

前沿物理与工程

从复变函数论前瞻现代物理前沿的纽结场论

卓涌荣 刘 鑫

(北京工业大学物理与光电工程学院理论物理研究所, 北京 100124)

摘 要 本科“数学物理方法”课程中的一个重要部分是复变函数,其核心之一是复平面上的柯西积分。本文旨在向学有余力的本科生或低年级研究生介绍一个新知识点,即可以对二维 $\mathbb{C}$ 平面引进第三轴(实轴 $\mathbb{R}$,记作时间轴)生成 $(2+1)$ -维空间;于是 $\mathbb{C}$ 平面的柯西积分转化为这个 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 空间中的纽结缠绕数积分。缠绕数是纽结理论中的最低阶拓扑不变量,可视为一个更高阶的工具——孔采维奇积分的最简单情形。更进一步,如果同时考察含“多重关联子”的柯西积分,就可得到孔采维奇积分的一般形式(忽略后者的群因子)。这个新工具在数学领域的纽结理论和物理学领域的量子场论研究中都有重要意义。本文将按上述逻辑顺序介绍相关的概念和理论方法,为感兴趣的同学提供一条从本科理论物理基础课到科研前沿的路径。

关键词 复变函数;柯西积分;纽结理论;缠绕数;孔采维奇积分

FROM COMPLEX ANALYSIS TO KNOTTED FIELD THEORY IN MODERN PHYSICS

ZHUO Yongrong LIU Xin

(School of Physics and Optoelectronic Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

Abstract Complex analysis acts as a key part of the undergraduate course, Methods of Mathematical Physics. One of its kernel concepts is the Cauchy integral defined in the complex plane $\mathbb{C}$. The aim of this paper is to introduce a new point of knowledge to undergraduate students and junior postgraduate students, that is, a third axis (the real axis $\mathbb{R}$, denoted as the time axis) can be introduced into the 2-dimensional complex plane $\mathbb{C}$ to form a $(2+1)$ -dimensional space, $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, such that the Cauchy integral in the complex plane is transformed to be a description for an entangle with knot winding number $Lk = \pm 1$. Winding numbers are known as a weak topological invariant in knot theory, able to be regarded as the simplest case of a higher-order tool, the Kontsevich integral. Furthermore, if “multiple correlators” are considered simultaneously in a Cauchy integral, it means obtaining the general form of the Kontsevich integral (where the so-called group factor is ignored). This new tool plays a crucial role in both knot theory in mathematics and quantum field theory in physics. In this paper we will detail the above mentioned relevant concepts and theoretical methods, in the hope of

收稿日期: 2025-02-22

基金项目: 北京市自然科学基金(IS23030, Z180007); 国家自然科学基金(11572005)。

通信作者: 刘鑫, xin.liu@bjut.edu.cn。

引文格式: 卓涌荣, 刘鑫. 从复变函数论前瞻现代物理前沿的纽结场论[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 174-182.

Cite this article: ZHUO Y R, LIU X. From complex analysis to knotted field theory in modern physics[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 174-182. (in Chinese)

providing for the interested reader a shortcut from undergraduate fundamental courses of theoretical physics to the frontiers of scientific research in modern mathematics and physics.

Key words complex variables functions; Cauchy integral; Knot theory; Linking number; Kontsevich integral

柯西积分(Cauchy integral)是数学物理方法课程中复变函数部分的核心之一。它在后续内容和许多高年级课程中有重要应用,例如:

- 留数(residue)的计算,及其向含奇点实积分的解析延拓方法中的推广。未来可用于量子场论^[11]中解决奇点的发散问题。
- 洛朗级数(Laurent series)的计算。未来可推广到二维共形场论^[7]中的算子积展开(Operator Product Expansion, OPE),类似于重整化和有效场论中的威尔逊展开(Wilson Expansion)。

此外,后续的物理类课程中还可以学到柯西积分的如下应用:在电磁学中用于求解麦克斯韦方程组,分析电场与势能的关系等;在光学中用于研究光场传播(如衍射、干涉等),以及光学元件的设计、分析和性能优化;在流体力学中用于探讨流体运动状态、分析判断层流-湍流、计算雷诺数等重要参数,以及评估流体的动力学特性;在热力学中用于建立热辐射、热传导模型,等等。

纽结是三维空间中的闭曲线;闭合方式有无穷多种,纽结就有无穷多种。纽结理论是数学中的拓扑学领域的重要分支,主要研究两个纽结是否同痕等价(isotopic,即可从一方连续形变到另一方);如果等价,又相差多少。要解决这些问题,都需要用到一个关键的概念即纽结拓扑不变量。在这一方向上产生了包括数学菲尔兹奖在内的多项重要工作^[15]。同时,纽结理论与物理中的场论相结合所形成的纽结场论,在物理和生物等学科中都有广泛的应用——从早期宇宙的宇宙弦,到普通流体、等离子体、量子超流体中的缠绕涡旋管和磁通管,到几何拓扑缺陷,到低维拓扑新材料中的轴子(axion)绝缘体,再到粒子物理中的夸克禁闭,以及生物病毒壳体重组中的DNA节链,处处都有纽结的身影。

瓦西里耶夫不变量(Vassiliev invariants)^[5]是一类重要的有限型纽结拓扑不变量族,而孔采维奇积分(Kontsevich integral)^[9]是构造前者的主流手段之一。而且,后者与拓扑量子场论的微

扰形式之间存在着天然的联系,因此更容易被物理学家所接受。目前已有工作将孔采维奇积分直接用于(2+1)-维动力系统的研究^[3]。

本文的主旨是从柯西积分出发,通过引进第三维,将二维复平面推广到(2+1)-维空间,从而与纽结理论联系起来。

1 关键——引进第三轴:从2-维复平面 $\mathbb{C}$ 推广到(2+1)-维空间 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$

1.1 从2-维 $\mathbb{C}$ 推广到(2+1)-维 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$

考虑域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的解析函数 $f(z)$ 。令 L 为 Ω 内的任意正定向闭合回路, L 所围区域记为 Σ ,即 $L = \partial\Sigma$ 。令 z 为 Σ 内一点,那么 f 在 z 处的函数值为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1)$$

这就是所谓的柯西积分^[8,16]①。对式(1)取特例 $f(z) \equiv 1$,有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{L \text{ 包围 } z} \frac{1}{\zeta - z} d(\zeta - z) = 1, \quad d(\zeta - z) = d\zeta, \text{ 因 } z \text{ 为常数} \quad (2)$$

式(2)最大的特点是左边的 L 为任意积分回路,即 L 只要包围 z ,就一定能在式右得到整数1。这说明该整数1的取值不依赖 L 的具体形状,是一个拓扑不变量。

为了更清晰地展示这个重要的事实,我们可以用动态的观点重新审视积分式(2),如图1所示。

(a) 在二维复平面中, z 为定点。式(2)左边的 $d(\zeta - z)$ 意味着 ζ 是跑动变量,为此可引进动点 ζ ,其绕行方向为正向即逆时针。 $\oint_L$ 表示绕行一个整圈 L ;而 $(\zeta - z)$ 是由 z 指向 ζ 的二维向量,可称为“关联子”。绕行的实质是关联子 $(\zeta - z)$ 的指

① 关于柯西积分在洛朗展开、留数计算、解析延拓等方面应用的简要回顾,参看补充材料(<https://zhuanlan.zhihu.com/p/1916946158070272230>)。

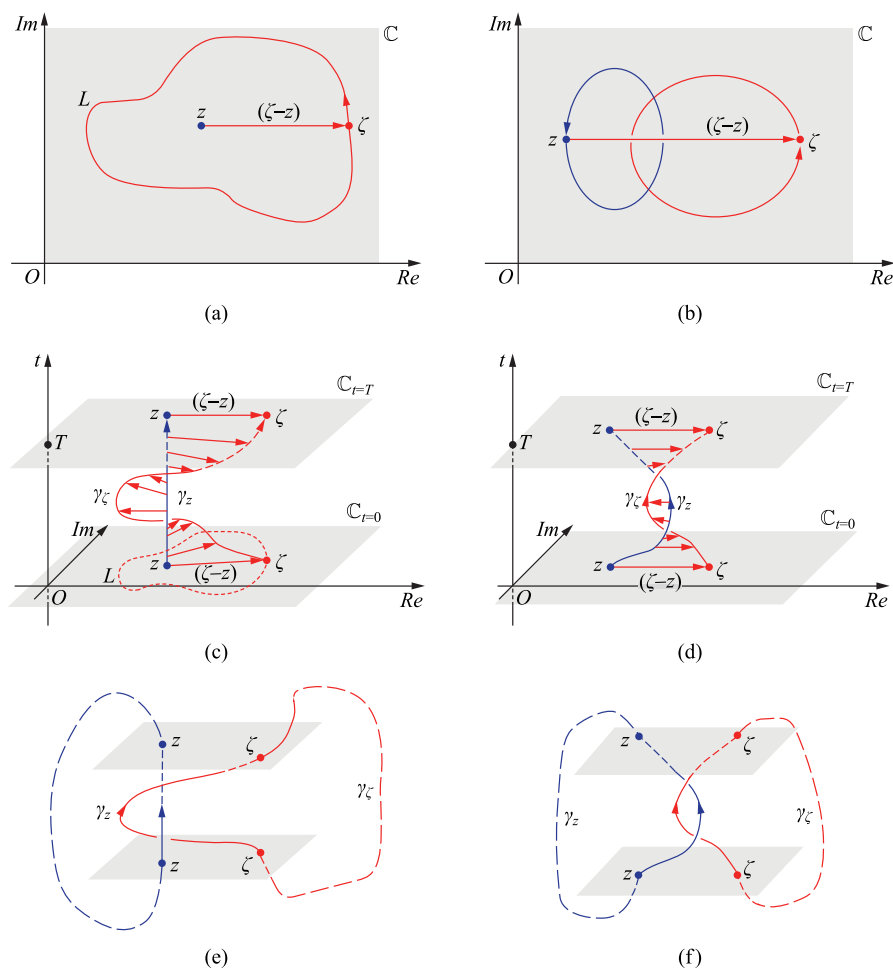


图1 用动态观点审视复平面 $\mathbb{C}$ 上的环路积分,即 ζ 沿 L 正向绕行 z 一周这个行为

(a)(b) 在二维复平面上; (c)(d) 引入时间轴,路径变成了天花板和地板之间的辫子图; (e)(f) 补全路径,形成了纽结图

向转过了 $+2\pi$ 。

(b) 有鉴于此,只要保证 $(\zeta-z)$ 转过 $+2\pi$ 即可,不必限定 z 必须为定点。因此一个等价的图景是 ζ 和 z 同时为动点,互相环绕旋转,有各自的轨迹。

(c) 为了更加凸显上述过程的动态特性,引入时间 t 轴作为第三轴,垂直于原 $\mathbb{C}$ 平面。这样一来空间就被扩充到 $(2+1)$ -维的 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$,也即 $z = z(t)$, $\zeta = \zeta(t)$ 。而(a)中的定点 z 和环路 L 就被提升为直辫子 γ_z 和曲辫子 γ_ζ 。

γ_z 和 γ_ζ 的下端在 $t=0$ 的 $\mathbb{C}$ 面上(记为 $\mathbb{C}_{t=0}$,可称为地板);上端在 $t=T$ 的 $\mathbb{C}$ 面上(记为 $\mathbb{C}_{t=T}$,可称为天花板, T 表周期)。比较 $t=0$ 和 $t=T$,有 $z(0)=z(T)$, $\zeta(0)=\zeta(T)$,意味着 z 和 ζ 经历一个周期后各自又回到原位置。从而 γ_z 和 γ_ζ 在 $\mathbb{C}_{t=0}$ 上的投影即是(a)中的定点 z 和环路 L 。

在任意一个时刻 $t \in [0, T]$ 都有一个水平复平面,记为 $\mathbb{C}_t$,它与 γ_z 和 γ_ζ 的横截点是 $z(t)$ 和 $\zeta(t)$ 。此时的 $(\zeta-z)$ 仍为水平向量;令 t 从0跑到 T ,则 $(\zeta-z)$ 就完成一个 $+2\pi$ 旋转,与(a)中的情形等价。

可以清晰地看到,曲辫子 γ_ζ 通过绕行直辫子 γ_z 一周而与后者有了 $(+1)$ 的纠缠。

(d) 类似地,对(b)也可以实施第三轴(时间轴)扩充,所得形状与(c)等价。与(c)的区别在于此时 γ_ζ 和 γ_z 都是曲辫子,二者之间是 $(+1)$ 的纠缠。

(e) 纽结理论中讨论的纽结是三维空间中的闭曲线。若不是闭曲线的,而是两端如(c)般固定在地板和天花板之间,则可以执行标准的手续,即在两板之外的无穷远处令上下端闭合,从而把两辫子变为两个纽结 γ_ζ 和 γ_z 。此二者所形成的位

型专有名称,“(正定向)霍普夫链环(Hopf link) H_+ ”,其纠缠状态用纽结缠绕数描述是 $Lk(\gamma_\zeta, \gamma_z) = +1$ 。参后文 3.1 节的公式(6)和图 5。

(f) 类似地,对(d)也可以执行开曲线的封闭手续。所得形状亦为霍普夫链环。

上述讨论揭示出式(2)的拓扑本质,即式右的整数+1 实质上就对应着 $Lk(\gamma_\zeta, \gamma_z) = +1$ 。^①

为加深读者的印象,下面再给出 $Lk(\gamma_\zeta, \gamma_z) = -1$ 的情形以作比较。在式(2)中,若强行令 L 的环绕方向为负向即顺时针,则应有

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{1}{\zeta - z} d(\zeta - z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{1}{\zeta - z} d(\zeta - z) = -1 \quad (3)$$

式(3)的拓扑本质可仿照图 1(a)和(e)给出,如图 2(a)和(b)。

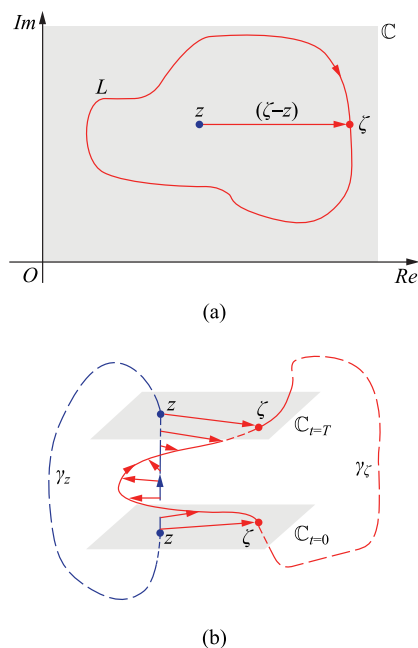


图 2 用动态观点审视复平面 $\mathbb{C}$ 上的环路积分:负向绕行情形。所形成的位型为负定向的霍普夫链环, H_-

1.2 辫子 γ_z, γ_ζ 所有定向(上、下)的组合汇总

图 1(a)~(f)可用图 3(a)给出,图 2(a)~(b)则以图 3(b)给出。

一旦允许辫子 γ_z, γ_ζ 的取向可上可下,在图 3(a)、(b)的基础上就可以产生更多的可能性。图 4(a)~(f)汇总了剩余的所有可能出现的情况,及其各自所对应的缠绕数 $Lk(\gamma_z, \gamma_\zeta)$ 的取值。特别值得注意的是,每种情形下 $Lk(\gamma_z, \gamma_\zeta)$ 正负号的计算规则。有如下规定:

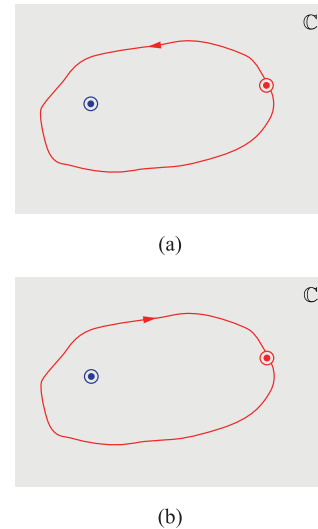


图 3 逆着 t 轴的俯视图:用新标记重新表达图 1、图 2。子图(a)等同于图 1,而图(b)等同于图 2。其中 $\odot$ 表示 γ_z, γ_ζ 的指向是垂直纸面向外

A 对辫子 γ_z ,规定其符号

$$\text{sgn}\gamma_z = \begin{cases} +1, & \text{若 } \gamma_z \text{ 的定向与 } t \text{ 轴相同} \\ -1, & \text{若 } \gamma_z \text{ 的定向与 } t \text{ 轴相反} \end{cases} \quad (4)$$

辫子 γ_ζ 的符号 $\text{sgn}\gamma_\zeta$ 完全符合相同的规定。

B ζ 绕行方向的符号,规定为

$$\text{sgn}(\zeta \text{ 绕行方向}) = \begin{cases} +1, & \text{若 } \zeta \text{ 沿逆时针方向绕行} \\ -1, & \text{若 } \zeta \text{ 沿顺时针方向绕行} \end{cases} \quad (5)$$

最后汇总 A 和 B,将所得的 $\text{sgn}\gamma_z, \text{sgn}\gamma_\zeta, \text{sgn}(\zeta \text{ 绕行方向})$ 相乘之后即可得 $Lk(\gamma_z, \gamma_\zeta)$ 的总正负号。如表 1 所示^②。

表 1 图 1、图 2 和图 4(a)~(f)中各自 $Lk(\gamma_z, \gamma_\zeta)$ 的符号计算: $\text{sgn}Lk(\gamma_z, \gamma_\zeta) = \text{sgn}\gamma_z \times \text{sgn}\gamma_\zeta \times \text{sgn}(\zeta \text{ 绕行方向})$

	图 1	图 2	图 4(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
$\text{sgn}\gamma_z$	+	+	+	-	-	+	-	-
$\text{sgn}\gamma_\zeta$	+	+	-	+	-	-	+	-
$\text{sgn}(\zeta \text{ 绕行方向})$	+	-	-	-	+	+	+	-
$\text{sgn}Lk(\gamma_z, \gamma_\zeta)$	+	-	+	+	+	-	-	-

① 说明:后文所提到的“辫子图”是指天花板-地板之外无连线的图,如图 1(c)、(d);而所提到的“纽结图”则指两板之外有连线、可形成完整纽结/链环的图,如图 1(e)、(f)。

② 说明:规则 A 即式(4)与后文第 4 节涉及的孔采维奇积分的相关文献中的规定保持一致。而规则 B 即式(5)在第 4 节中体现为计算之后得到的结果,因为那里情况复杂得多。在式(5)中之所以能够直接给出结果是因为情况很简单,仅仅用到了一个关联子 $(\zeta - z)$,且绕行仅一个整圈而已。

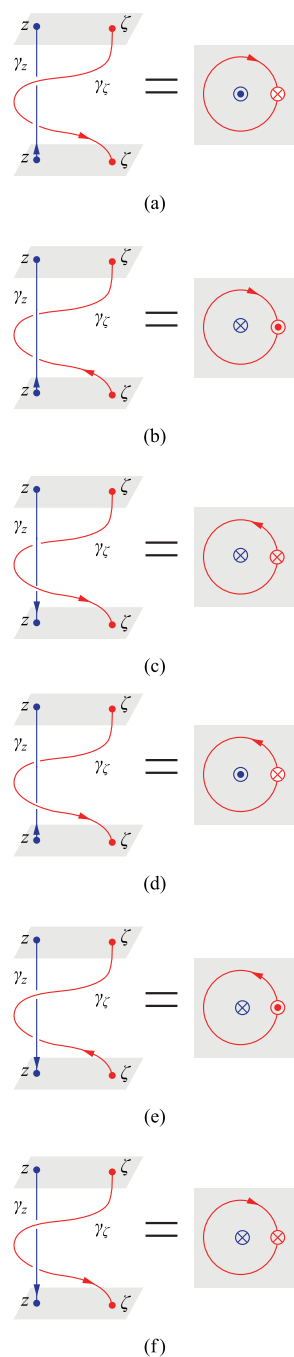


图4 当允许辫子 γ_z, γ_ζ 的定向可以向上、向下之后, 就出现超出图 3(a)、(b) 的更多可能性。子图(a)~(f)进行了汇总。 $\odot$ 表示垂直纸面向外, $\otimes$ 表示垂直纸面向内
(a) $Lk = +1$; (b) $Lk = +1$; (c) $Lk = +1$; (d) $Lk = -1$; (e) $Lk = -1$; (f) $Lk = -1$

2 缠绕数定义: 3-维与(2+1)-维计算方法的等价性

前文已提及缠绕数, 它是纽结理论中一个应用广泛的拓扑不变量工具(关于纽结不变量的简要介绍, 参看补充材料)。本节详细介绍其代数定

义、3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的积分定义、(2+1)-维空间 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 中的积分定义, 以及后二者的等价性。

2.1 代数定义

通常所谓的纽结图是指纽结在某个方向上的投影图(如图 5), 图中不会出现交叉点的重叠。每个交点都只有一根上线和一根下线。每个交叉点的代数度定义为

$$\epsilon(\nearrow \searrow) = +1, \quad \epsilon(\searrow \nearrow) = -1, \quad \epsilon(\nearrow \nearrow) = 0 \quad (6)$$

其中 $\nearrow \searrow$ 指上交叉, $\searrow \nearrow$ 指下交叉, $\nearrow \nearrow$ 指不交叉。而两个纽结 γ_A, γ_B 的互缠绕数 (mutual linking number) 定义为所有 n 个互交叉点的度数之和的一半

$$Lk(\gamma_A, \gamma_B) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \epsilon_r, \quad (7)$$

其中, ϵ_r 指第 r 个交叉点的度数, n 指互交叉点的总数图 5 给出了三个计算实例: (a) 中有 2 个交叉点, 每个度数为 +1, 故 $Lk(\gamma_A, \gamma_B) = \frac{1}{2} (+1 + 1) = 1$; (b) 中有 2 个交叉点, 每个度数为 -1, 故 $Lk(\gamma_A, \gamma_B) = \frac{1}{2} (-1 - 1) = -1$; (c) 中有 4 个交叉点, 每个度数为 -1, 故 $Lk(\gamma_A, \gamma_B) = \frac{1}{2} (-1 - 1 - 1 - 1) = -2$ 。

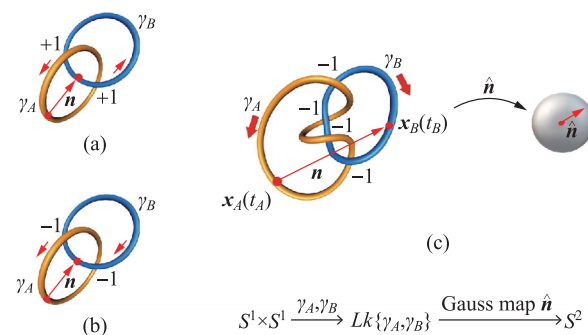


图5 缠绕数的三个计算实例, 每个实例中的链环包含两个纽结分量, γ_A 和 γ_B

(a) $Lk(\gamma_A, \gamma_B) = 1$; (b) $Lk(\gamma_A, \gamma_B) = -1$; (c) $Lk(\gamma_A, \gamma_B) = -2$ 。每个子图中单位向量 $\hat{n} = \frac{n}{|n|}$, 其中 $n = x_B - x_A, x_A \in \gamma_A, x_B \in \gamma_B$ 。高斯映射 $\hat{n}: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$

2.2 几何定义: 3 维空间 $\mathbb{R}^3$

高斯 (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777—

1855)1833 年提出 3 维空间 $\mathbb{R}^3$ 中两个有向纽结 γ_A 和 γ_B 的互缠绕数 $Lk(\gamma_A, \gamma_B)$ 的几何定义,如图 5(c)^[6] 所示。

- 定义向量 $\mathbf{n}$ 及其单位向量 $\hat{\mathbf{n}}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{x}_A$ 是 γ_A 上的任意一点, $\mathbf{x}_B$ 是 γ_B 上的任意一点。 $\mathbf{n}$ 将 γ_A 和 γ_B 上的两点 $\mathbf{x}_A$ 和 $\mathbf{x}_B$ 联系起来,也具有关联子的意义。为与前文式(2)的(2+1)-维关联子($\zeta - z$)有所区别,可称此处的 $\mathbf{n}$ 为 3 维关联子。

- 定义积分^[25]

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\gamma_A} \oint_{\gamma_B} \frac{(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \cdot (\mathrm{d}\mathbf{x}_A \times \mathrm{d}\mathbf{x}_B)}{\|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A\|^3} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_A \times \dot{\mathbf{x}}_B)}{\|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A\|^3} \mathrm{d}t_A \wedge \mathrm{d}t_B \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $t_A, t_B \in [0, 2\pi)$ 分别是 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ 的参数,而

$$\dot{\mathbf{x}}_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_A} \mathbf{x}_A。$$

高斯证明,此积分 I 可用 $\hat{\mathbf{n}}$ 诱导的球面积分来表达

$$\begin{aligned} I &= \hat{\mathbf{n}}^* \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathrm{d}\hat{\mathbf{n}} \times \mathrm{d}\hat{\mathbf{n}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^1 \times S^1} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\partial_{t_A} \hat{\mathbf{n}} \times \partial_{t_B} \hat{\mathbf{n}}) \mathrm{d}t_A \wedge \mathrm{d}t_B = N \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathrm{d}\hat{\mathbf{n}} \times \mathrm{d}\hat{\mathbf{n}}$ 具有明晰的几何意义,即 2-

球面 S^2 的微面元,其积分正是 S^2 的球面积。

$\hat{\mathbf{n}}^*$ 是拖回映射(pull-back),其功能是将 $\int_{S^2}$ 拖回到 $\int_{S^1 \times S^1}$, 所得结果是 S^2 面积 4π 的 N 倍。

它的意思是,当 $\mathbf{x}_A$ 和 $\mathbf{x}_B$ 分别跑尽 γ_A 和 γ_B 一圈, $\hat{\mathbf{n}}$ 将跑尽并覆盖单位球面 S^2 整数 N 遍。从而 N 就具有了代数意义,即 N 是映射 $\hat{\mathbf{n}}$ 的映射度。这样一来,高斯缠绕数复杂的多重积分式(9),就简化为各交叉点代数和的一半,即式(7)

$$I = \text{Deg}(\hat{\mathbf{n}}) = Lk(\gamma_A, \gamma_B) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \epsilon_r \quad (11)$$

2.3 几何定义: (2+1)-维空间 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$

在 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 空间中计算缠绕数,需要执行以下程序【以图 6 中的博罗明环(Borromean rings)计算为例】:

- 将原纽结/链环图改画为(2+1)-维的辫子图。图中包含的总辫子数可以多于 2。
- 要求每个交叉点必须处于不同的高度(即对应的 t 值不同)。于是以 t 为标记,辫子图被分成若干个区。每个区只有一个交叉点,在该处参与纠缠的只有两根辫子。
- 因原图中的各纽结分量都已赋予定向,故辫子图中每根辫子的定向也是固定好的。
- 每个交叉点的缠绕数依图 1、图 2、图 4(a)~(f) 及表 1 的方法计算。
- 最后将所有交叉点的缠绕数贡献求和,即可得

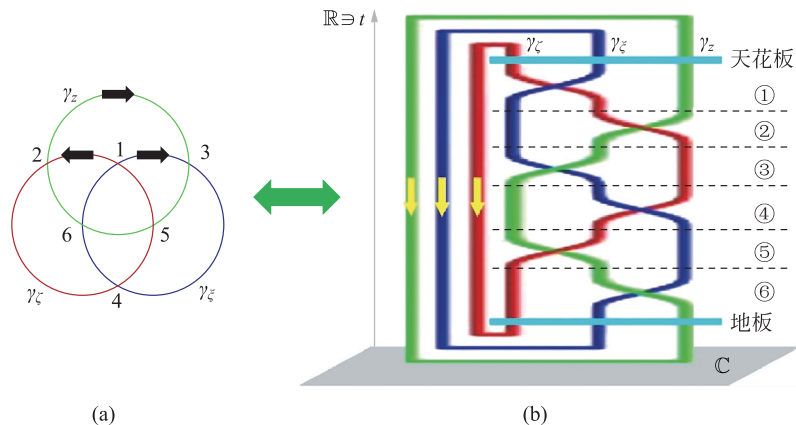


图 6 缠绕数的(2+1)-维计算方法举例——博罗明环(Borromean rings)

(a) 通常的博罗明环图示:用 1~6 标记当中的每个交叉点; (b) 在(2+1)-维空间 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 中用辫子图重新表达博罗明环,其中天花板和地板之间由上至下分成了 6 个区,每个区中只有一个交叉点,分别对应于图(a)中的每个交叉点。积分时沿 t 增加方向,依次积分第 6、第 5、……、第 1 区。需要注意,虽然全图共含三根辫子 $\gamma_z, \gamma_\zeta, \gamma_\xi$,但在每个区即每个交叉点处,参与纠缠的只有两根辫子,或 $\{\gamma_z, \gamma_\zeta\}$, 或 $\{\gamma_z, \gamma_\xi\}$, 或 $\{\gamma_\zeta, \gamma_\xi\}$

原纽结/链环的总缠绕数。

按如上程序实际操作后,可计算得到博罗明环的总缠绕数为零。这意味着, $Lk=0$ 无法区分博罗明环和“无相互嵌套、链接而摆放在一起的三个平庸圆环的组合”。说明缠绕数并非一个很强的(powerful)拓扑辨识工具。关于拓扑学基础理论与拓扑不变量的简介,以及纽结理论基础知识和典型的纽结不变量^[12],参看补充材料。

2.4 (2+1)-维算法与3维算法的等价性

关于缠绕数,前文的3维算法和(2+1)-维算法具有等价性。该等价性有不同的证明方法。

• 间接证明:

遵循路线“3维定义 $\Rightarrow$ 代数定义 $\Rightarrow$ (2+1)-维定义”。

即从3维空间到(2+1)-维空间建立投影,过程中交叉点的符号本质上与高斯缠绕数公式中的向量运算所确定的符号一致。直观理解是:在(2+1)-维中通过投影图计算交叉点符号来得到缠绕数,本质上是将在3维中纽结的相互位置在2维平面上进行记录。而缠绕数则是从更本质的向量运算角度实施计算,二者在刻画纽结纠缠方面达成一致。

• 直接证明:

严格证明需要用到微分几何和拓扑学中的一些定理与方法,包括投影和参数变换——譬如在图5中,对高斯映射的靶空间中的单位球面 S^2 进行面积分,可以采用球坐标($r=1, \theta, \phi$)。对 θ 进行变换 $\theta \rightarrow \tan \theta$,就将球坐标换成了柱坐标,即将球面 S^2 换成了无穷长圆柱面 $S^1 \times \mathbb{R}$ 。此代换的实质是在3维定义中的高斯球面 S^2 积分和(2+1)-维定义中的环路 S^1 积分之间建立直接的联系。此外还会涉及同伦群等等角度的讨论。诸多技术细节,限于篇幅无法在本文尽叙,容后另文详述。

3 孔采维奇积分:一般形式

柯西积分式(2)的关键是关联子 $(\zeta - z)$ 。通过追踪关联子旋转整圈(2π)的次数,就得到缠绕数。有鉴于缠绕数是较弱的拓扑不变量(即拓扑辨识工具),可以自然地提出一个问题:

是否同时使用多个关联子,就可以构造出更强的拓扑不变量工具?

孔采维奇积分的构造正是采取了这一思路,通过同时在积分中引入多个关联子,达到构造高阶拓扑不变量的目的。

对(2+1)-维空间中的纽结/链环 K ,如图7所示,其孔采维奇积分的一般形式写作^[5,9]

$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{t_{\min} < t_m < \dots < t_1 < t_{\max}} \dots \int_{t_j \text{ 非临界点}} \cdot \sum_{P=\{z_j, z'_j\}} (-1)^{\downarrow P} D_P \prod_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j} \quad (12)$$

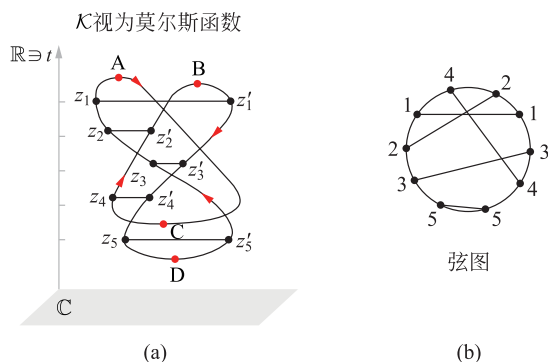


图7 在(2+1)-维空间中计算孔采维奇积分

(a) 几何因子: 纽结/链环 K 如图放置,规定好了定向。要求每个交叉点处于不同的高度(即对应的 t 值不同)。图中存在临界点 A, B, C, D ,意味着 K 被视为一个莫尔斯(Morse)函数。图中举例画出5个水平关联子(从高到低,脚标依次为1,2,...,5),给出

孔采维奇积分中的 $\prod_{j=0}^5 \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$; (b) 群因子: 弦图(chord diagram), 当中每根弦对应(a)中的一根关联子。被弦连接的两个生成元相互耦合,沿圆圈环行一周对应矩阵迹迹(trace)

其中每个构成元素的含义如下:

(1) $\sum_{m=0}^{\infty}$ 指对所有阶 m 求和, $m=0, 1, 2, \dots$ 。第 m 阶意为在 K 中放置 m 根水平关联子,即 m 根式(2)的“ $(\zeta - z)$ ”。每个 $\frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$ 对应一个式(2)中的 $\frac{d(\zeta - z)}{\zeta - z}$ 。

(2) $\frac{1}{(2\pi i)^m}$ 来自 m 个柯西积分的贡献。

(3) $\int_{t_{\min} < t_m < \dots < t_1 < t_{\max}} \dots \int_{t_j \text{ 非临界点}}$ 当中 $t_1, \dots, t_m$ 是 m 根水

平关联子的高度即 t 值,从高到低排列。固定排序 $t_{\min} < t_m < \dots < t_1 < t_{\max}$ 可以避免重复计数(——可类比量子场论中的时序乘积即 T 乘积来理解)。

(4) K 如图 7 放置,其中必含临界点(如图中的 A, B, C, D)。这意味着 K 是一个莫尔斯函数。计算时 t_j 只取非临界点即可;临界点所导致的发散可以避免,方法是考虑下文中的群因子,其中因 $1T$ -关系而必取零值,从而避免积分发散^[5,10]。

(5) $\sum_{P=\{z_j, z'_j\}}$ 指每根水平关联子都对对应竖直曲线上的一对点。

(6) $(-1)^{\dagger P}$ 指所有关联子贡献的总正负号。对第 j 个水平关联子而言,其两端所归属的辫子各自有定向,上为+,下为一,如式(4)所规定(参考图 1、图 2、图 4(a)~(f)和表 1)。于是关联子 j 的符号就是 $(-1)_j^{\dagger} = \text{sgn} \gamma_{z_j} \times \text{sgn} \gamma_{z'_j}$ 。进而,把所有关联子的贡献综合起来就得到总符号 $(-1)^{\dagger P} = \prod_j (-1)_j^{\dagger}$ 。

(7) $\bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$ 中的 $\bigwedge_{j=1}^m$ 是微分形式(即外微分方法)中的楔积。这个几何因子是孔采维奇积分的核心。“同时考虑 m 根水平关联子”,正符合本节初所提出的设想。

(8) D_P 是一个群因子^①,具体计算要用到弦图(chord diagram),即图 7(b)。因超出了本文拟达到的深度,故以下只对最基本的概念作粗浅的介绍;细节参考文献^[1,2,5]。

(a) 设问题中的结构群为 G 。当考虑图 7(a) 中的关联子 $\langle z_1, z'_1 \rangle, \langle z_2, z'_2 \rangle, \dots, \langle z_5, z'_5 \rangle$ 的群结构时,需将每个 z 和 z' 量子化为算符,并在 G 的李代数 g 的基上展开,即

$$\begin{aligned} \hat{z}_1 &= \hat{z}_1^a T_a, & \hat{z}'_1 &= \hat{z}'_1^{\bar{a}} T_{\bar{a}}; \\ \hat{z}_2 &= \hat{z}_2^b T_b, & \hat{z}'_2 &= \hat{z}'_2^{\bar{b}} T_{\bar{b}}; \\ &\vdots & & \\ \hat{z}_5 &= \hat{z}_5^e T_e, & \hat{z}'_5 &= \hat{z}'_5^{\bar{e}} T_{\bar{e}}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $T_a, T_{\bar{a}}, T_b, T_{\bar{b}}, \dots, T_e, T_{\bar{e}}$ 都是结构群 G 的生成元,即 g 的基分量,且自动采取爱因斯坦求和规则。对 $T_a, T_{\bar{a}}, T_b, T_{\bar{b}}, \dots, T_e, T_{\bar{e}}$ 取统一的表示 R ,在此之下每个 $T_a, T_{\bar{a}}, T_b, T_{\bar{b}}, \dots, T_e, T_{\bar{e}}$ 都是一个方阵。

(b) 群因子正比于“沿着纽结 K (例如图 7(a))运行一周,即 $\overline{z_1 z'_4 z'_2 z'_1 z'_3 z'_4 z'_5 z'_3 z'_2 z'_1}$, 后所取的矩阵迹(Trace)”

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R [\hat{z}_1^a T_a \hat{z}_4^d T_d \hat{z}_2^{\bar{b}} T_{\bar{b}} \hat{z}'_1^{\bar{a}} T_{\bar{a}} \hat{z}'_3^{\bar{c}} T_{\bar{c}} \hat{z}'_4^d T_d \hat{z}'_5^e T_e \cdot \\ T_e \hat{z}'_5^{\bar{e}} T_{\bar{e}} \hat{z}_3^c T_c \hat{z}_2^b T_b] \\ = \hat{z}_1^a \hat{z}_4^d \hat{z}_2^{\bar{b}} \hat{z}'_1^{\bar{a}} \hat{z}'_3^{\bar{c}} \hat{z}'_4^d \hat{z}'_5^e \hat{z}'_5^{\bar{e}} \hat{z}_3^c \hat{z}_2^b. \end{aligned} \quad (14)$$

(c) 由于 $\langle z_1, z'_1 \rangle$ 是一个关联子,所以 $\hat{z}_1^a \hat{z}'_1^{\bar{a}} \propto \delta^{a\bar{a}}$;类似的就有

$$\hat{z}_1^a \hat{z}'_1^{\bar{a}} \propto \delta^{a\bar{a}}, \quad \hat{z}_2^b \hat{z}'_2^{\bar{b}} \propto \delta^{b\bar{b}}, \quad \dots, \quad \hat{z}_5^e \hat{z}'_5^{\bar{e}} \propto \delta^{e\bar{e}} \quad (15)$$

将式(15)代入式(14),知其中的迹就成为

$$\text{Tr}_R [T_a T_d T_b T_a T_c T_d T_e T_e T_c T_b] \quad (16)$$

弦图 7(b)正是对式(16)的图示。对式(16)的计算依赖于群 G 及其李代数 g 的具体结构,包括所谓的 $1T$ -、 $4T$ -关系等工具。

可以看出,孔采维奇积分式(12)是对 m 的无穷积分。其中 $m=1$ 项退回到前文 3.3 节的情况,给出缠绕数;而 $m>1$ 的项则构造出更多的高阶纽结拓扑不变量。

孔采维奇积分在数学的多个方面有重要价值:在纽结理论中它是构造瓦西里耶夫不变量族^[14]的主流方法,有助于探究纽结的拓扑几何特征及其相互作用;在代数几何方面,它可用于研究代数曲线、曲面等几何对象的性质和分类,促进代数几何与其他数学分支的融合;在同调代数与范畴论方面,有助于引入新的函子结构。孔采维奇积分与物理学也有重要联系:它在量子场论和数学纽结理论之间搭建起桥梁,为量子场论中的散射振幅计算提供新的途径。

瓦西里耶夫不变量族是强有力的纽结分类工具,包含无穷多项不变量^[14]。伯曼和林晓松(Birman-Lin)指出^[4],一些著名的纽结多项式(如琼斯、考夫曼等)都可通过幂级数代换化为瓦西里耶

① 群因子植根于规范理论。对规范场来说,除了有底流形坐标 ($z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$) 外,还有内禀空间对称性所导致的群指标。本科生和低年级研究生可以尝试用实例来理解内禀空间:在量子力学中,自旋是独立于时空坐标的一种内禀对称性,用 $SU(2)$ 群来描述;粒子物理中,同时考虑同位旋和超荷对称性,则需要使用 $SU(3)$ 群来描述。一般的规范理论中的内禀对称群记为 G ,于是上述的弦图实质上是关联子所连接的两个群生成元之间的耦合。

夫不变量,故前者是后者的特例。

4 结论

纽结理论是低维拓扑学的主要分支。它不仅是纯数学的前沿课题,还与物理学的多个领域(如量子场论、统计物理、流体力学等)有深刻的内在联系。本文的主旨就是以“数学物理方法”为突破口,沿着“复变函数中的柯西积分→纽结缠绕数【3维和(2+1)-维】→孔采维奇积分”这一主线,为本科生或低年级研究生提供一条从本科理论物理基础课到科研前沿的路径。贯穿始终的核心概念是关联子,它在柯西积分当中表现为式(2)的 $\frac{d(\zeta-z)}{\zeta-z}$;在3维缠绕数中表现为式(8)的 $n = x_B - x_A$;而在孔采维奇积分式(8)中则被推广到 m 个关联子的情形, $\bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$ 。

读者可以本文为基础,逐步建立和发展拓扑学的思维方式。在后续的学习和研究中应特别关注那些对具体积分路径不敏感且特征物理量取值离散化、量子化的现象。它们或许就是潜在的拓扑物理新现象。

本文的补充材料详见 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/1916946158070272230>。

参 考 文 献

- [1] BAR-NATAN D. Perturbative aspects of the Chern-Simons topological quantum field theory[D]. New Jersey: Princeton University, June 1991.
- [2] BAR-NATAN D. Perturbative Chern-Simons theory[J]. J Knot Theor & Its Ramif, 1995, 4(4): DOI: 10.1142/S0218216595000247.
- [3] BERGER M A. Hamiltonian dynamics generated by Vassiliev invariants[J]. J Phys A, 2001, 34(7): 1363-1374.
- [4] BIRMAN J, LIN X-L. Knot polynomials and Vassiliev's invariants[J]. 1993, 111(2): 225-270.
- [5] CHMUTOV S, DUZHIN S, MOSTOVOY J. Introduction to Vassiliev knot invariants[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [6] GAUSS C F. Intensitas vis magneticae terrestis ad mensuram absoluta revocata[J]. Proc R Soc London, 1833, 10: 349-349.
- [7] FRANCESCO P, MATHIEU P, SENECHAL D. Conformal field theory[M]. Springer: Springer Science & Business Media, 1999.
- [8] 姜颖. 数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [9] KONTSEVICH M. Vassiliev's knot invariants[J]. Adv Sov Math, 1993, 16(2): 137-150.
- [10] LABASTIDA J M F, PÉREZ E. Kontsevich integral for Vassiliev invariants from Chern-Simons perturbation theory in the light-cone gauge[J]. J Math Phys, 1998, 39(10): 5183-5198.
- [11] PESKIN M E, SCHROEDER D V. An introduction to quantum field theory[M]. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [12] RICCA R L, LIU X. Knotted fields[M]. Hong Kong: Springer-Verlag, 2024.
- [13] RICCA R L, NIPOTI B. Gauss' linking number revisited[J]. J Knot Theor Ramif, 2011, 20(10): 1325-1343.
- [14] VASSILIEV V A. Cohomology of knot spaces[J]. Adv Sov Math, 1990, 1: 23-69.
- [15] WITTEN E. Quantum field theory and the Jones polynomial[J]. Commun Math Phys, 1989, 121(3): 351-399.
- [16] 杨孔庆, 黄亮. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2024.