

储备池计算在耦合蔡氏电路同步预测中的应用

吴 玥¹ 颜子翔¹ 高 健¹ 杨胡江¹ 王新刚² 肖井华¹

(¹ 北京邮电大学物理科学与技术学院, 北京 100876;

² 陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西 西安 710119)

摘 要 人工智能技术与大学物理实验的结合已成为物理教学发展的重要趋势,探索二者深度融合的路径对于实现数智化教学新模式具有重要意义。本研究聚焦于一种广泛应用于非线性实验教学的机器学习方法——储备池计算(Reservoir Computing, RC),探索其在耦合蔡氏电路实验教学中进行同步预测的应用。研究表明,利用储备池计算对耦合蔡氏电路三个非同步状态下的四路电压信号进行学习,可以实现达到同步状态所需电阻值的准确预测。这不仅为学生提供了一种便捷的同步调节方法,还使他们能够直观感受到人工智能技术在物理实验中的巨大应用潜力,从而丰富了大学物理实验教学的数智化内容。

关键词 耦合蔡氏电路实验;储备池计算;同步预测;参数感知

THE APPLICATION OF RESERVOIR COMPUTING IN SYNCHRONIZATION PREDICTION OF COUPLED CHUA'S CIRCUITS

WU Yue¹ YAN Zixiang¹ GAO Jian¹ YANG Hujiang¹ WANG Xingang² XIAO Jinghua¹

(¹ School of Physical Science and Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876;

² School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 716001)

Abstract The integration of artificial intelligence (AI) technology and university physics experiments has become an important trend in the development of physics teaching. Exploring the pathways for the deep integration of these two areas is of great significance for realizing new models of digital and intelligent teaching. This study focuses on reservoir computing (RC), a machine-learning method used in nonlinear experiment teaching, and explores its application in synchronization prediction in coupled Chua's circuit experiment teaching. It is found that RC can learn the four-voltage signals of the three nonsynchronous states of the coupled Chua's circuit and accurately predict the resistance value needed for synchronization. This not only provides students with a convenient method for synchronous adjustment but also allows them to intuitively experience the great potential of AI technology in physics experiments. As a result, it enriches the digital and intelligent content of university physics experimental teaching.

Key words coupled Chua's circuit experiment; reservoir computing; synchronization prediction; parameter aware

收稿日期: 2025-06-15

基金项目: 2024 高等学校计算物理课程教学研究项目(JZW-24-JW-06);2024 年度全国高等学校大学物理改革研究项目(2024PR007);北京邮电大学研究生教改项目(2023Y032)。

通信作者: 颜子翔, yanzx@bupt.edu.cn。

引文格式: 吴玥, 颜子翔, 高健, 等. 储备池计算在耦合蔡氏电路同步预测中的应用[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 281-287.

Cite this article: WU Y, YAN Z X, GAO J, et al. The application of reservoir computing in synchronization prediction of coupled Chua's circuits[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 281-287. (in Chinese)

自 20 世纪中期人工智能 (Artificial Intelligence, AI) 的概念诞生以来, 为科学计算能力带来了巨大的突破。人工智能凭借其先进的自动化工具和高效的分析技术^[1,2], 加速了科研的发展, 也为挖掘已有数据中的隐藏规律提供了机会^[3]。目前, 各种 AI 技术算法在医疗^[4]、教育^[5]、工业^[6]等领域均取得了颇为显著的进展。机器学习凭借其强大的自动学习与优化能力, 成为 AI 发展的核心驱动力, 持续推动各行业变革。

AI 技术同样为大学物理实验教学带来诸多益处^[7], 它能够帮助优化实验设计, 生成多样化教学方案, 根据实验室条件调整并实现个性化实验室, 满足不同学生群体需求。在实验操作时, 能够实时提供操作提示, 监测并纠正错误。在数据分析方面, AI 能够帮助学生高效处理数据, 挖掘其背后隐藏的规律^[8], 并呈现可视化结果。将 AI 与实验教学相结合不仅能够提高实验教学效率与质量, 还能推动教学模式创新发展^[9]。

本研究基于混沌加密通信电路实验, 该实验通过调制发送端混沌电路的参数来编码信息, 并在接收端利用同步的误差来判断和恢复发送的信息^[10]。这里的同步指的是接收端电路元件的电信号与发送端电路对应元件的电信号随时间变化情况一致。在该实验中, 实现同步是加密与解密的关键前提。本研究以此为基础聚焦于耦合蔡氏电路系统, 探讨如何实现同步。该电路系统包含驱动电路和响应电路两部分, 每部分均由两个电容、一个电感、一个线性电阻以及一个非线性电阻组成。这两部分随后通过线性电阻进行连接, 形成耦合系统。实验中, 学生通过连续调节响应电路的线性电阻 (R_2), 能够观察到使其与驱动系统状态从不同步, 到同步, 再到不同步的完整过程。然而在实际教学中, 学生在完成该实验内容的过程中仍存在一定挑战。由于耦合电路结构较为复杂, 学生对其原理理解不够透彻, 难以深刻认识元件参数对电路整体状态的影响, 这导致学生无法找到合适的参数调节范围, 使驱动电路与响应电路达到同步状态。因此, 在实验中, 学生往往需要耗费大量时间来寻找合适的 R_2 值以实现同步。基于这一现状, 如何快速精准地找到实现同步的 R_2 值是本研究聚焦的重要问题。

储备池计算 (Reservoir Computing, RC) 是一

种特殊类型的循环神经网络^[11,12], 其前身是 2001 年 Jaeger 提出回声状态网络^[13] (Echo State Network, ESN) 以及 2002 年 Maass 等人提出了液体状态机^[14] (Liquid State Machine, LSM)。随着 RC 的发展, 其应用领域不断扩展, 例如图像处理^[15]、机器人控制^[16]、混沌系统预测^[17,18]等。储备池计算具有良好的动态特性与强大的非线性拟合能力, 能够准确捕捉非线性系统的时间演化规律。研究表明, 经过训练的储备池能够精准预测典型混沌系统大约 6 个李雅普诺夫时间^[19], 远远超过非线性科学领域传统预测方法的预测范围^[20]。近年来, 笔者团队致力于将储备池计算与大学物理实验紧密融合, 通过在混沌扭摆^[21]、蔡氏电路^[22]等典型大学物理非线性实验中进行实践应用, 证明了其在预测装置动力学行为、提升实验效率等多方面的有效性。本研究拟进一步将该技术引入耦合蔡氏电路实验中, 期望在解决当前同步调节所面临问题的同时, 进一步丰富该实验的数智化教学内容。

1 耦合蔡氏电路实验

1983 年蔡少棠 (Leon O. Chua) 提出了蔡氏电路, 这是一种能产生混沌行为的简单自治电路, 后成为研究混沌现象的一种重要模型^[23]。1990 年, 美国 Pecono 与 Carroll 利用驱动响应法首次发现了两个电路系统中的同步现象^[24]。随着研究的深入, 人们开始利用系统间的耦合来探索混沌同步现象, 采用的装置电路结构如图 1(a) 所示。该实验电路由驱动系统与响应系统两部分组成。其中驱动系统是一个经典的蔡氏电路, 包含两个电容 C_1, C_2 、一个电感 L_1 、一个线性电阻 R_1 以及非线性电阻 NR_1 。响应系统的基本电路结构与驱动系统一致, 其中电容 C_3, C_4 、电感 L_2 , 以及非线性电阻 NR_2 这四个元件的参数与驱动系统较为接近, 但线性电阻 R_2 与驱动系统中线性电阻 R_1 不同。驱动系统与响应系统通过线性电阻 R_0 实现单向耦合。当驱动强度合适且响应系统的线性电阻 R_2 接近驱动系统的线性电阻 R_1 时, 能够观察到两个系统的电信号出现同步现象。根据各元件的伏安特性以及基尔霍夫定律, 该实验装置的动力学方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{C_1 R_1} (U_2 - U_1) - \frac{1}{C_1} g(U_1) \\ \frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{C_2 R_1} (U_1 - U_2) + \frac{1}{C_2} i_{L_1} \\ \frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1} (-U_2) \\ \frac{dU_3}{dt} = \frac{1}{C_3 R_2} (U_4 - U_3) - \frac{1}{C_3} g(U_3) + \frac{1}{C_3 R_0} (U_1 - U_3) \\ \frac{dU_4}{dt} = \frac{1}{C_4 R_2} (U_3 - U_4) + \frac{1}{C_4} i_{L_2} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} (-U_4) \end{cases} \quad (1)$$

其中, U_1, U_2, U_3, U_4 分别为电容 C_1, C_2, C_3, C_4 两端电压, i_{L_1}, i_{L_2} 分别为通过电感 L_1, L_2 的电流, $g(U_1), g(U_3)$ 为描述非线性电阻 NR_1, NR_2 的 $I-U$ 特性多项式:

$$g(U) = \begin{cases} -g(-U) & U \leq 0 \\ G_a U & 0 < U \leq B_{p1} \\ G_b U + (G_a - G_b) B_{p1} & B_{p1} < U \leq B_{p2} \\ G_c U + (G_b - G_c) B_{p2} + (G_a - G_b) B_{p1} & U > B_{p2} \end{cases} \quad (2)$$

其中, U 为输入电压, G_a, G_b, G_c 分别为各段直线斜率, B_{p1} 与 B_{p2} 为直线截断点。图 1(b) 展示了这一特性曲线在 $I-U$ 平面上的变化规律。

本研究采用 ZKY-HD 型混沌加密电路实验仪测量两个电路的实验数据, 这是一款基于混沌系统实现加密通信功能的大学物理实验设备。通过调节响应系统中的线性电阻 R_2 实现两个电路的同步, 并利用 LabVIEW 软件^[25] 与数据采集卡对实验数据进行存储。值得注意的是, 实验教学中使用的实验仪器只能输出两个电路中各个电容两端的电压信号 (U_1, U_2, U_3, U_4), 而无法采集到通过电感的电流信号。

在实际教学中, 驱动系统的元件通常由教师调节至出现混沌现象所需的参数值, 且在实验过程中固定不变。学生将连续改变响应电路中线性电阻 R_2 的大小, 并通过 LabVIEW 软件观察响应电路状态。图 2 展示了将 R_1 固定在 2000Ω 左右的情况下, 实验观测不同 R_2 下两个电路的相图, 其中(a)、(b)、(c)图分别为 $R_2 = 1000\Omega, 2000\Omega,$

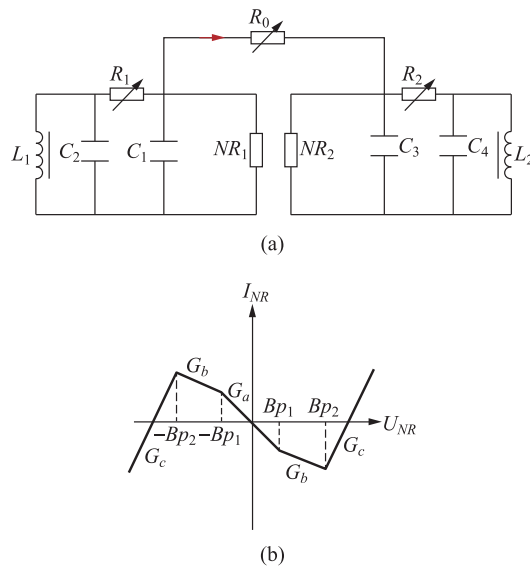


图 1 耦合蔡氏电路实验装置

(a) 电路结构示意图; (b) 非线性电阻的伏安特性曲线

3000Ω 时两个电路相图的对比图, 黑色为驱动电路的相图, 红色为响应电路的相图。可以看到, 当 R_2 与 R_1 接近时, 从 U_3-U_1 图可以观察到两个电路的同步现象, 如图 2(e) 所示。当 R_2 与 R_1 相差越大时, 两个电路的同步性越差。

在相空间中, 系统的轨迹点对应其瞬时状态。当两个电路的状态逐渐趋于同步时, 它们在相空间中的欧式距离会逐渐缩小。因此我们选取实验数据对应最后 0.1s 的时间范围内, 两个系统在相空间中各时刻欧式距离的平均值作为同步误差的衡量标准, 其定义为:

$$\delta = \langle \sqrt{(U_1(t) - U_3(t))^2 + (U_1(t) - U_3(t))^2} \rangle \quad (3)$$

其中, $\langle \rangle$ 表示对不同时刻的欧式距离取平均。 δ 随 R_2 的变化如图 3 所示。可以看到, 随着 R_2 的增大, 两个电路逐渐趋于同步, 在 $R_2 = 2100\Omega$ 左右 δ 降至最低, 系统同步程度最高。超出这一临界值后, 电路同步状态逆转, δ 逐渐上升。注意到, 在实际实验中, 由于各元件存在一定误差, 驱动系统与响应系统除线性电阻外的其他元件无法完全一致, 再加上噪声等因素的干扰使得电路无法实现完全同步, 因此 δ 最小值也无法达到 0。

2 储备池计算

本研究利用储备池计算(RC)对耦合电路的

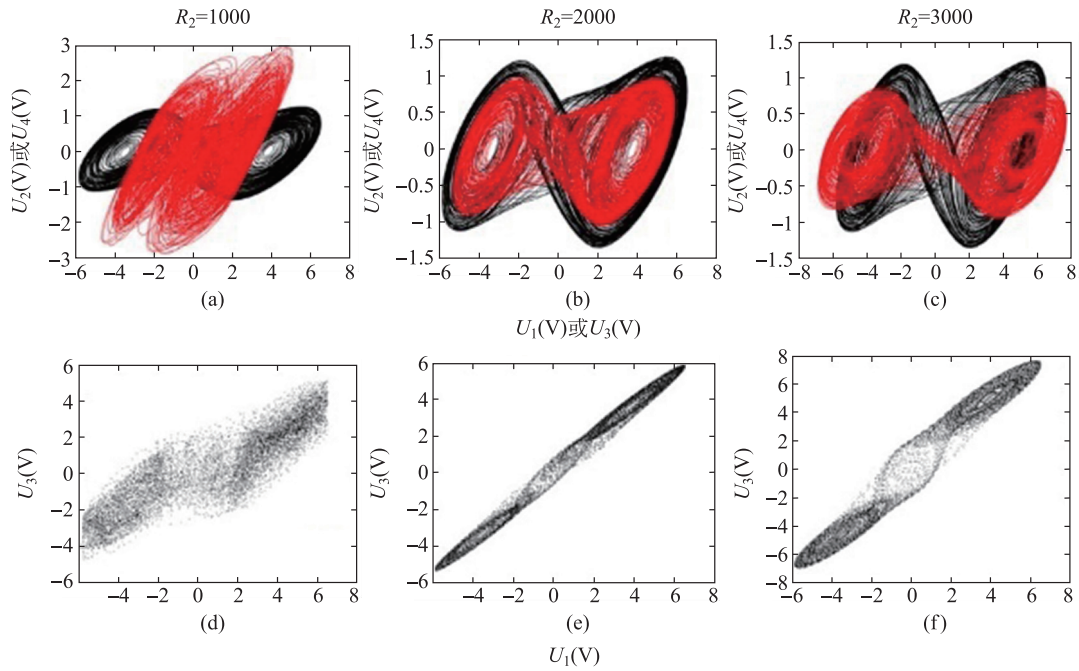


图2 耦合蔡氏电路实验的相图

(a) $R_2=1000\Omega$ 时两电路相图对比。其中黑色为驱动电路测量结果(U_1 - U_2 相图),红色为响应电路测量结果(U_3 - U_4 相图); (b) $R_2=2000\Omega$ 时两电路相图对比; (c) $R_2=3000\Omega$ 时两电路相图对比; (d)~(f) 分别展现了上述三种参数下 U_1 - U_3 相图

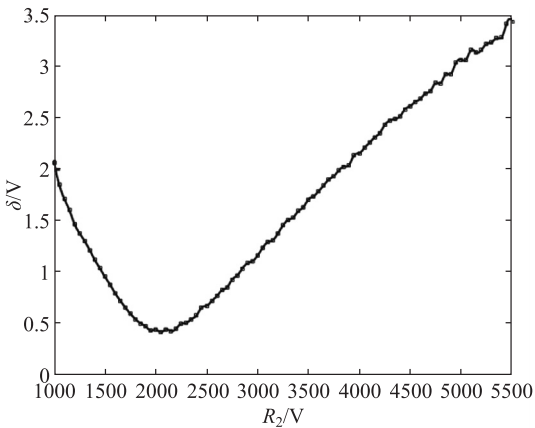


图3 实验测量得到 δ 随 R_2 变化图

同步与去同步进行学习预测。储备池计算无须预先知晓系统本身的动力学方程,而是直接从数据中学习系统的非线性特性^[26]。这一特点使得储备池计算具有强大的适应性。传统储备池计算框架由输入层、储备池层、输出层三部分构成。首先信号通过输入层传递至储备池层。储备池层内部是由人工神经元随机连接组成的网络,该网络在训练前预先随机生成并固定,用于接收和处理输入信号。最后通过输出权重线性组合在输出层中得到输出信号。

在传统 RC 的基础上,额外增加一个参数控制通道能够使其应用于预测系统的临界转变^[27]。这种改进方法称为参数感知储备池计算(parameter-aware reservoir computing, PARC)^[17]。图 4 (a)为 PARC 原理图,图中输入层与储备池层通过

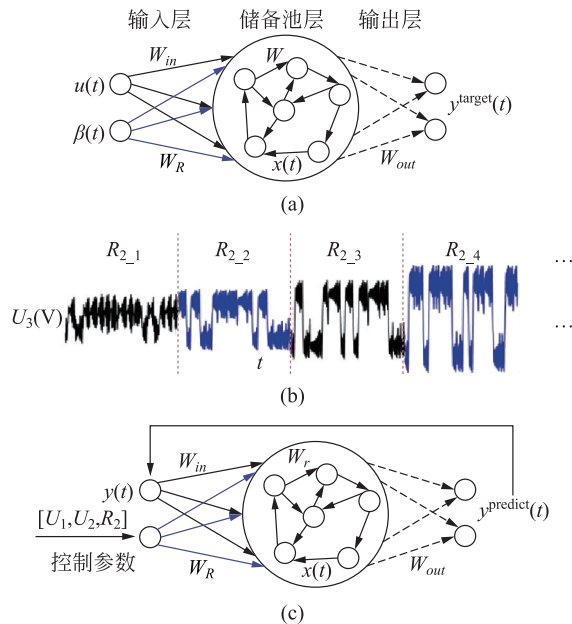


图4 PARC 计算原理示意图

(a) 训练阶段; (b) 输入信号拼接; (c) 预测阶段

输入权重 W_{in} 连接, W_r 为储备池节点间的耦合矩阵, W_{out} 是输出权重。与传统 RC 架构相比, 其主要区别在于额外引入了一个参数通道。该参数通道中的数据与输入信号一起传递至储备池进行学习。在本研究中, 这一参数通道中的数据由不同参数 R_2 下的序列拼接而成, 如图 4(b) 所示。

在储备池计算的训练过程中, 输入信号为响应电路中 C_3 、 C_4 两端的电压:

$$u_R(t) = [U_3, U_4] \quad (4)$$

参数通道由驱动电路中 C_1 、 C_2 两端的电压以及响应电路中的线性电阻 R_2 组成:

$$\beta(t) = [U_1, U_2, R_2] \quad (5)$$

输入信号与参数通道一起传输至储备池中, 在储备池内部通过演化得到节点间的动力学状态:

$$x(t) = (1 - \alpha)x(t - \Delta t) + \alpha \tanh [W_{in}u(t) + W_r x(t - \Delta t) + W_R \beta(t)] \quad (6)$$

其中, $x(t)$ 为储备池节点间的状态, α 为泄漏率, 控制节点间的演化速率, Δt 为相邻实验数据点之间的时间间隔。在本研究中, 实验采样频率为 100kHz (即 $\Delta t = 10^{-5}$ s), 储备池规模为 $N = 600$, 输入权重 W_{in} 与 W_R 分别满足 $[-\sigma_1, \sigma_1]$ 、 $[-\sigma_2, \sigma_2]$ 的均匀分布, 储备池层的耦合矩阵 W_r 服从 $[-1, 1]$ 随机分布, 保证储备池节点能够全面捕捉并学习到系统的动力学特征。储备池层的状态在输出层通过与输出权重 W_{out} 线性组合得到输出信号:

$$y(t) = W_{out}x(t) \quad (7)$$

储备池训练过程中各参数是固定的, 唯一需要训练的是输出权重 W_{out} , 输出权重的优劣会对储备池的学习效果产生影响。选取合适的输出权重, 能够使得到的输出信号近似为目标信号:

$$y^{\text{target}} = [U_3(t + \Delta t), U_2(t + \Delta t)] \quad (8)$$

获取合适的输出权重可以通过岭回归算法实现:

$$W_{out} = y^{\text{target}} x^T (xx^T + \epsilon I)^{-1} \quad (9)$$

其中 ϵ 为岭回归正则系统, I 为单位矩阵。

在训练阶段完成后, 利用储备池进行时序预测的原理如图 4(c) 所示。此阶段储备池将 t 时刻生成的 $y^{\text{predict}}(t)$ 作为下一时刻的输入 $u(t + \Delta t)$, 形成一个自反馈系统, 从而利用下式得到下一时刻状态:

$$y^{\text{predict}}(t + \Delta t) = W_{out}x(t + \Delta t) \quad (10)$$

依次类推便可持续对任意未来时刻状态进行

预测。

为使提升储备池的学习效果, 需要对储备池的超参数进行优化^[28], 这些参数包括储备池谱半径 ρ 、矩阵密度 d , W_{in} 与 W_R 的均匀分布范围 σ_1 , σ_2 、泄漏率 α 、回归系数 ϵ 。本研究对一定范围内的各参数进行随机选取, 通过计算不同参数组合下预测序列与实际序列的均方根误差 (RMSE) 来评估模型性能, 最终选取 RMSE 最低时的参数组合对电路系统进行学习。最终确定各超参数选取如下: $\rho = 0.4056$ 、 $d = 0.6489$ 、 $\sigma_1 = 2.6124$ 、 $\sigma_2 = 0.0046$ 、 $\alpha = 0.2866$ 、 $\epsilon = 8.7494 \times 10^{-4}$ 。

3 基于储备池计算的耦合电路同步预测

在实验过程中, 首先利用 LabVIEW 软件分别采集 $R_2 = 2500\Omega$ 、 3000Ω 、 3500Ω 三个状态下的四路电压信号 $[U_1, U_2, U_3, U_4]$, 每组信号采集 25000 个数据点。为了消除初始暂态过程的影响, 只选取每组最后 4000 个数据点进行拼接, 从而构成训练数据集, 用于后续的训练过程。图 5、图 6 分别展示了并未作为训练集数据的 $R_2 = 2000, 4000\Omega$ 时 PARC 的预测相图与实验相图的对比情况。可以看到, 在两个参数下, PARC 预测相图均与实际实验相图基本一致, 同步状态也保持一致。这体现 PARC 具备耦合电路状态的预测能力。

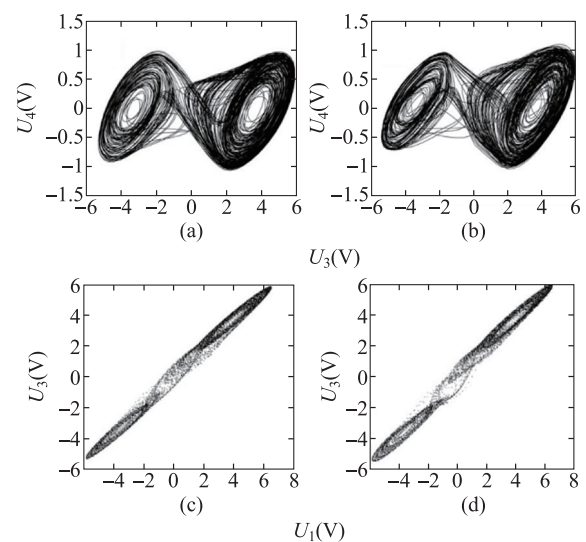


图 5 $R_2 = 2000\Omega$ 实验与 PARC 预测相图及同步状态对比 (a) 实验相图; (b) 预测相图; (c) 实验同步状态; (d) 预测同步状态

在确认 PARC 的性能后, 开始对不同 R_2 下的响应电路状态进行预测, 并判断其与驱动电路

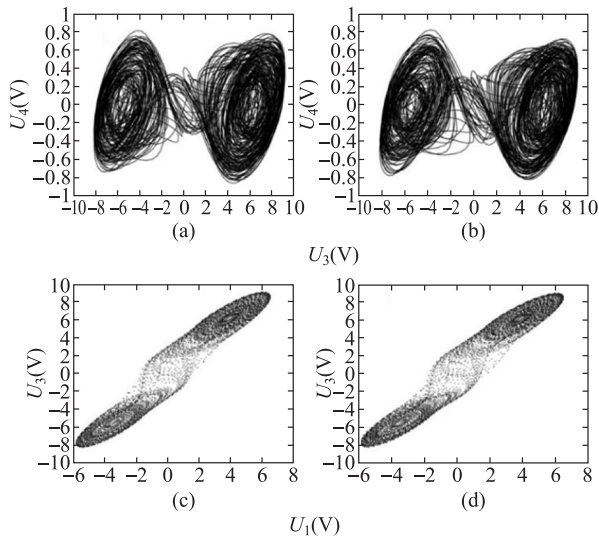


图6 $R_2 = 4000\Omega$ 实验与 PARC 预测相图及同步状态对比
(a) 实验相图; (b) 预测相图; (c) 实验同步状态; (d) 预测同步状态

的同步关系。利用训练好的 PARC 模型,将参数通道中 R_2 的值从 1500Ω 起,以 100Ω 的间隔逐渐增加至 5500Ω ,并比较对应实验与 PARC 预测结果之间的同步误差 δ ,结果如图 7 所示。图 7 中三条竖虚线分别代表了三个用于训练集的 R_2 值。从图中可以看出,PARC 不仅能够准确预测训练参数附近的同步情况,还能预测电路在 δ 到达最低点(即最佳同步状态)后向上变化(即去同步)的趋势,同时精确找到 δ 的最小值对应的 R_2 取值。这表明储备池已经成功学习到了耦合电路的动力学规律,而并非简单对 δ 的变化规律进行拟合。

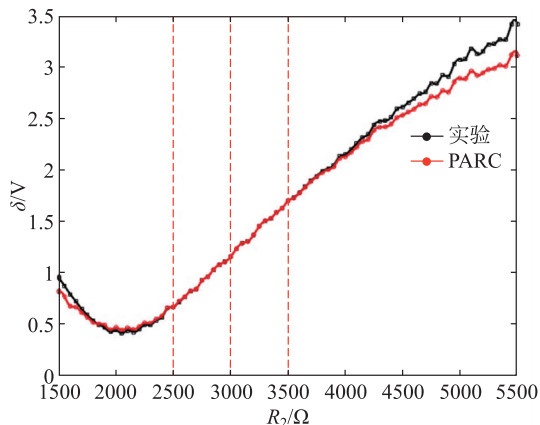


图7 实验与 PARC δ 随 R_2 变化对比图(训练集:
 $R_2 = 2500\Omega, 3000\Omega, 3500\Omega$,相应位置如图中虚线所示)

进一步研究发现,选取不同的训练数据集能够实现更广范围下 R_2 的电路状态的预测。例如,

选取 $R_2 = 1500\Omega, 2000\Omega, 2500\Omega$ 的拼接数据作为数据集,所得结果如图 8 所示。可以发现,在选取数据集范围内,PARC 能够准确预测耦合电路的同步情况。但随着 R_2 的进一步增大或减小,PARC 预测的准确性也逐渐降低。

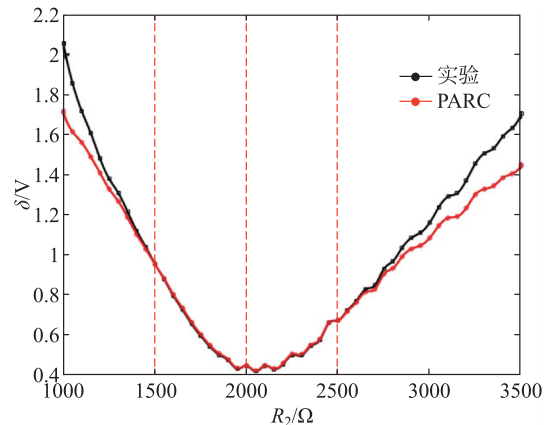


图8 实验与 PARC δ 随 R_2 变化对比图(训练集:
 $R_2 = 1500\Omega, 2000\Omega, 2500\Omega$,相应位置如图中虚线所示)

上述结果表明,PARC 仅需三个不同状态的实验数据,即可学习耦合蔡氏电路的非线性特性并确定同步变化的临界点。不仅如此,PARC 实现预测的整个过程只需 1min 左右,这极大缩短了寻找同步状态所花费的时间。在实验教学中,这有助于学生快速确定实现同步的 R_2 值,节省调试时间,并对同步现象有更清晰的认识。

4 结论

本研究将储备池计算与耦合蔡氏电路实验相结合,在缺失电流信号的情况下借助 AI 技术对响应系统的电路状态与耦合电路的同步情况进行预测,捕捉到同步的临界最低点,帮助学生减少实验调试时间,极大程度地提高了实验效率,同时让学生深刻体会到 AI 技术的强大。

参 考 文 献

- [1] CUI Z, JING X, ZHAO P, et al. A new subspace clustering strategy for AI-based data analysis in IoT system[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2021, 8(16): 12540-12549.
- [2] ZHANG L, ZHANG L. Artificial intelligence for remote sensing data analysis: A review of challenges and opportunities[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine,

- 2022, 10(2):270-294.
- [3] SCHMIDT M, LIPSON H. Distilling free-form natural laws from experimental data[J]. *Science*, 2009, 324(5923):81-85.
 - [4] AL KUWAITI A, NAZER K, AL-REEDY A, et al. A review of the role of artificial intelligence in healthcare[J]. *Journal of Personalized Medicine*, 2023, 13(6):951.
 - [5] ALMASRI F. Exploring the impact of artificial intelligence in teaching and learning of science: A systematic review of empirical research [J]. *Research in Science Education*, 2024, 54(5):977-997.
 - [6] JAIN D. Artificial intelligence in quality control systems: a cross-industry analysis of applications, benefits and implementation frameworks[J]. *International Journal of Scientific Research in Computer Science, Engineering and Information Technology*, 2024, 10(6):1321-1333.
 - [7] MAHLIGAWATI F, ALLANAS E, BUTARBUTAR M H, et al. Artificial intelligence in Physics Education: a comprehensive literature review[C]//*Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2023, 2596(1): 012080.
 - [8] Veluru C S. Data Mining Best Practices and Efficiency in the Large-Scale Data Mining Using Artificial Intelligence and Generative AI[J]. *Journal of Artificial Intelligence & Cloud Computing*, 2024, 300: 2-4.
 - [9] CHEN X, XIE H, ZOU D, et al. Application and theory gaps during the rise of artificial intelligence in education[J]. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 2020, 1: 100002.
 - [10] 李海红,代琼琳,王世红,等. 一种简单的基于蔡氏电路的数字加密通信实验[J]. *大学物理*, 2006, 25(9): 39-39.
LI H H, DAI Q L, WANG S H, et al. A Simple Digital Secure Communication Experiment Based on Chua's Circuit [J]. *College Physics*, 2006, 25(9): 39-39. (in Chinese)
 - [11] MAASS W, NATSCHLÄGER T, MARKRAM H. Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations[J]. *Neural Computation*, 2002, 14(11): 2531-2560.
 - [12] JAAGER H, HAAS H. Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication[J]. *Science*, 2004, 304(5667): 78-80.
 - [13] JAAGER H. The "echo state" approach to analysing and training recurrent neural networks-with an erratum note [R]. Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology GMD Technical Report, 2001, 148(34): 13.
 - [14] MAASS W, NATSCHLÄGER T, MARKRAM H. Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations[J]. *Neural Computation*, 2002, 14(11): 2531-2560.
 - [15] CUI H, XIAO Y, YANG Y, et al. A bioinspired in-materia analog photoelectronic reservoir computing for human action processing [J]. *Nature Communications*, 2025, 16(1): 2263.
 - [16] BALDINI P. Reservoir computing in robotics: a review [J]. *arXiv preprint arXiv*, 2206.11222, 2022.
 - [17] KONG L W, FAN H W, GREBOGI C, et al. Machine learning prediction of critical transition and system collapse [J]. *Physical Review Research*, 2021, 3(1): 013090.
 - [18] ROY M, MANDAL S, HENS C, et al. Model-free prediction of multistability using echo state network[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2022, 32(10).
 - [19] JAEGER H, HAAS H. Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication[J]. *science*, 2004, 304(5667): 78-80.
 - [20] Luo H, Du Y, Fan H, et al. Reconstructing bifurcation diagrams of chaotic circuits with reservoir computing[J]. *Physical Review E*, 2024, 109(2): 024210.
 - [21] 颜子翔,吴玥,谢桂今,等. 基于储备池计算的混沌扭摆数字孪生系统[J]. *大学物理*, 2024, 44(4): 7-13.
YAN Z X, WU Y, XIE G J, et al. A digital-twin system for chaotic torsion pendulum based on reservoir computing [J]. *College Physics*, 2024, 44(4): 7-13. (in Chinese)
 - [22] 戴文娇, 颜子翔, 高健, 等. 储备池计算在非线性电路实验教学中的应用[J]. *物理与工程*, 2025, 35(3): 194-200.
DAI W J, YAN Z X, GAO J, et al. Application of Reservoir Computing in Nonlinear Circuit Experiment Teaching [J]. *Physics and Engineering*, 2025, 35(3): 194-200. (in Chinese)
 - [23] CHUA L O, KOCAREV L, ECKERT K, et al. Experimental chaos synchronization in Chua's circuit[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(3): 705-708.
 - [24] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical review letters*, 1990, 64(8): 821.
 - [25] NATIONAL INSTRUMENTS. LabVIEW 入门指南[M]. Texas, USA: National Instruments, 2010.
 - [26] 高健,颜子翔,肖井华. 储备池算法与动力系统分析研究进展[J]. *北京师范大学学报(自然科学版)*, 2023, 59(6): 860-868.
GAO J, YAN Z X, XIAO J H. Research progress on reservoir algorithm and dynamical system analysis[J]. *Journal of Beijing Normal University (Natural Science Edition)*, 2023, 59(6): 860-868. (in Chinese)
 - [27] ZHANG H, FAN H, WANG L, et al. Learning Hamiltonian dynamics with reservoir computing[J]. *Physical Review E*, 2021, 104(2): 024205.
 - [28] BISCHL B, BINDER M, LANG M, et al. Hyperparameter optimization: Foundations, algorithms, best practices, and open challenges[J]. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 2023, 13(2): e1484.