

论大学物理中辨析与理解微积分含义的重要性

刘 菊 程 涛 陈健全 严文悦 余 祥 刘子豪 郑昌盛

(中国矿业大学(北京)理学院, 北京 100083)

摘 要 本文围绕“大学物理”教学中一道经典的电磁感应题目展开了详细探讨, 针对学生在求解该题目过程中遇到的困惑与常见错误进行了剖析。分析发现准确把握数学积分运算中各量的物理含义是避免出现该问题的关键, 本文系统全面的讨论了在时间变化磁场 $B(t)$ 、空间变化磁场 $B(x)$ 及时间空间变化磁场 $B(x, t)$ 三种不同情形下积分计算结果上的差异, 并从物理含义的角度给出了圆满解释, 阐明了该问题的本质, 也说明了运用微积分解决实际问题时正确理解微积分运算含义的重要性。

关键词 微积分; 大学物理; 电磁感应

IMPORTANCE OF DISCRIMINATING AND UNDERSTANDING THE MEANING OF CALCULUS IN COLLEGE PHYSICS

LIU Ju CHENG Tao CHEN Jianquan YAN Wenye YU Xiang LIU Zihao ZHENG Changsheng

(School of Science, China University of Mining & Technology - Beijing, Beijing 100083)

Abstract This article conducts a detailed exploration around a classic electromagnetic induction problem in the teaching of “College Physics,” analyzing the confusions and common mistakes students encounter when solving the problem. The analysis reveals that accurately grasping the physical meanings of various quantities in mathematical integration operations is key to avoiding these issues. The article systematically discusses the differences in integration calculation results under three different scenarios: time-varying magnetic field $B(t)$, spatially-varying magnetic field $B(x)$, and spatiotemporally-varying magnetic field $B(x, t)$. It provides a comprehensive explanation from the perspective of physical implications, clarifying the essence of the problem and highlighting the importance of correctly understanding the meaning of calculus operations when solving practical problems.

Key words calculus; college physics; electromagnetic induction

大学物理与高等数学是高等院校开设的理工专业必修的两门公共基础课。数学是研究物理学的工具, 是近代物理学的书写语言^[1-3], 从某种意义上来说, 数学是物理的基础, 很多院校都会安排在大学物理课程之前开设高等数学, 并且在大学物理课程中也会继续分出一定的时间回顾、讲授

相关数学基础知识^[4-6]。其中, 矢量运算与微积分运算是最重要的两部分内容^[7,8]。与中学阶段的物理课程相比, 大学物理学习中最显著的特点就是微积分的运用, 它已经成为大学阶段解决物理问题的基本方法^[9,10]。

中学阶段涉及的物理问题一般都是关于恒定

收稿日期: 2024-11-01

基金项目: 中国矿业大学(北京)大学生创新训练项目(编号: 202407001); 北京高校青年教师创新教研工作室资助项目。

通信作者: 刘菊, liuju@cumt.edu.cn。

引文格式: 刘菊, 程涛, 陈健全, 等. 论大学物理中辨析与理解微积分含义的重要性[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 90-94.

Cite this article: LIU J, CHENG T, CHEN J Q, et al. Importance of discriminating and understanding the meaning of calculus in college physics[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 90-94. (in Chinese)

量或者单一离散量,规律的描述都很简单,初等代数即可准确完备的呈现。而在大学物理阶段,涉及的是更为一般的连续变化过程,量与量之间的关系往往只能用微分或积分表达式给出^[4],解决物理问题时中学阶段学生所擅长的初等代数运算已无运用场景。因而,学生在学习大学物理的初期,面对的问题反而不是物理知识的理解,而是数学方法的应用。其中,困难最大的莫过于使用微积分的方法来分析解决问题。即使大部分高校都将高等数学作为大学物理的先修课,但高等数学课程是由数学教师讲授的,由于专业的限制,加之课时的不断缩减,高数知识与实际运用的结合极少会被涉及,因此部分学生只是学会了符号运算的规则,而无法更深层次的理解它的含义。通过本校物理系教师的教学经验分享和我校非物理专业理工科的学生调查以及文献调研发现,这种现象在学生群体中较为普遍^[9,11,12]。以我校为例,约有超过 75% 的学生存在该问题。另外在一些教材及习题中,不定积分书写形式如 $\int_a^x f(x)dx$, 其上下限与积分变量使用同一个符号,会干扰学生对积分含义的理解。

因而大学物理教学的第一个重要任务就是要尽快使大学生理解微积分的含义。在本文中围绕一道很经典的电磁感应题目,探讨在该题目求解过程中,学生甚至新教师都可能会遇到的疑惑。我们将看到,微积分运算中的每一步、每一个细节都可能会是学生理解运用过程中的一道屏障。同时通过本文的分析,新教师也会认识到对微积分含义的准确理解在物理教学中的重要性。

1 典型题目与求解方法

例题:如图 1 所示,有一弯成 θ 角的金属架 COD 放在磁场中,磁感应强度 B 的方向垂直于金属架 COD 所在平面,一导体杆 MN 垂直于 OD 边,

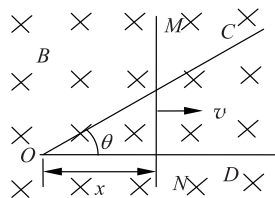


图 1 例题示意图

并在金属架上以恒定速度 v 向右滑动, v 与 MN 垂直, 设 $t=0$ 时, $x=0$, 求下列两情形中, 框架内的感应电动势 ϵ_i 。(1) 磁场分布均匀, 且 B 不随时间改变; (2) 非均匀的交变磁场 $B=Kx\cos\omega t$ 。

第一问的解答非常简单, 学生在求解时不会遇到问题, 学生的问题集中出现在第二问, 在解答时会因为对积分公式中各量理解不到位而采用以下做法。

错误解:(2) 取顺时针为回路绕向的正方向, 则通过该面的磁通量为

$$\Phi(t) = \int_0^x Kx^2 \tan\theta \cos\omega t dx \quad (1)$$

在解题思路, 先计算得到磁通量随时间 t 变化的函数 $\Phi(t)$, 然后依据法拉第电磁感应定律对时间求导获得感应电动势, 在思路分析上没有任何错误。然而, 很多学生在接下来的积分过程中会进行以下错误操作:

依据题意

$$x = vt \quad (2)$$

因而有

$$dx = v dt \quad (3)$$

进行数学上的变量替换, 得到

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^x Kx^2 \tan\theta \cos(\omega t) dx \\ &= \int_0^t K(vt)^2 \tan\theta \cos(\omega t) v dt \\ &= \int_0^t K \tan\theta v^3 t^2 \cos(\omega t) dt \\ &= K \tan\theta v^3 \left[\sin(\omega t) \frac{t^2}{\omega} + \cos(\omega t) \frac{2t}{\omega^2} - \frac{2\sin(\omega t)}{\omega^3} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

依据法拉第电磁感应定律对式(4)求导, 得

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -K \tan\theta v^3 t^2 \cos(\omega t) \quad (5)$$

以上是非常典型的错误解法, 甚至有些做对的学生在面对这种解法时也看不出错误在何处。下面给出第二问正确的参考答案。

正确解:(2) 取顺时针为回路绕向的正方向, 则通过该面的磁通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^x Kx^2 \tan\theta \cos\omega t dx \\ &= \frac{Kx^3 \cos\omega t \tan\theta}{3} \end{aligned} \quad (6)$$

感应电动势为

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= \frac{Kx^3\omega\sin\omega t\tan\theta}{3} - Kx^2v\cos\omega t\tan\theta \\ &= \frac{Kv^3t^3\omega\sin\omega t\tan\theta}{3} - Kv^3t^2\cos\omega t\tan\theta \quad (7)\end{aligned}$$

2 问题初步分析

比对错误解以及正确解,可以发现问题出在积分式(4)的变量替换中。在高等数学学习中,习题、例题计算中的变量替换都很直接,不需要过多的考虑含义,为的是训练积分运算技巧与方法。但是涉及物理问题时,变量较多,且在表述中往往还会出现坐标变量与位置参量共用同一字母的问题。

例如本题,求磁通量所用的积分表达式(1)中,积分上限“ x ”的含义为 t 时刻导体棒的位置,也是积分区域的空间边界,满足 $x=vt$ 。而其余的“ x ”都是坐标量,如积分表达式 $\Phi(t)=\int_0^x Kx^2\tan\theta\cos\omega t dx$ 中,标下画线的 x^2 ,不是运动的导体棒在 t 时刻的位置的平方;另外微分 dx 是划分空间网格的无限小量,并不是 dt 时间内导体棒的位置改变量,两者物理含义截然不同。因而将其替换为 $x^2=(vt)^2$, $dx=vdt$ 必然会出问题,给学生带来很大困扰。

在题目描述中应尽量避免用坐标量 x 去代表某个研究对象的位置,避免造成此类混淆。当然,用 x 表述某一个变化的位置是最常见的一种习惯用法,因而最根本的问题还是在于学生对积分理解的不到位。面对遇到该问题的学生,有的教师给出的解释看似很根本,但几乎起不到解惑的效果,例如强调 x, t 是两个变量,计算 t 时刻的磁通量时只能对 x 积分。上述解释在数学上是严谨的,但学生几乎得不到能解决他们疑惑的信息。下面对此问题继续详细拓展,教师可以充分利用学生遇到该问题时已经充分思考的状态,通过下述分析方法引导学生做更深一步的理解。

3 问题拓展分析

为了更加简便明了的阐明上述问题的根源,我们将该题目略加改变,将磁感应强度 B 随时间、空

间的函数表达式简化,分 $B=B(x)$ 以及 $B=B(t)$ 两种情况讨论。这两种情形的差异也是教学实践中学生最感兴趣的。

3.1 磁场只显含空间坐标 $x, B=B(x)$

若磁场只是空间函数,假设 $B=kx$, 比对上述正确以及错误的解法会发现,它们的结果是相同的。

错误解

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^x Kx^2\tan\theta dx \\ &= \int_0^x K(vt)^2\tan\theta v dt \\ &= \int_0^t K\tan\theta v^3 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3}K\tan\theta v^3 t^3 \quad (8)\end{aligned}$$

正确解

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^x Kx^2\tan\theta dx = \frac{1}{3}K\tan\theta x^3, \text{代入 } x=vt, \text{得} \\ \Phi &= \frac{1}{3}K\tan\theta x^3 = \frac{1}{3}K\tan\theta v^3 t^3 \quad (9)\end{aligned}$$

虽然做了不正确的变量替换,但是两者的答案却是完全相同的。

3.2 磁场只显含空间坐标 $t, B=B(t)$

若磁场只是时间函数,假设 $B=kt$, 比对上述正确以及错误的解法会发现,这种情形下它们的结果是不同的。

错误解

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^x Ktx\tan\theta dx \\ &= \int_0^x Kt(vt)\tan\theta v dt \\ &= \int_0^t K\tan\theta v^2 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3}K\tan\theta v^2 t^3 \quad (10)\end{aligned}$$

正确解

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^x Ktx\tan\theta dx = \frac{1}{2}K\tan\theta tx^2, \text{代入 } x=vt, \text{得} \\ \Phi &= \frac{1}{2}K\tan\theta tx^2 = \frac{1}{2}K\tan\theta v^2 t^3 \quad (11)\end{aligned}$$

在磁场 B 随时间 t 变化的情况下,变量替换这种错误解法导致的问题才能体现出来,这个有趣的结果背后的原因可以引起学生的兴趣,将它解释清楚便可以让学生对积分计算有更深一步的

理解,达到我们的教学目的。

3.3 问题分析与解释

为了让学生进行更深刻的思考,接下来从物理的角度,通过比对去说明上述问题。求解磁通量 $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 时,从计算的角度,可以理解为面元加权求和。为了更好地引导学生进行思考理解,将该问题进行由浅入深的拆解,先思考求面积 $S = \int dS$ 运算过程中,进行 $x = vt$ 变量替换会不会产生问题。计算很简单,可以得出结果是相符的。

正常求解面积的积分过程,可以理解为从左向右将面元逐次相加,如图 2 所示。

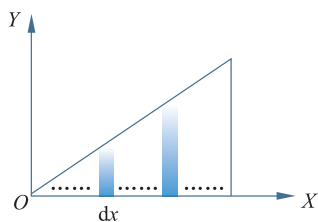


图 2 积分示意图

该求解过程恰恰与导体棒在轨道上随时间的运动(见图 3),从左向右扫过整个轨道面是相似的。将 dx 替换为 vdt ,并对时间 t 积分,等价于通过累加不同时段导体棒扫过的面元获得扫过的总面积,因而变量替换后再积分计算出的结果与正确方法相同。

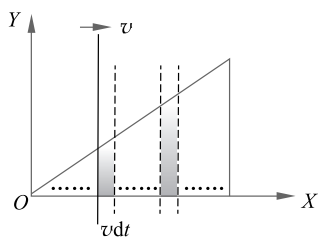


图 3 替换积分示意图

有了对面积计算的理解之后,再考虑磁通量的计算。在用积分计算磁通量时,相当于对面元加权重 B 后再求和。图 4 和图 5 中,横坐标为坐标变量 x ,纵坐标为时间 t 。按照磁通量的定义, $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 中不同面元对应的 B 应取同一时刻的值,完成积分即可获得某时刻回路的磁通量,因此平直串联的灰色方框对应正确的积分过程。倾斜串联的深色方框对应做了 $dx = vdt$ 替换后的积分

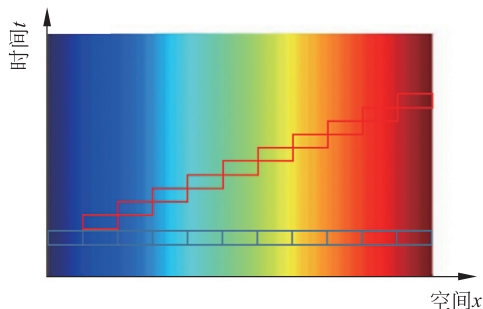


图 4 不含时间项磁场 $B(x)$ 分布

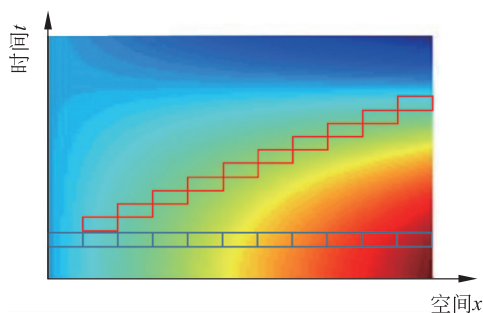


图 5 含时间项磁场 $B(x, t)$ 分布

过程,累加过程中 B 值并不是同一时刻的值,而是随着 t 改变而取不同时刻的值。

图 4 对应的情形下, B 只显含空间坐标,磁场的值只随空间变化而不随时间改变,因此可以看出对应的浅色方框与深色方框选取的 B 值是相同的,因而就计算结果而言没有差异。如果磁场是随时间变化的,如图 5 所示,替换变量的错误解法就会带来问题。积分中深色方框选取的 B 值分属于不同时刻,随着时间 t 改变而发生改变。相比之下浅色方框选取的 B 值是同一时刻的,因而浅色方框与深色方框选取的 B 值并不相同,计算结果必然产生差异。

上述分析方法在实践中可以很透彻的解决学生的疑惑,且整个过程可以一步步的引导学生去提炼剖析问题根源,进而思考理解积分过程的物理含义,达到良好的教学效果。

4 结语

积分含义的理解对于学好大学物理、用好高等数学工具至关重要。大学物理作为理工科学生的重要基础课程,不仅是物理知识体系构建的关键环节,更是微积分应用的重要训练平台。本文

针对学生在学习微积分过程中遇到的两个主要问题进行了深入探讨:一是部分学生对微积分知识掌握不牢固,或者无法将微积分知识与物理问题相结合,导致在解决实际问题时感到困难;二是部分教材中存在一些符号书写问题,如不定积分的上下限与积分变量使用同一字母,这种书写方式容易干扰学生对积分含义的理解,影响其正确的理解物理与数学运算。

针对上述问题,本文以大学物理课程教学中一道经典的电磁感应题目为例,系统全面地讨论了不同情形下积分计算结果上的差异,并从数学和物理两个角度去分析积分运算中各量的物理含义。通过系统详细的分析,帮助学生更好地理解微积分的数学本质,有效提升学生对微积分的理解和运用水平,强化其在物理问题中的应用能力。进而为后续的专业课程学习奠定坚实的数学和物理基础。

此外,本文的研究也为教学实践提供了改进措施:第一,教师应及时发现学生在微积分学习中的困难,并通过系统的讲解和练习帮助学生对其理解到位;第二,现行高等数学教材和大学物理题目中应注意符号书写的规范性,避免因符号混淆而干扰学生的理解,进一步降低学生的学习障碍。

上述研究和改进措施为深层优化大学物理教学提供了新的思路和方法,也为微积分与物理学的结合提供了实践范例。大学物理教师在教学过程中可以进一步探索更多类似教学案例,结合学生的反馈不断完善教学方法,以推进理工科学生数学与物理综合能力的全面提升。

参 考 文 献

- [1] 路甬祥. 百年物理学的启示[J]. 物理, 2005(7): 467-472.
LU Y X. Enlightenment from a century of physics[J]. Physics, 2005(7): 467-472. (in Chinese)
- [2] 郝卜, 呼方涛, 王猛, 等. 浅析大学物理中高等数学的应用技巧[J]. 科技信息, 2010(21): 659, 720.
HAO B, HU F T, WANG M, et al. Brief analysis on the application skills of advanced mathematics in college physics[J]. Science & Technology Information, 2010(21): 659, 720. (in Chinese)
- [3] 饶华东, 肖巧玲, 颜辉, 等. 物理与数学交融思维和能力并育——以速度极值问题的求解为例[J]. 物理教学, 2024, 46(11): 62-64, 68.
RAO H D, XIAO Q L, YAN H, et al. Integration of physics and mathematics thinking and cultivation of ability: Taking the solution of velocity extrema problems as an example[J]. Physics Teaching, 2024, 46(11): 62-64, 68. (in Chinese)
- [4] 胡南. 数学模式与物理世界——剖析建立数学模式对大学物理教学的重要性[J]. 物理与工程, 2004(6): 46-48, 53.
HU N. Mathematical models and the physical world: Analyzing the importance of establishing mathematical models for college physics teaching[J]. Physics and Engineering, 2004(6): 46-48, 53. (in Chinese)
- [5] 任全年, 王爱国. 怎样在普通物理教学中恰当地应用数学方法[J]. 物理与工程, 2013, 23(4): 30-31, 33.
REN Q N, WANG A G. How to properly apply mathematical methods in general physics teaching[J]. Physics and Engineering, 2013, 23(4): 30-31, 33. (in Chinese)
- [6] 曹海霞. 浅谈大学物理与中学物理教学的有效衔接[J]. 物理教师, 2021, 42(10): 25-29.
CAO H X. Discussion on the effective connection between university physics and middle school physics teaching[J]. Physics Teacher, 2021, 42(10): 25-29. (in Chinese)
- [7] 徐劳立. 大学物理与微积分[J]. 物理与工程, 2014, 24(2): 49-50.
XU L L. University physics and calculus[J]. Physics and Engineering, 2014, 24(2): 49-50. (in Chinese)
- [8] 黎定国, 邓玲娜, 刘义保, 等. 大学物理中微积分思想和方法教学浅谈[J]. 大学物理, 2005(12): 51-54.
LI D G, DENG L N, LIU Y B, et al. Discussion on the calculus way of thought and method in the university physics teaching[J]. College Physics, 2005(12): 51-54. (in Chinese)
- [9] 陈剑军, 徐涛. 高等数学课程与大学物理课程教学协同刍议[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2011, 24(6): 29-31.
CHEN J J, XU T. Discussion on the teaching coordination between higher mathematics and university physics courses[J]. Journal of Higher Correspondence Education (Natural Sciences), 2011, 24(6): 29-31. (in Chinese)
- [10] 陈治, 陈祖刚, 郎霞, 等. 关于高等数学与大学物理的互补链接[J]. 教学与教材研究, 1999(2): 44-46.
CHEN Z, CHEN Z G, LANG X, et al. On the complementary integration between higher mathematics and university physics[J]. Research in Teaching and Teaching Materials (Education), 1999(2): 44-46. (in Chinese)
- [11] 张欣艳, 陈佰树, 王乐新, 等. 跳出专业视阈谈大学物理课与微积分的糅合教学[J]. 高师理科学刊, 2020, 40(2): 93-96.
ZHANG X Y, CHEN B S, WANG L X, et al. Mash-up teaching of the university physics course and the calculus in jumping out of the professional visual threshold[J]. Journal of Science of Teachers' College and University, 2020, 40(2): 93-96. (in Chinese)
- [12] 白瑞萍, 刘淑晶, 吴克坚, 等. 军医大学医工专业大学物理课程教学中相关数学问题的探索与思考[J]. 物理与工程, 2023, 33(3): 14-20.
BAI R P, LIU S J, WU K J, et al. Exploration and reflection on mathematical problems related to the teaching of university physics courses for medical engineering majors in military medical universities[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(3): 14-20. (in Chinese)