta} + L_0\right) + B}{C\left(i \frac{D_0}{\theta} + L_0\right) + D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{iA \frac{D_0}{\theta} + (AL_0 + B)}{iC \frac{D_0}{\theta} + (CL_0 + D)} \\ &= \frac{AC \frac{D_0^2}{\theta^2} + (AL_0 + B)(CL_0 + D)}{C^2 \frac{D_0^2}{\theta^2} + (CL_0 + D)^2} + \\ &\quad i \frac{\frac{D_0}{\theta}}{C^2 \frac{D_0^2}{\theta^2} + (CL_0 + D)^2} \end{aligned} \quad (39)$$

结合式(38)和式(39),考查虚部有

$$\frac{D'_0}{\theta'} = \frac{\frac{D_0}{\theta}}{C^2 \frac{D_0^2}{\theta^2} + (CL_0 + D)^2} \quad (40)$$

结合 $D_0\theta = D'_0\theta'$ 有

$$\frac{1}{\theta'^2} = \frac{\frac{1}{\theta^2}}{C^2 \frac{D_0^2}{\theta^2} + (CL_0 + D)^2} \quad (41)$$

$$\theta'^2 = C^2 D_0^2 + \theta^2 (CL_0 + D)^2 \quad (42)$$

综上所述,式(42)为方程组(28)的第1式。

同时,由于方程组(28)的第1式和第3式是对称的,且考虑到

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ 的逆矩阵是 } \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix},$$

所以第1式和第3式只需要验证一个就可以。

结合式(38)、式(39)和式(42),有

$$\begin{aligned} &q_2 \theta'^2 \\ &= -L'_0 \theta'^2 + i D'_0 \theta' \\ &= i D_0 \theta + A C D_0^2 + \theta^2 (A L_0 + B) (C L_0 + D) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &|q_2 \theta'^2|^2 \\ &= D_0'^2 \theta'^2 + L'^2 \theta'^4 \\ &= D_0^2 \theta^2 + [A C D_0^2 + \theta^2 (A L_0 + B) (C L_0 + D)]^2 \end{aligned} \quad (44)$$

由式(15)可得

$$(AD - BC)^2 = A^2 D^2 + B^2 D^2 - 2ABCD = 1 \quad (45)$$

结合式(44),并根据式(45)结果可以对式(46)进行验证

$$\begin{aligned}
& (D_0'^2 + L_0'^2 \theta'^2) \theta'^2 \\
& = [(AD_0)^2 + \theta^2 (AL_0 + B)^2] \times \\
& \quad [(CD_0)^2 + \theta^2 (CL_0 + D)^2] \\
& = [ACD_0^2 + \theta^2 (AL_0 + B)(CL_0 + D)]^2 + D_0^2 \theta^2
\end{aligned} \quad (46)$$

结合式(42)和式(46)可得

$$D_0'^2 + \theta'^2 L_0'^2 = (AD_0)^2 + \theta^2 (AL_0 + B)^2 \quad (47)$$

式(47)为方程组(28)的第2式。综上可知采用 q 参数的 ABCD 法则与上述三个方程是一致的。

2.2 q 参数变换的具体使用

q 参数变换的方程为

$$\begin{cases} q = i \frac{D_0}{\theta} + z \\ q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \\ D_0 \theta = D_0' \theta' \end{cases} \quad (48)$$

具体使用时,可以利用基模高斯光束的变换。

假设有一一般光束,其最小的光斑直径为 D_0 ,位于 L_0 处,远场发散角为 θ 。则该光束的 M^2 参数为

$$M^2 = \frac{D_0 \theta}{4\lambda/\pi} \quad (49)$$

取一个假想的基模高斯光束,该假想的基模高斯光束的束腰半径和远场发散半角分别为

$$w_{0TEM00} = \frac{D_0}{2M} \quad (50)$$

$$\theta_{TEM00} = \frac{\theta}{2M} \quad (51)$$

光束束腰位于 L_0 处。显然该光满足基模高斯光束规律

$$w_{0TEM00} \theta_{TEM00} = \frac{\lambda}{\pi} \quad (52)$$

按照基模高斯光束的传输变换^[7],获得该假想高斯光束通过任意线性光学系统的变换,得到

变换后的 w_{0TEM00}' 、 $\theta_{TEM00}' = \frac{\lambda}{\pi w_{0TEM00}'}$ 和 L_{0TEM00}' , 则可以得到实际光束通过该线性高斯光束的参量分别为

$$\begin{cases} D_0' = 2M w_{0TEM00}' \\ \theta' = 2M \theta_{TEM00}' \\ L_0' = L_{0TEM00}' \end{cases} \quad (53)$$

3 结语

本文根据矩阵光学的一般规律,直接给出在二阶矩定义下的一般光束参量通过一个线性光学系统后的变化规律,并给出采用 q 参数的方法进行光束参数变换的证明,有助于加强学生对参数变换理论的理解。

参 考 文 献

- [1] SIEGMAN A E. New development in laser resonators[J]. SPIE, 1990, 1224: 2-14.
- [2] 陈培峰, 丘军林. 由 M^2 参数定义的光束传输变换理论[J]. 激光技术, 1996, 20(1): 46-49.
CHEN P F, QIU J L. Light beam propagation features defined by propagation factor M^2 [J]. Laser Technology, 1996, 20(1): 46-49. (in Chinese)
- [3] 丁小康, 许昌, 王志敏, 等. 100W 长纳秒脉冲光纤耦合输出 532nm 绿光激光器[J]. 原子能科学技术, 2023, 57(S1): 281-288.
DING X K, XU C, WANG Z M, et al. 100W Long-nanosecond-pulsed Fiber Coupling Output 532nm Green Laser[J]. Atomic Energy Science and Technology, 2023, 57(S1): 281-288. (in Chinese)
- [4] 单小琴, 李天昊, 朱日宏. 高功率激光器光束质量测量的衰减缩束实验[J]. 应用光学, 2023, 44(6): 1250-1257.
SHAN X Q, LI T H, ZHU R H. Experiment on attenuation and compression in beam quality measurement of high power laser[J]. Journal of Applied Optics, 2023, 44(6): 1250-1257. (in Chinese)
- [5] 单小琴, 李天昊, 朱日宏. 高功率激光器光束质量测量的衰减缩束仿真研究[J]. 应用光学, 2024, 45(1): 199-205.
SHAN X Q, LI T H, ZHU R H. Simulation of attenuation and compression in beam quality measurement of high power laser[J]. Journal of Applied Optics, 2024, 45(1): 199-205. (in Chinese)
- [6] 张胜江, 王明娣, 郭敏超, 等. 高功率激光清洗头的设计与研究[J]. 应用激光, 2022, 42(2): 91-96.
ZHANG S J, WANG M D, GUO M C, et al. Design and research of high power laser cleaning head[J]. Applied Laser, 2022, 42(2): 91-96. (in Chinese)
- [7] 周炳琨, 高以智, 陈倜嵘, 等. 激光原理[M]. 6 版. 北京: 国防工业出版社, 2009: 70-84.
ZHOU B K, GAO Y Z, CHEN T R, et al. Principles of lasers[M]. 6th ed. Beijing: National Defense Industry Press, 2009: 70-84. (in Chinese)