

顶竿杂技表演中的动力学分析

杜名阳 蔡 林

(华中科技大学, 湖北 武汉 430074)

摘 要 在本研究中,我们采用了系统化的方法深入分析了顶竿杂技表演中的动力学原理。通过对表演者和竿的物理特性进行精确测量与分析,我们建立了一个综合考虑质量分布、转动惯量、重力影响以及力学规律的动力学模型。该模型量化了关键的运动学参数,如角速度和角加速度,并设定了细致的初始条件和边界条件。利用数学建模和物理分析方法,我们求解了描述顶竿运动的微分方程,获取了竿的倾斜角度、角速度和角加速度等关键运动参数。这些参数不仅为我们提供了对顶竿表演力学行为的定量描述,也为表演者提供了预测动作影响和制定补偿策略的科学工具。研究结果表明,通过精确控制和调整,可以显著提高顶竿表演的安全性和艺术性,为相关领域的研究和实践提供了新的视角和理论支持。

关键词 顶竿;力学分析;稳定性;补偿策略

DYNAMIC ANALYSIS OF POLE BALANCING ACROBATIC PERFORMANCE

DU Mingyang CAI Lin

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074)

Abstract In this study, we employed a systematic approach to deeply analyze the dynamic principles involved in acrobatic pole balancing performances. Through precise measurement and analysis of the physical characteristics of performers and poles, we established a dynamic model that comprehensively considers mass distribution, moment of inertia, gravitational effects, and mechanical laws. This model quantifies key kinematic parameters such as angular velocity and angular acceleration, and sets detailed initial and boundary conditions. Utilizing mathematical modeling and physical analysis methods, we solved the differential equations describing the motion of the pole, obtaining key motion parameters such as the tilt angle, angular velocity, and angular acceleration of the pole. These parameters not only provide us with a quantitative description of the mechanical behavior of the pole balancing performance but also offer performers a scientific tool for predicting the impact of actions and developing compensation strategies. The research results indicate that through precise control and adjustment, the safety and artistry of pole balancing performances can be significantly improved, providing new perspectives and theoretical support for research and practice in related fields.

Key words pole balancing; dynamics analysis; stability; compensation strategies

收稿日期: 2024-09-20

基金项目: 国家自然科学基金(项目编号:42374101)。

通信作者: 蔡林, cailin@hust.edu.cn。

引文格式: 杜名阳, 蔡林. 顶竿杂技表演中的动力学分析[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 67-74.

Cite this article: DU M Y, CAI L. Dynamic analysis of pole balancing acrobatic performance[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 67-74. (in Chinese)

在杂技艺术的舞台上,顶竿表演以其惊险刺激、技艺高超而著称。这项表演不仅考验着演员的体力与平衡能力,更蕴含着丰富的物理原理和力学计算。

在顶竿表演里,演员用头、额、鼻或肩,甚至口衔棍棒顶着长竿,而且长竿顶端还有演员进行表演,巧妙掌握物体的平衡维持稳定不倒。演员在顶端的表演五花八门,但所有的顶竿表演都归结为同一个力学模型,即一个以动点为支点的倒置的复摆。所蕴含的力学问题是:复摆的不稳定直立状态是如何依靠支点的运动转化为稳定的(图1)。尽管目前已有研究开始关注顶竿杂技表演中的力学问题,但这些研究在力学模型的构建上往往较为简单,通常只考虑了长竿本身的物理特性,而未能充分纳入顶端演员的动态影响及其与竿的相互作用。此外,对于顶竿表演中稳定性的深入分析以及下方演员采取的移动策略研究仍然相对欠缺,这限制了我们对表演过程中复杂力学互动及其稳定性控制机制的全面理解。因此,本研究旨在填补这一空白,通过建立更为精细和全面的动力学模型,并探索演员的补偿策略,为提高顶竿表演的安全性和艺术表现提供更深入的科学见解。

为了填补这一空白,本文旨在通过科学的方法,解析顶竿杂技表演中的力学原理,并探讨如何通过精确的计算来确保表演的安全性和稳定性。我们深入分析了在轻微扰动发生时,竿的稳定性与各因素之间的关系,并探讨了通过位移补偿、速度补偿和加速度补偿来维持竿的平衡,维持稳定状态的可能性。

本文的创新点在于:

- 建立了一个基于质心定理和转动惯量的动力学模型,用于分析顶竿表演中的力学问题。
- 提出了位移补偿、速度补偿和加速度补偿策略,并通过仿真计算验证了这些策略的有效性。
- 分析了初始稳定性和运动稳定性,探讨了竿模型倾斜角度对系统稳定性的影响。
- 研究了补偿同时性和补偿瞬时性对稳定性的影响,为实际表演中的稳定性控制提供了指导。

通过本研究,我们不仅为顶竿杂技表演提供了科学的稳定性分析方法,还为演员在实际表演中提供了实用的补偿策略,为提高顶竿表演的安全性和稳定性做出了贡献。

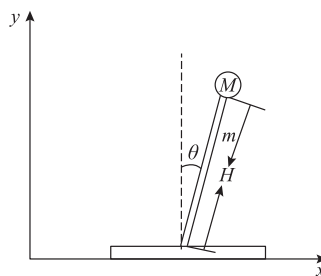


图1 物理抽象模型

1 抽象模型与计算

假设人的质量为 M ,竿的质量为 m ,竿高 H ,组合重心 h ,所有力矩计算均以底部表演者头部支点即系统转动中心为参考点。

在理想模型中,我们简化上方表演者为质量为 M 的点质量,集中作用于竿顶,从而便于对系统重心位置与力矩进行建模与分析。根据质心定理,系统的组合质心高度 h 近似为

$$h \approx \frac{(2M+m)H}{2(M+m)} \quad (1)$$

转动角度为 θ 时,力矩为

$$\tau = (M+m)gh \sin\theta \quad (2)$$

需要指出的是,在实际顶竿表演中,上方表演者并非理想点质量,而是具有空间尺寸的三维结构体。尤其在动态表演过程中,如挥臂、转体或跳跃等动作,会引起其质心高度上升,并偏离竿的中心轴线。此类偏心质心将引入横向力矩分量,从而对系统稳定性造成显著影响。

为了定量表达这一扰动,现引入质心横向偏移量 X_c ,其带来的附加扰动力矩为

$$\tau' = MgX_c$$

因此,对理想模型中的力矩表达式(式2)进行修正后,可得

$$\tau = (M+m)gh \sin\theta + MgX_c$$

在常规动作幅度下,人体横向偏移量 X_c 相较于主力矩项通常较小,可作为微扰处理。因此在后续分析中,若无大动作扰动,可近似取 $X_c \rightarrow 0$ 。则系统的转动惯量为

$$I \approx \left(\frac{1}{3}m + M \right) H^2 \quad (3)$$

由式(2)与式(3), 根据角动量定理, 可得, 角加速度 β 为

$$\beta = \frac{g \sin \theta}{2H} \left(2 + \frac{1}{\frac{3M}{m} + 1} \right) \quad (4)$$

在分析顶竿杂技表演的动力学模型时, 我们发现角加速度是一个关键参数, 它直接影响到系统稳定性的动态表现。由式(4)可知, 角加速度与竿长成反比, 与人和竿模型的质量比成反比。根据式(4), 角加速度与竿的长度 H 成反比, 同时与人和竿模型的质量比 $\frac{3M+m}{m}$ 也成反比。这意味着, 当竿的长度增加时, 同样的重力矩会产生更小的角加速度, 带来更好的不稳定性。同样, 当人与竿的质量比增大时, 即人的重量相对于竿的重量增加时, 同样的重力矩会产生更小的角加速度, 带来更好的不稳定性。

$$\text{记 } k = \frac{g}{2H} \left(2 + \frac{1}{\frac{3M}{m} + 1} \right), \text{ 由式(4)与 } \theta = \omega t$$

可知

$$\beta = k \sin(\omega t) \quad (5)$$

将式(5)化为微分形式即为

$$\frac{d\omega}{dt} = k \sin(\omega t)$$

将 dt 移至等式右边, 化为可积形式为

$$d\omega = k \sin(\omega t) dt$$

进行泰勒展开后, 化简为

$$\frac{d\omega}{dt} \approx k \left(\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + o(\omega^4 t^4) \right) dt$$

因为顶竿杂技表演中时间 t 较小, 所以可以约去高次项, 化简为

$$\frac{d\omega}{dt} \approx k \omega t dt$$

即

$$\frac{d\omega}{\omega} = k t dt \quad (6)$$

对式(6)两边同时进行积分, 得到

$$\ln \omega = \frac{k t^2}{2} + C$$

即

$$\omega = C e^{\frac{k t^2}{2}} \quad (7)$$

将式(7)换为微分形式, 得到

$$\frac{d\theta}{dt} = C e^{\frac{k t^2}{2}}$$

将 dt 移至右边, 两边同时进行积分

$$\int d\theta = \int C e^{\frac{k t^2}{2}} dt$$

得到关于 t 的表达式

$$\theta = C \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{k t^2}{2}} \operatorname{erf}(t) + C_2 \quad (8)$$

记式(8)为 $\theta(t)$, 当 $dt \rightarrow 0$ 时, 由位置关系得到

$$dx = d(H \sin \theta) = H \cos \theta d\theta$$

$$dy = d(H - H \cos \theta) = H \sin \theta d\theta$$

则竿在水平与竖直方向的位移为

$$x = H \sin \theta \quad (9)$$

$$y = H - H \cos \theta \quad (10)$$

则竿在水平与竖直方向的速度为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{H \cos \theta d\theta}{dt} = H \omega \cos \theta \quad (11)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{H \sin \theta d\theta}{dt} = H \omega \sin \theta \quad (12)$$

竿在水平与竖直方向的加速度为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{H \cos \theta d\theta}{dt} = H \beta \cos \theta + H \omega \sin \theta \quad (13)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{H \sin \theta d\theta}{dt} = H \beta \sin \theta + H \omega \cos \theta \quad (14)$$

由式(9)至式(14)可知, 当竿发生轻微偏移时, 下方表演者为保持竿不倾倒, 需要对其进行位置补偿, 具体可分为位移补偿、速度补偿、加速度补偿。当采用唯一补偿时, 水平方向和竖直方向的位移补偿表达式为

水平方向位移补偿: $x = H \sin \theta$;

竖直方向位移补偿: $y = H - H \cos \theta$

水平方向和竖直方向的速度补偿表达式为

水平方向速度补偿: $v_x = H \omega \cos \theta$

竖直方向速度补偿: $v_y = H \omega \sin \theta$

水平方向和竖直方向的加速度补偿表达式为

水平方向加速度补偿: $a_x = H \beta \cos \theta + H \omega \sin \theta$

竖直方向加速度补偿: $a_y = H \beta \sin \theta + H \omega \cos \theta$

2 动态模型建立与计算验证

2.1 实验内容

在动态仿真实验中, 我们旨在探究不同质量

和高度参数下物理系统的动态稳定性,特别是模拟人与竿组成的系统在受到扰动后的响应行为。实验采用了 Python 编程语言,利用 NumPy、Matplotlib 和 SciPy 等库进行数据处理和图形绘制。实验通过构建数学模型,假设竿的质量为 5kg,人的质量分别为 60kg 与 100kg,竿的高度分别为 5m、10m 和 20m 等,并加入了随机扰动,运用数值计算方法如欧拉积分法,对系统的角加速度、角速度和倾斜角度等物理量进行仿真计算和对照实验。

2.2 实验结果与分析

2.2.1 倾斜角度随时间变化分析

我们通过分析不同质量-高度组合下的动力学数据,研究了倾斜角度随时间的变化关系。利用数学建模和仿真技术,我们得到了倾斜角度与时间的动态关系。如图 2 与图 5(a) 所示,结果显示倾斜角度随时间的变化图像(Tilt Angle over Time)清晰地揭示了不同组合下系统的行为。观察结果表明,随着时间的推移,所有测试案例的倾斜角度都经历了从初始状态的变化,但变化的幅度和趋势因组合而异。特别是,“60kg-5m”和“100kg-10m”组合的数据显示出较小的波动,这表明系统在质量较大或高度较高时,稳定性得到了增强,并且高度是对稳定性起作用的关键因素。图中的曲线进一步揭示了系统在达到新的平衡状态之前所经历的过渡期,这一现象对于理解系统动态特性至关重要。

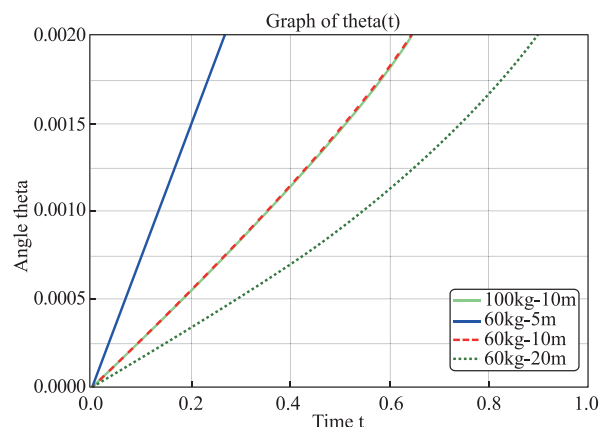


图2 倾斜角度随时间变化曲线

2.2.2 角速度随时间变化分析

我们采用了数值模拟方法来分析不同质量-高度组合下系统的角速度变化。如图 3 与图 5(b)

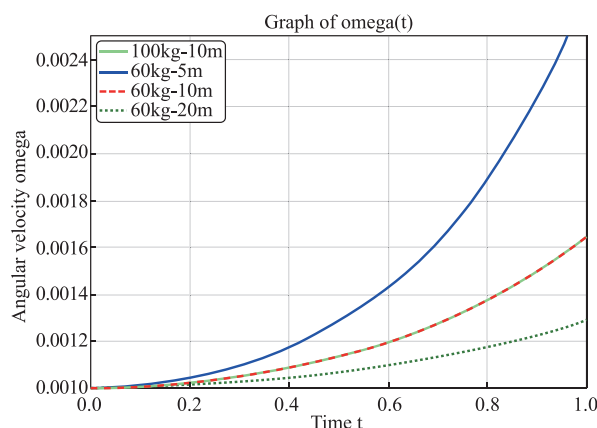


图3 角速度随时间变化曲线

所示,我们观察到系统从静止状态开始,角速度随时间 t 的增加而逐渐增加,直至达到一个稳定值。特别是,“60kg-5m”组合的角速度增加速度较快,但最终稳定在一个较高的水平,这可能表明在较轻的质量或较小的高度条件下,系统需要更短的时间来达到动态平衡。相比之下,“100kg-10m”组合的角速度增长较慢,稳定后的角速度也较低,这表明较大的质量和较高的高度有助于降低系统的动态响应速度,从而可能提高稳定性。这些观察结果进一步证实了质量和高度参数对系统动态响应的重要影响。

值得指出的是,人的尺寸变化(如体形较高者质心较高)将改变系统总质心的位置,从而影响力矩大小和系统响应的角加速度。体形高大或动作幅度大的上方表演者,在相同质量下,其质心更高,会加大系统的不稳定性。这一现象在模拟中表现为相同质量下更快的角度偏离速率。因此,在实际训练中应综合考虑演员体形与竿长的匹配关系,以实现更优的稳定控制。

2.2.3 角速度与角度关系分析

我们通过深入分析角速度(ω)与角度(θ)之间的动态关系,探讨了不同质量-高度组合下系统的行为。如图 4 所示,我们发现角速度与角度之间的关系并非简单的线性关系,而是呈现出一定的非线性特征。通过对比不同组合的曲线,我们观察到“60kg-5m”组合在较小的角度下达到了相对较高的角速度,但随着角度的进一步增加,角速度开始下降。这表明在角度接近垂直位置时,系统可能受到更大的动态阻力或其他外部因素的影响,导致角速度的减缓。这种关系对

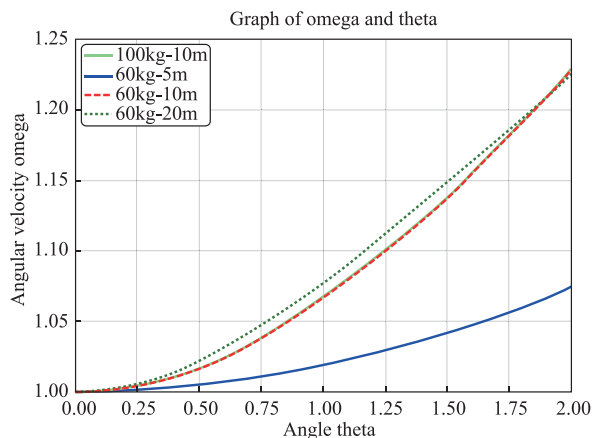


图4 角度与角加速度关系曲线

于理解系统在不同倾斜状态下的动态特性至关重要,有助于我们进一步优化顶竿表演的稳定性和安全性。

2.2.4 位移与速度分析

我们详细考察了系统在空间中水平与垂直位移的变化情况,以及这些位移如何随时间而变化。如图 5(d)和图 5(e)所示,水平与垂直位移随时间的变化曲线揭示了系统位置变化的动态特性。位移曲线的非线性表现指出,在不同时间段内,系统受到的动态力作用具有显著的复杂性,这可能涉及多种力的相互作用和转换。

进一步地,图 5(f)和图 5(g)所示的水平与垂直速度变化曲线,为我们提供了系统运动状态转

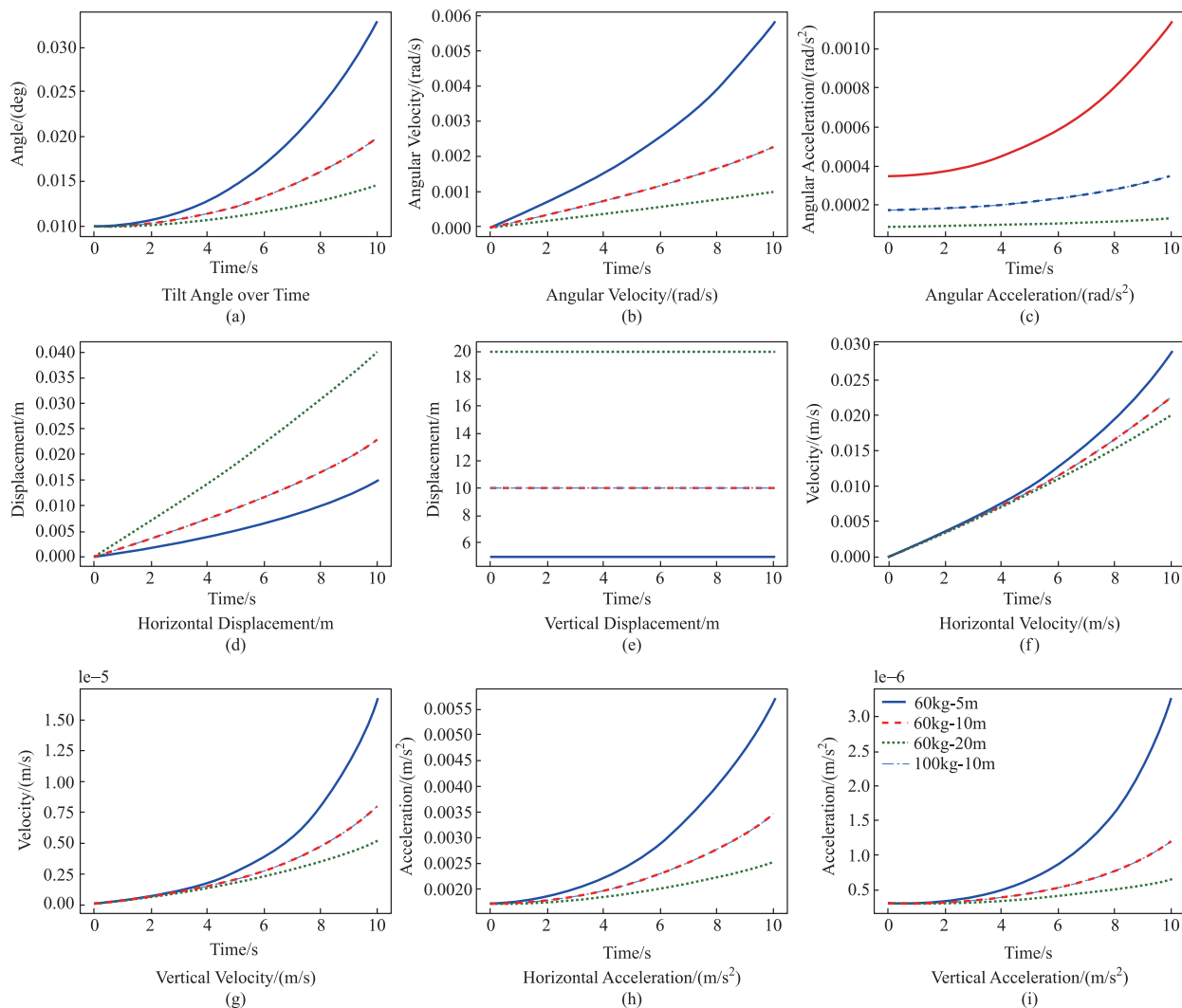


图5 关系图像

(a) 倾斜角度随时间的变化的关系图像; (b) 角速度随时间的变化的关系图像; (c) 角加速度随时间的变化的关系图像; (d) 水平位移随时间的变化的关系图像; (e) 竖直位移随时间的变化的关系图像; (f) 水平速度随时间的变化的关系图像; (g) 竖直速度随时间的变化的关系图像; (h) 水平加速度随时间的变化的关系图像; (i) 竖直加速度随时间的变化的关系图像

换的直接证据。速度曲线的正负交替变化,不仅指示了系统运动方向的改变,而且反映了系统在维持动态平衡过程中所进行的连续调整。特别是在速度曲线的转折点,系统可能经历了由加速到减速的过渡,这一现象可能与系统内部质量重新分配或外部阻力的增加有关。

综合分析位移与速度的变化趋势,我们可以推断出系统在动态平衡过程中展现出的调整能力。

2.2.5 加速度分析

我们通过动态仿真实验,研究了系统在受到扰动时水平与垂直加速度的变化情况。通过测量不同质量与高度参数下的加速度响应,我们得到了系统速度变化速率与这些参数之间的关系。如图 5(h)和图 5(i)所示,结果显示加速度曲线的波动性,这为我们理解系统动态响应提供了直观信息。

我们观察到,在不同质量与不同高度的参数组合下,加速度曲线呈现出不同程度的波动。特别是,较重的质量或较大的高度组合,如“100kg-10m”,其加速度波动较小,表明这些条件下系统对扰动的响应更为稳健。这一现象与我们对系统稳定性的预期分析相一致,即较大的质量和高度有助于减少速度变化的剧烈程度,从而提高系统的稳定性。

这些发现对于优化顶竿表演的安全性和艺术性具有重要意义。通过精确控制表演者和竿的质量与高度,可以显著提高表演的稳定性,减少因速度变化过快而导致的潜在风险。此外,这些结果也为我们提供了调整和优化系统设计的理论依据,以实现更好的动态性能。

2.2.6 补偿策略分析

在本研究的实验阶段,我们通过动态仿真方法对速度补偿、位移补偿和加速度补偿三种策略进行了深入的效果测试。通过细致的数据分析,我们揭示了每种策略的独特优势与潜在局限。

位移补偿效果如图 6 所示,位移补偿策略因其直接针对竿的倾斜进行调整,能够立即响应位置偏差,对于小幅度的位置偏差能够迅速将系统调整回期望位置,从而显示出快速且直接的效果。这种策略简单易行,易于理解和实施,不需要复杂的动力学模型或计算。然而,位移补偿策略可能忽略了竿的速度和加速度等动态特性,这在处理快速或大幅度运动时可能导致无法维持长期稳定

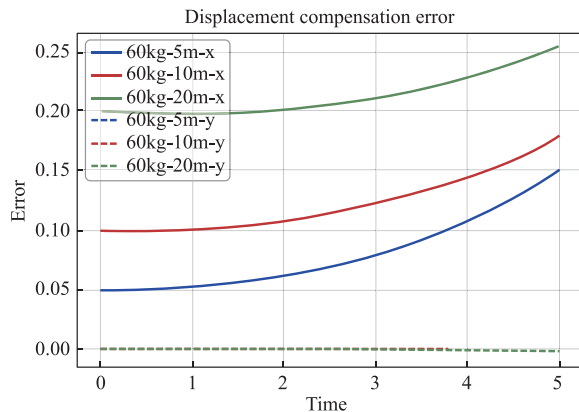


图 6 位移补偿误差曲线

性。此外,如果补偿幅度控制不当,可能会引起过补偿,从而影响系统稳定性。

速度补偿效果如图 7 所示,速度补偿策略通过调整速度来减少竿的动态波动,有效维持系统的动态平衡。这种策略在需要平滑调整速度以维持平衡的场景中表现良好,特别是在持续受到外部扰动的情况下,能够提供持续的稳定性支持。速度补偿策略在响应初期的位移变化时可能不够迅速,因此在需要快速恢复平衡的场景中,初期效果可能不如位移补偿策略明显。此外,实施这种策略需要对系统的动态特性有更深入的理解,可能需要更复杂的控制算法。

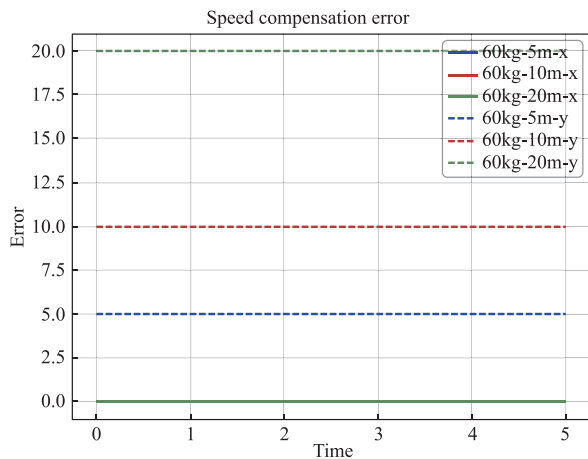


图 7 速度补偿误差曲线

加速度补偿效果如图 8 所示,加速度补偿策略通过预测和响应竿的加速度变化,展现了其在控制快速变化运动状态方面的优势。这种策略特别适合于动态变化剧烈或需要精确控制的场景,能够提供更精细的调整,以应对即将发生的运动

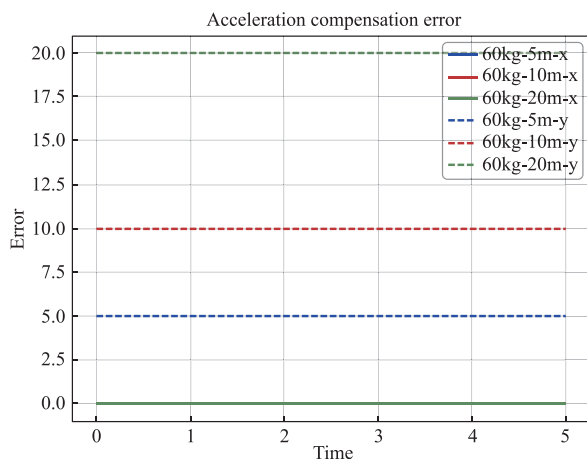


图8 加速度补偿误差曲线

状态变化。然而,加速度补偿策略的实施需要依赖于精确的动力学模型和及时的反馈机制。如果模型预测存在偏差,可能会引起补偿过度或不足的问题,从而影响系统稳定性。

选择合适的补偿策略需要根据实际的表演需求和竿的动态特性来决定。可能需要综合考虑这三种补偿策略,以达到最佳的控制效果。在仿真实验中我们发现,在发生小角度偏转时进行补偿误差远小于角度偏转比较大时进行补偿,所以及时性的补偿或能达到更佳的补偿效果。未来的研究将进一步探索这些策略在实际操作中的适用性和效果,以实现更高效、更精确的动态平衡控制。

2.2.7 拟合误差分析

在探讨受到扰动后的顶竿系统控制效果时,我们引入了一个关键的性能指标——损失(loss),它量化了模型预测值与实际观测值之间的偏差。这种差异的度量对于评估位移补偿、速度补偿和加速度补偿策略的有效性至关重要。通过持续监控这一指标,我们可以确保对顶竿在受到扰动后进行的控制措施进行精确评估,从而优化补偿策略,提高系统恢复稳定状态的能力。在图9所示的模型补偿损失曲线中,损失被控制在极低水平,一直保持在0.1%以下。这表明模型在处理小角度偏移时具有较高的准确性和可靠性。

实验中采用的补偿策略旨在通过位移补偿来调整模型,以响应累积的微小角度偏移。这种策略避免了速度补偿与加速度补偿,从而减少了模型系统损失。我们通过插值法得到了 loss 函数,

kx 与 $k\sin(x)$ 的关系图像,如图10所示,误差来源主要是 $\sin(x)$ 与 x 的数值误差。

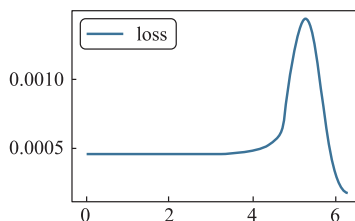
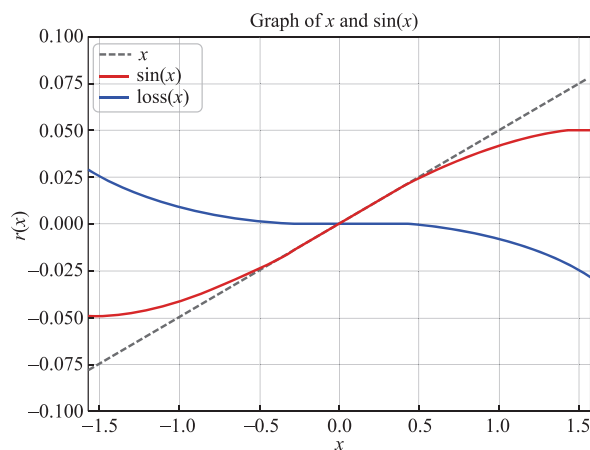


图9 模型补偿损失曲线

注:损失之所以在范围内一直保持在0.1%以下,是因为模型倾斜角度虽然呈递增曲线,但是每次倾斜只有极其微小的扰动,这里的2准确的理解应该为累积倾斜角度,而非单次倾斜最大角度,在模型中大角度偏移后,进行的是Python自带积分计算之后的位移补偿,而非自计算速度补偿,所以并未经历模型系统损失,故模型误差也极小,本模型仍然满足只适用于微小角度的偏移的模型假设

图10 $k\sin(x)$ 、 kx 与 $\text{loss}(x)$ 的函数拟合曲线

2.3 实验结论

对比实验结果表明,系统稳定性与质量和高度参数密切相关。在竿模型较大的高度或上方物体较大的质量条件下,系统展现出更好的稳定性和更快的稳定时间,并且高度是对系统稳定性起作用的关键因素。

此外,实验还发现,系统在经历初始扰动后,能够通过自身的动力学反馈机制迅速调整至稳定状态,这一点在角加速度的快速衰减中得到了体现。

3 结语

在对物理模型进行深入的推导和仿真计算

后,我们得出了以下一系列结论。首先,我们发现当竿模型的高度增加,以及人与竿之间的质量比提高时,系统在面对轻微扰动时的角加速度会相应减小。这表明,随着这些因素的优化,系统展现出了更强的抗倾覆能力,它更不容易因为小的干扰而倒下。其次,随着竿模型的倾斜角度的增大,系统的稳定性会逐渐降低。这意味着,为了维持平衡,表演者需要付出更大的努力,并且系统也更容易失去平衡。另外,我们还提出了补偿同时性原则,即当下方的表演者能够与竿保持同步的运动状态时,可以有效地保持上方表演者和竿的稳定,避免发生倾倒。此外,我们根据实验结果还提出了补偿瞬时性原则,即下方表演者在恢复竿的平衡状态时,其反应速度必须迅速。补偿动作越快,系统的稳定性越高。最后,为保持系统高稳定性,建议在实际演出中控制上方表演者动作幅度,减少偏心动态;并在训练时结合实时质心轨迹监测系统,对质心横向漂移设定预警阈值,以实现稳定性的可视化反馈与动作优化。这些结论为我们提供了对系统稳定性的深入理解,并为实际应用中的平衡控制提供了重要的指导。

参 考 文 献

- [1] 刘延柱. 趣味刚体动力学[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2018.
LIU Y Z. Interests in rigid body dynamics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2018. (in Chinese)
- [2] 唐新宇. 倒摆问题的研究及控制器设计[J]. 信息科技自动化技术专题, 2021: 1-2.
TANG X Y. Research and controller design of the inverted pendulum problem[J]. Information Technology and Automation Technology Special Issue, 2021: 1-2. (in Chinese)
- [3] 孙恺, 沈精虎. 单级倒立摆系统的设计与仿真[J]. 信息科技; 自动化技术, 2018.
SUN K, SHEN J H. Design and simulation of a single-level inverted pendulum system[J]. Information Technology; Automation Technology, 2018. (in Chinese)
- [4] 王广雄, 张静, 罗晶, 等. 倒立摆的模型和控制问题[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004.
WANG G X, ZHANG J, LUO J, et al. The model and control problems of the inverted pendulum[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2004. (in Chinese)
- [5] 李秋菊, 党培. 单级倒立摆稳定控制及其联合仿真[J]. 信息科技专辑, 2011.
LI Q J, DANG P. Stable control of single inverted pendulum and its joint simulation[J]. Information Technology Special Issue, 2011. (in Chinese)
- [6] 徐宏亮. 浅谈杂技倒立(顶功)训练[J]. 戏剧电影与电视艺术, 2024.
XU H L. A brief discussion on acrobatic handstand (Top Skill) training[J]. Drama, Film and Television Art, 2024. (in Chinese)
- [7] 高莹一. 杂技学科建设刍议[J]. 精品文艺, 2023.
GAO Y Y. Discussions on the construction of acrobatics discipline[J]. Fine Arts, 2023. (in Chinese)
- [8] 薛军伟. 基于 MATLAB 的单级倒立摆系统仿真研究[J]. 信息科技; 自动化技术, 2024.
XUE J W. Simulation study of single-level inverted pendulum system based on MATLAB[J]. Information Technology; Automation Technology, 2024. (in Chinese)
- [9] 吕磊, 袁智超, 邓豪, 等. 单级倒立摆基于 LMI 的 H_∞ 控制[J]. 信息科技; 自动化技术, 2014.
LYU L, YUAN Z C, DENG H, et al. H-infinity control of single-level inverted pendulum based on LMI[J]. Information Technology; Automation Technology, 2014. (in Chinese)
- [10] 李帅, 蔡延光. 基于线性化反馈的单级倒立摆滑模控制器设计[J]. 信息科技; 自动化技术, 2017.
LI S, CAI Y G. Design of sliding mode controller for single-level inverted pendulum based on linearized feedback[J]. Information Technology; Automation Technology, 2017. (in Chinese)

(上接第 66 页)

- [4] 陆兴中, 李平. 小孔泻流速率分布函数及其特征速率[J]. 南京工程学院学报, 2002, 2(3): 26-28.
LU X Z, LI P. Distribution function of velocities and characteristic velocities in the course of effusion[J]. Journal of Nanjing Institute of Technology, 2002, 2(3): 26-28. (in Chinese)
- [5] STERN O. A new method for the measurement of the Bohr magneton[J]. Physical Review, 1937, 51(10): 852-854.
- [6] ESTERMANN I, SIMPSON O C, STERN O. The free fall

of atoms and the measurement of the velocity distribution in a molecular beam of cesium atoms[J]. Physical Review, 1947, 71(4): 238-249.

- [7] 党玉敬. 小孔泻流现象的理论分析[J]. 河南教育学院学报, 1998, 7(3): 22-23.
DANG Y J. Theoretical analysis on effusion of gas through a small hole[J]. Journal of Henan Institute of Education, 1998, 7(3): 22-23. (in Chinese)