

蒙特卡罗方法模拟理想气体速率分布及其应用

陆雨航 胡振芃

(南开大学物理科学学院, 天津 300071)

摘要 麦克斯韦-玻尔兹曼分布是统计力学中对应经典粒子很重要的分布形式。理想气体作为经典粒子的代表,为研究上述分布提供了基础。然而大部分研究仅证明麦克斯韦-玻尔兹曼分布的合理性,很少研究经典理想气体向热平衡的演化,并且未能将演化过程与实际应用结合。因此本文在质心系弹性碰撞的基础上,通过蒙特卡罗方法模拟理想气体达到热平衡的过程,提出一种概率密度函数误差的计算方案,实现误差定量化,并探究模拟过程中误差随体系中粒子数目及碰撞次数的变化规律,探讨不同速度初始化方法实现热平衡的收敛速率,给出小计算量下高精度模拟的方案。最后,将研究结果应用于单粒子布朗运动的模拟和小孔泻流模拟,获得与理论相符的结果。

关键词 麦克斯韦-玻尔兹曼分布;蒙特卡罗方法;理想气体;布朗运动模拟;小孔泻流

MONTE CARLO METHOD FOR SIMULATING IDEAL GAS RATE DISTRIBUTION AND ITS APPLICATION

LU Yuhang HU Zhenpeng

(School of Physics, Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract The Maxwell-Boltzmann distribution is a very important form of distribution corresponding to classical particles in statistical mechanics. Ideal gases, as representatives of classical particles, provide the basis for studying distribution mentioned above. However, most of the studies only prove the rationality of the Maxwell-Boltzmann distribution, seldom study the evolution of classical ideal gases to thermal equilibrium, and fail to integrate the evolution process with practical applications. Therefore, based on the elastic collision in center of mass system, this article aims to use to simulate the process for ideal gas reaching equilibrium with the Monte Carlo method. An error function is proposed to quantify the error between ideal gas and simulated gas, and investigating the variation of the error with the quantity of the simulated particles and the number of collisions in the simulation process. The convergence rate of different velocity initialization methods is discussed, and a scheme for high precision simulation with small computational cost is given. Finally, the methods are applied to the simulation of single-particle Brownian motion and the simulation on effusion of gas through a small hole, the results are consistent with the theory.

Key words Maxwell-Boltzmann distribution; Monte Carlo method; ideal gas; Brownian motion; effusion of gas through a small hole

收稿日期: 2021-09-22

基金项目: 教育部产学合作协同育人项目(202102168016);南开大学本科教育教学改革项目(NKJG2025119);中央高校基本科研业务费(南开大学 010-63233001);教育部“物理育人模式改革虚拟教研室”建设点。

通信作者: 胡振芃, zphu@nankai.edu.cn。

引文格式: 陆雨航, 胡振芃. 蒙特卡罗方法模拟理想气体速率分布及其应用[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 61-66, 74.

Cite this article: LU Y H, HU Z P. Monte Carlo method for simulating ideal gas rate distribution and its application[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 61-66, 74. (in Chinese)

理想气体速率满足麦克斯韦分布。从气体碰撞理论可以得知,理想气体分子通过碰撞从非平衡趋向于热平衡。采用蒙特卡罗方法模拟这个过程^[1-2]是常见的方法之一,有助于加深对弛豫过程以及分布函数的理解。

采用碰撞理论的蒙特卡罗方法基于能量和动量守恒,文献中对粒子的速度有以下两种处理方式。一种是在笛卡尔坐标系中直接交换两个粒子对应速度分量^[1],但是所得结果不甚理想。另一种是在质心系中将粒子的相对速度做任意方向投影^[2],能够得出较好的结果,其统计直方图与麦克斯韦分布符合较好,并且给出了模拟结果中速率的平均值与理论值较为符合。

稍加思考不难发现:数学上,简单的粒子速度分量交换^[1]不能改变体系内部速度分量的分布,体系速率分布具有极大的初始条件依赖性。即便允许任意速度分量的交换,可改变体系各个方向的速度分布,但其速率分布一般也不是麦克斯韦分布。物理上,简单的交换速度分量也限制了最大速率:碰撞后,粒子所具有的最大速率平方不可能超过三个方向速率最大值的平方和。因此,简单的粒子速度分量交换^[1]并不适于此类模拟。

将碰撞粒子放到质心系中处理^[2]是一种较好的模拟方案。不过使用统计直方图与理论概率密度曲线对比只能定性观察二者的区别,无法给出定量的衡量。同时,参与模拟的粒子数目和模拟碰撞的次数直接决定模拟的计算量,而计算量与模拟精度之间的关联则是以往研究忽略的问题之一。弄清这些问题,就能够实现小计算量下的高精度模拟,为科普演示等应用场景提供便利。解决以上问题的关键在于给出概率密度函数误差的计算方案。

本文在文献[2]模拟方法的基础上,提出一种概率密度函数误差的计算方案,进而定量分析模拟结果与麦克斯韦分布函数的误差,以及误差同参与模拟的粒子数目、碰撞次数的关系,给出小计算量下高精度模拟的方案。依据此方案进行单粒子布朗运动的模拟和小孔泻流模拟,获得与理论相符的结果。

1 碰撞原理

1.1 投影法

在质心系下研究粒子 1 和 2 的碰撞,计算其

质心系速度 \mathbf{V}_C 为

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}{2} \quad (1)$$

质心相对于粒子 2 的速度 \mathbf{V}_{CR} 简称为相对质心系速度

$$\mathbf{V}_{CR} = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{2} \quad (2)$$

其中, \mathbf{V}_1 、 \mathbf{V}_2 分别表示固定参考系中粒子 1 和 2 的速度; \mathbf{V}'_{CR} 表示末态相对质心系速度。

弹性碰撞要求相对质心系速度大小不变,对相对质心系速度的变换可按照投影方法^[2],将相对质心系速度大小乘球面上均匀分布的单位矢量,得到变换后的相对质心系速度矢量。

$$\mathbf{V}'_{CR} = |\mathbf{V}_{CR}| \mathbf{e} \quad (3)$$

其中, \mathbf{e} 为单位矢量。

根据式(3),且有 $\mathbf{V}'_C = \mathbf{V}_C$,算出在固定参考系中粒子 1 和 2 末态的速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_1 &= \mathbf{V}'_C + \mathbf{V}'_{CR} \\ \mathbf{V}'_2 &= \mathbf{V}'_C - \mathbf{V}'_{CR} \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 动量、动能守恒证明

动量守恒证明(粒子质量相等)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_1 + \mathbf{V}'_2 &= 2\mathbf{V}'_C \\ &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

动能守恒证明

$$\begin{aligned} \frac{2T}{m} &= \mathbf{V}'_1{}^2 + \mathbf{V}'_2{}^2 \\ &= 2\mathbf{V}'_C{}^2 + 2\mathbf{V}'_{CR}{}^2 \\ &= 2\mathbf{V}_C{}^2 + 2\mathbf{V}_{CR}{}^2 \\ &= \mathbf{V}_1{}^2 + \mathbf{V}_2{}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

2 模拟方法

模拟包括粒子初始化、碰撞、统计检验三个部分。

2.1 粒子初始化

在球坐标系下,生成均匀分布于 $0 \sim 2\pi$ 的 φ ,对于 θ 采用 $\cos\theta$ 均匀分布于 $-1 \sim 1$,并确定一个初始速率值 v_0 。此初始速率值与温度相关,温度不变,则系统的方均根速率保持不变,即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv_{rms}^2 \quad (7)$$

然后将速度用直角坐标表示出来

$$\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \sin\theta_i \sin\varphi_i \\ v_0 \sin\theta_i \cos\varphi_i \\ v_0 \cos\theta_i \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中, i 表示第 i 个粒子的对应, 得到大量粒子速度在直角坐标下表示。

2.2 碰撞

- (1) 随机在众多粒子中挑出两个, 记为 i, j ;
- (2) 根据式(1)和式(2)计算出质心系速度和相对质心系速度;
- (3) 生成均匀分布于 $0 \sim 2\pi$ 、 $-1 \sim 1$ 的 φ 和 $\cos\theta$, 计算球面上单位向量 e ;
- (4) 根据式(3), 得到末态相对质心系速度;
- (5) 根据式(4), 得到两个粒子碰撞后的速度。

2.3 统计检验

利用麦克斯韦分布进行速率分布检验, 利用玻尔兹曼分布进行速度分布检验。在检验过程中, 将模拟结果的统计值与相应分布的理论值比较, 并计算误差。

概率密度函数误差的具体计算方法为: 取横轴范围 $0 \sim V_{\max}$ 的 $1/n$ 为一个区间, 该区间每次向右移动区间长度的 $1/m$, 直到区间右边界移至 V_{\max} (共 $m(n-1)+1$ 次移动)。如图 1 所示, 区间中点为横坐标 x_l (用 l 表示移动次数, 则横坐标为 $x_l = \frac{V_{\max}}{n} \left(\frac{l}{m} + \frac{1}{2} \right)$), 落在区间内的速率数量除以总数作为纵坐标。将纵坐标 y_i 作为观测值, 将横坐标对应的标准分布 f_{ideal} 的纵坐标 $f_{ideal}(x_l)$ 作为理论值, 按照统计的方法算出标准差, 即为误差

$$error = \left(\frac{\sum_{l=0}^{m(n-1)} (y_l - f_{ideal}(x_l))^2}{m(n-1)+1} \right)^{1/2} \quad (9)$$

其中, 本文选择 $V_{\max} = 3V_{rms}$, $n = 50$, $m = 5$ 。

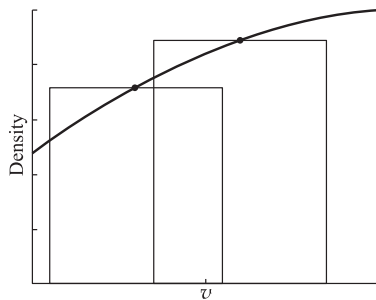


图 1 误差计算示意图

对于平衡时的速率分布检验, 标准分布 f_{ideal}

取麦克斯韦分布

$$f_{\text{Maxwell}}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (10)$$

对于平衡时各方向的速度检验, 标准分布 f_{ideal} 取玻尔兹曼分布

$$f_{\text{Boltzmann}}(v_i) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_i^2}{2kT}}, \quad i = x, y, z \quad (11)$$

计算出速率的方均根与平均速率

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (12)$$

$$v_{mean} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (13)$$

3 模拟结果与讨论

3.1 碰撞模拟

在模拟中不妨考虑稀薄的氮气, 根据式(12)可以算出 300K 对应的方均根速率约为 516.82m/s。选取粒子数 $N = 1 \times 10^5$, 碰撞次数 $I = 1 \times 10^6$, 所得速率分布与速度分布分别如图 2 和图 3 所示。可以看出理论分布曲线与实际分布误差较小。

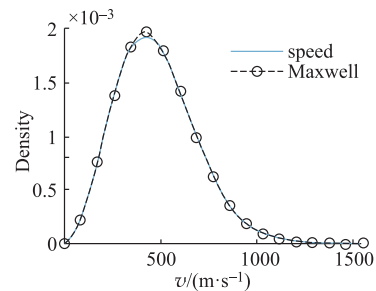


图 2 速率分布与麦克斯韦分布比较

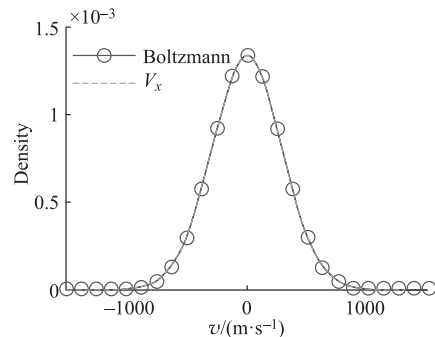


图 3 x 方向速度分布与玻尔兹曼分布比较

根据式(13)算得其平均速率为 476.16m/s, 根

据模拟结果求得速率平均值为 475.99m/s, 误差仅为 0.36%。根据式(9)算出速率分布曲线的误差为 1.8×10^{-5} , 而运行此代码的时间仅需 16.8s (处理器为 Intel(R) Core(TM) i5-8250U)。

为了对误差有一直观的认识, 选择粒子数 $N = 1 \times 10^5$, 分别碰撞 3×10^5 次和 5×10^5 次, 得到不同碰撞次数对应的分布曲线与麦克斯韦分布的比较(图4)。碰撞 3×10^5 次时模拟分布的误差为 6.1×10^{-5} , 而碰撞 5×10^5 次时误差减小为 2.2×10^{-5} 。这表明随模拟次数增加, 模拟误差有一定的减小, 与物理直觉相符。并且, 从图2和图4的数据可知, 当误差在 2×10^{-5} 量级时, 模拟所得的速率分布函数曲线与麦克斯韦分布符合较好。

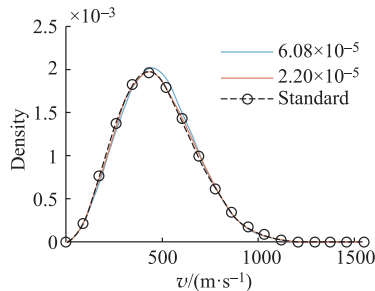


图4 与麦克斯韦分布不同误差时曲线偏差

3.2 误差随碰撞次数与粒子数的变化

从物理直觉可知, 参与模拟的粒子数越大, 模拟碰撞的次数越多, 则模拟获得的速率分布与麦克斯韦分布的误差越小。图4中的数据也部分验证了这一想法。不过, 模拟中粒子数增大、碰撞次数增多意味着计算规模的增大、计算时间的延长。在课堂、科普演示等应用场景需要短时间得到结果, 因此有必要研究模拟误差和粒子数、碰撞次数的定量关系, 确定小计算量下高精度模拟的参数。图5给出了不同粒子数体系中误差随碰撞次数变化的曲线, 符合物理直觉。

从图5的数据可以得到几条规律:

- (1) 随着碰撞次数增加, 误差先逐渐减小, 到达某一平衡时, 误差开始振荡;
- (2) 粒子数少的体系会较快到达平衡, 但是粒子数多的体系平衡时所能达到的最小误差会更小;
- (3) 粒子数越大的体系达到平衡时, 误差的振荡范围更小(需注意图中为对数坐标)。

进一步, 使用碰撞次数与粒子数的商作为约

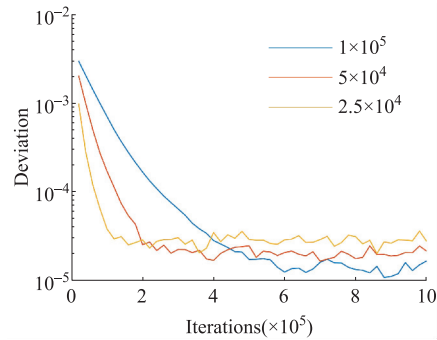


图5 不同粒子数下误差随碰撞次数变化

化横坐标, 得到图6, 可直观看出碰撞次数对粒子数的倍数, 与误差之间的关系。

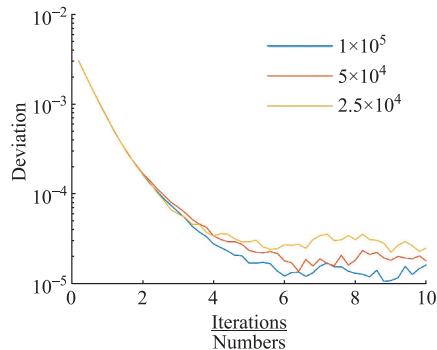


图6 归化横坐标后的误差与粒子数及碰撞次数的关系

从图6可知, 粒子体系在碰撞次数达到粒子数6倍时误差基本收敛, 达到8倍时误差已经围绕某一特定值振荡。为了方便讨论, 我们将这一特定值称为最小误差阈值。

从图6可以看到, 粒子数多的体系所能达到的最小误差阈值会更小, 不难想到最小误差阈值与粒子数相关。为探究最小误差阈值与体系粒子数的关系, 使具有不同粒子数的体系都碰撞粒子数的8倍(粒子数从 5×10^4 到 4×10^5 , 隔 2×10^4 取值), 然后每隔 3×10^4 次碰撞记录一次误差, 共记录20次, 误差取平均并记录最大、最小值, 认为其中平均值为最小误差阈值, 最大值与最小值为最小误差阈值的波动范围。从最小误差阈值与粒子数的关系图(图7)可以看出, 随粒子数增加, 整体呈下降趋势, 但是呈现类指数衰减关系, 粒子数达到某一值后误差减小不明显。

在实际应用场景中, 粒子体系要求小计算量下实现高精度模拟, 即理论和模拟足够接近且时间要短。从图4和图7可以看出, 最小误差在 $2 \times$

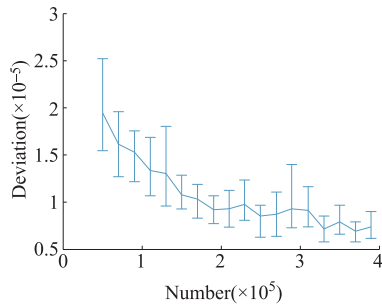


图7 最小误差阈值与粒子数关系

10^{-5} 附近可以认为体系分布与理论分布吻合较好,从图7可以看到,粒子数大于 5×10^4 时即可满足上述要求。

总结本节内容可以得到,粒子数超过 5×10^4 ,碰撞次数超过体系粒子数8倍即可以认为体系收敛至平衡。

3.3 不同初始速率分布函数的收敛速度比较

在之前的模拟中,所有粒子的初始速率均为方均根速率(即初始速率分布为delta分布)。除了这种delta分布初始化速率的方式,还有一些其他的初始化速率的方法使用:一种是使速率为一个均匀分布;另一种是使速率为正态分布。为了能在实际应用场景中更快的完成粒子体系速率分布的模拟,需要考虑不同初始化方法的优劣。对这三种初始化的方法进行收敛速度的比较,为满足上节平衡要求,令粒子数为 $N=1 \times 10^5$,碰撞次数都为 $I=1 \times 10^6$,delta分布速率为516.82m/s,均匀分布为490~543.64m/s,正态分布中心值为516.82m/s, $\sigma=20$ m/s,比较误差变化。

从图8可以看到,delta分布在初始时与麦克斯韦分布之间误差很大,但是误差下降速度是最快的;也就是说初始时速率分布具有尖锐的峰可以达到最快的收敛效果,这是在模拟中非常值得

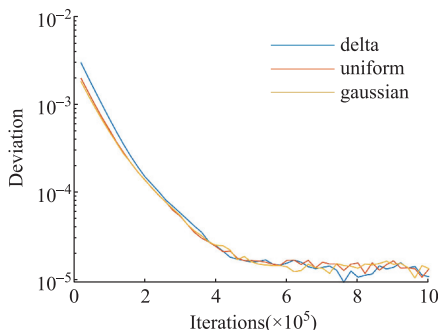


图8 不同初始化方法收敛速度比较

注意的。此外,图8也表明合理的模拟算法能够将不同初始速率分布的体系演化达到平衡,与物理直觉相符。

4 投影法应用

4.1 单粒子在平衡体系中的布朗运动

布朗运动是反映粒子及所处环境性质的重要标志,在理想气体模拟的基础上可以进一步对布朗运动的性质进行模拟。具体方法为:先使得一个粒子体系达到平衡,将一个标记的同种粒子注入该体系,使标记粒子与其他粒子按照质心系投影的办法进行碰撞,并重复多次,记录每一次该粒子碰撞后的速度。按照参考文献所述,布朗运动的粒子速度分布与原体系分布相同^[3]。

按照前文所述平衡要求,选择体系粒子数为 6×10^4 ,初始速率为516.82m/s,碰撞次数为 6×10^5 次,标记粒子初始速率为100m/s(标记粒子的速率的初始值选择对体系不产生明显影响),与体系粒子逐个碰撞两遍后,画出其速率分布并与麦克斯韦分布对比如图9和图10所示。直观观察,模拟曲线和理论分布曲线吻合度较高。

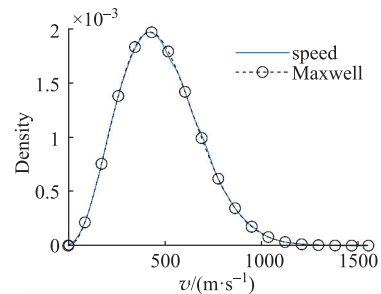


图9 单个粒子布朗运动速率分布

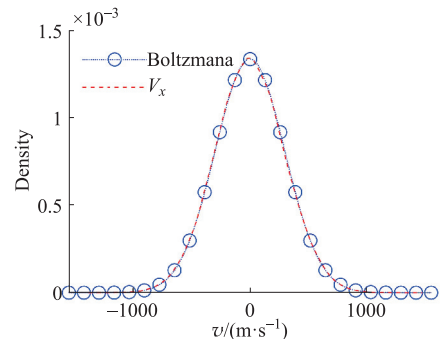


图10 单个粒子布朗运动速度分布

经计算得到理论平均速率为476.16m/s,模拟分布平均速率为476.59m/s,误差为 1.4×10^{-5}

符合上文中提到的误差要求,证明布朗运动的速率分布与体系的速率分布相同。

4.2 小孔出射粒子速率统计——实验模拟

在玻尔兹曼提出理想气体速率分布后,从实验上很难直接对该分布——即玻尔兹曼分布进行验证。一种间接的验证方法为:通过在器壁上产生小孔,对从小孔出射粒子(称为小孔泻流)的速率进行探究。由于小孔的存在对出射的粒子位置以及速度方向大小都有要求,通过小孔出射粒子的速率分布可以间接检验玻尔兹曼分布的正确性。

理论计算表明,小孔泻流中粒子速率满足^[4]

$$f(v) = \frac{m^2}{2(kT)^2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (14)$$

实验证明该结果正确。通过计算得到小孔泻流的平均速率与方均根速率分别满足^[4]

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}} \quad (15)$$

$$\bar{v}^2 = 2\sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (16)$$

可在理想气体模拟达到平衡的基础上对小孔泻流检验。以往研究小孔泻流的实验中,采用铯原子蒸汽和 450K 的条件^[5-6],根据式(12)可以计算得到铯原子的方均根速率为 289.38m/s。通过前文的经验,使粒子数为 3×10^5 的铯原子体系按照质心系投影的碰撞方法碰撞 2.4×10^6 次后达到平衡。假设有一个长度为 1m 的正方体盒子,其侧壁上开有边长为 10cm 的正方形孔,将之前已经达到平衡的粒子均匀弥散进盒子中,在 0.001s 内统计能从小孔出射的粒子。经过计算可以得到,能从小孔中出射的粒子数满足^[7]

$$\Delta N = \frac{1}{4} n v_{mean} \Delta S \Delta t \quad (17)$$

其中, v_{mean} 满足式(13)。

由于单次统计出射粒子数量较小,所以模拟中进行 1000 次平行采样,统计所有出射的粒子,模拟结果共得到 200243 个出射粒子,而根据理论公式计算得到应出射 199958 个粒子,误差约为 1.4%。

小孔泻流的速率分布和模拟结果分布如图 11 所示,直观上两条曲线极为接近。

通过定量分析可以发现:理论和实际的小孔泻流平均速率分别为 314.09m/s、314.61m/s;理论和实际的小孔泻流方均根速率分别为 334.15m/s、334.51m/s,误差分别为 1.7%、1.1%,说明理论与模拟符合很好。

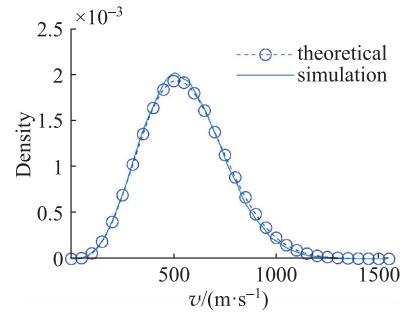


图 11 小孔泻流速率分布(理论曲线非麦克斯韦分布)

5 结语

在前人研究的基础上,使用蒙特卡罗方法进行粒子体系碰撞的模拟,给出了模拟的步骤,在少粒子短时间内就达到了非常好的模拟效果,证明弹性碰撞可以使得体系趋于平衡。

提出衡量模拟结果与理论分布之间误差的一种计算方法,并据此探究这一误差随粒子数及模拟碰撞次数的变化规律。发现粒子数越多,模拟所能达到的最小误差越小;随模拟碰撞次数增加,误差先减小到特定阈值,然后开始振荡。对不同模拟初始速率分布进行收敛性研究,发现 delta 分布收敛较快。

给出少粒子高精度模拟的最低要求,即:粒子数超过 5×10^4 ,碰撞次数超过体系粒子数 8 倍。

对单个粒子的布朗运动和小孔泻流实验进行模拟,获得理想结果,拓展模拟方法的应用场景,并进一步验证其可靠性。

参 考 文 献

- [1] 尹增谦, 武丽姣. 基于蒙特卡罗方法的速率分布函数演化过程研究[J]. 物理与工程, 2020, 30(4): 26-30.
YIN Z Q, WU L J. The Monte Carlo method and its application—Study on evolution of speed distribution function with Monte Carlo method[J]. Physics and Engineering, 2020, 30(4): 26-30. (in Chinese)
- [2] 莫裕宇, 李盛至. 蒙特卡罗方法生成三维理想气体麦克斯韦分布[J]. 大学物理, 2018, 37(3): 63-68.
MO Y Y, LI S Z. Generating three-dimensional Maxwell distribution using Monte Carlo method[J]. College Physics, 2018, 37(3): 63-68. (in Chinese)
- [3] 谢征微, 李玲. 布朗粒子的速度分布函数[J]. 四川师范大学学报, 1997, 20(6): 4-6.
XIE Z W, LI L. Velocity distribution function of Brownian particles[J]. Journal of Sichuan Normal University, 1997, 20(6): 4-6. (in Chinese)

(下转第 74 页)

后,我们得出了以下一系列结论。首先,我们发现当竿模型的高度增加,以及人与竿之间的质量比提高时,系统在面对轻微扰动时的角加速度会相应减小。这表明,随着这些因素的优化,系统展现出了更强的抗倾覆能力,它更不容易因为小的干扰而倒下。其次,随着竿模型的倾斜角度的增大,系统的稳定性会逐渐降低。这意味着,为了维持平衡,表演者需要付出更大的努力,并且系统也更容易失去平衡。另外,我们还提出了补偿同时性原则,即当下方的表演者能够与竿保持同步的运动状态时,可以有效地保持上方表演者和竿的稳定,避免发生倾覆。此外,我们根据实验结果还提出了补偿瞬时性原则,即下方表演者在恢复竿的平衡状态时,其反应速度必须迅速。补偿动作越快,系统的稳定性越高。最后,为保持系统高稳定性,建议在实际演出中控制上方表演者动作幅度,减少偏心动态;并在训练时结合实时质心轨迹监测系统,对质心横向漂移设定预警阈值,以实现稳定性的可视化反馈与动作优化。这些结论为我们提供了对系统稳定性的深入理解,并为实际应用中的平衡控制提供了重要的指导。

参 考 文 献

- [1] 刘延柱. 趣味刚体动力学[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2018.
LIU Y Z. Interests in rigid body dynamics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2018. (in Chinese)
- [2] 唐新宇. 倒摆问题的研究及控制器设计[J]. 信息科技自动化技术专题, 2021: 1-2.
TANG X Y. Research and controller design of the inverted pendulum problem[J]. Information Technology and Automation Technology Special Issue, 2021: 1-2. (in Chinese)
- [3] 孙恺, 沈精虎. 单级倒立摆系统的设计与仿真[J]. 信息科技; 自动化技术, 2018.
SUN K, SHEN J H. Design and simulation of a single-level inverted pendulum system[J]. Information Technology; Automation Technology, 2018. (in Chinese)
- [4] 王广雄, 张静, 罗晶, 等. 倒立摆的模型和控制问题[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004.
WANG G X, ZHANG J, LUO J, et al. The model and control problems of the inverted pendulum[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2004. (in Chinese)
- [5] 李秋菊, 党培. 单级倒立摆稳定控制及其联合仿真[J]. 信息科技专辑, 2011.
LI Q J, DANG P. Stable control of single inverted pendulum and its joint simulation[J]. Information Technology Special Issue, 2011. (in Chinese)
- [6] 徐宏亮. 浅谈杂技倒立(顶功)训练[J]. 戏剧电影与电视艺术, 2024.
XU H L. A brief discussion on acrobatic handstand (Top Skill) training[J]. Drama, Film and Television Art, 2024. (in Chinese)
- [7] 高莹一. 杂技学科建设刍议[J]. 精品文艺, 2023.
GAO Y Y. Discussions on the construction of acrobatics discipline[J]. Fine Arts, 2023. (in Chinese)
- [8] 薛军伟. 基于 MATLAB 的单级倒立摆系统仿真研究[J]. 信息科技; 自动化技术, 2024.
XUE J W. Simulation study of single-level inverted pendulum system based on MATLAB[J]. Information Technology; Automation Technology, 2024. (in Chinese)
- [9] 吕磊, 袁智超, 邓豪, 等. 单级倒立摆基于 LMI 的 H_∞ 控制[J]. 信息科技; 自动化技术, 2014.
LYU L, YUAN Z C, DENG H, et al. H-infinity control of single-level inverted pendulum based on LMI[J]. Information Technology; Automation Technology, 2014. (in Chinese)
- [10] 李帅, 蔡延光. 基于线性化反馈的单级倒立摆滑模控制器设计[J]. 信息科技; 自动化技术, 2017.
LI S, CAI Y G. Design of sliding mode controller for single-level inverted pendulum based on linearized feedback[J]. Information Technology; Automation Technology, 2017. (in Chinese)
- [4] 陆兴中, 李平. 小孔泻流速率分布函数及其特征速率[J]. 南京工程学院学报, 2002, 2(3): 26-28.
LU X Z, LI P. Distribution function of velocities and characteristic velocities in the course of effusion[J]. Journal of Nanjing Institute of Technology, 2002, 2(3): 26-28. (in Chinese)
- [5] STERN O. A new method for the measurement of the Bohr magneton[J]. Physical Review, 1937, 51(10): 852-854.
- [6] ESTERMANN I, SIMPSON O C, STERN O. The free fall of atoms and the measurement of the velocity distribution in a molecular beam of cesium atoms[J]. Physical Review, 1947, 71(4): 238-249.
- [7] 党玉敬. 小孔泻流现象的理论分析[J]. 河南教育学院学报, 1998, 7(3): 22-23.
DANG Y J. Theoretical analysis on effusion of gas through a small hole[J]. Journal of Henan Institute of Education, 1998, 7(3): 22-23. (in Chinese)

(上接第 66 页)