

## 气体输运过程微观机制的“ $2\lambda$ 问题”：一个教学方案

赵 可

(西南交通大学物理科学与技术学院, 四川 成都 611756)

**摘 要** 推导气体的输运性质相关系数的微观机制中的“ $2\lambda$ ”问题(穿过分界面的分子该段自由程平均值为 2 倍平均自由程), 是“热学”教学中一个常见的疑点。本文首先系统性梳理中外教材和国内教学论文关于该问题的处理方法, 包括立体角积分、一维运动简化模型等。然后本文提出了一个用线段表示分子自由程的图形化的课堂教学方案, 并且对相关的一些关键问题进行了讨论。该方案可以在不使用积分计算的情况下, 用很短的课堂教学时间让学生定性地了解并接受“ $2\lambda$ ”相关的结论。

**关键词** 气体输运过程; 分子动理论; 平均自由程; 教学方案

## THE “ $2\lambda$ PROBLEM” IN THE MICROSCOPIC MECHANISM OF GAS TRANSPORT: A TEACHING SCHEME

ZHAO Ke

(School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 611756)

**Abstract** The “ $2\lambda$  problem” (the mean free path of a molecule crossing a boundary is twice the mean free path in the gas molecules) in deriving the microscopic mechanism of transport coefficients for gases is a common point of confusion in thermal physics teaching. This paper first systematically reviews the treatment of this problem in domestic and foreign textbooks and domestic teaching papers, including solid angle integration and one-dimensional motion simplified models. Then, a classroom teaching scheme using line segments to represent molecular free paths is proposed, and some key issues related to it are discussed. This scheme allows students to qualitatively understand and accept the conclusions related to “ $2\lambda$ ” in a short class time without the need for integral calculations.

**Key words** gas transport properties; kinetic theory of gases; mean free path; teaching scheme

在“热学”课程的教学, 解释和推导气体的输运性质相关系数的微观表达时有一个容易引起学生疑问的论断: “通过界面的气体分子在之前之后两次碰撞间的平均距离为 2 倍  $\lambda$ ”。这里  $\lambda$  是气体的平均自由程, 这也被称为  $2\lambda$  问题。其核心疑

点就是为什么有这个系数 2, 而不是平均距离等于平均自由程本身。在国内教学研究领域, 这个问题曾经引起过热烈的讨论, 有多篇论文用不同的模型推导出了这一结果<sup>[1-10]</sup>。但是这些推导一般涉及多重积分以及对立体角的处理, 可能不适合

收稿日期: 2025-01-03

基金项目: 2022 年西南交通大学高水平育人课程教学改革项目—一流本科课程建设专项—普通物理-热学; 教育部高等学校物理学类专业教学指导委员会 2025 年度高等学校热学课程教学研究项目(编号: JZW-25-RX-08)。

通信作者: 赵可, zhaoke@swjtu.edu.cn。

引文格式: 赵可. 气体输运过程微观机制的“ $2\lambda$ 问题”: 一个教学方案[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 55-60.

Cite this article: ZHAO K. The “ $2\lambda$  Problem” in the microscopic mechanism of gas transport: a teaching scheme[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 55-60. (in Chinese)

用在对一年级本科生的课堂教学中。本文将首先总结一些常见热学教材和教学论文对这一问题的论述,然后设计一个适用于当代多媒体、信息化教学环境的教学方案,再进行一些关键问题的讨论,以期能够用相对少的课堂时间简明地向学生解释这一问题。

## 1 2λ 问题的各种不同处理方法

热学教材中 2λ 问题的一个常见等效表述是:“我们可以认为在  $z = z_0$  处与相对部分的粒子发生碰撞的粒子分别来自  $z = z_0 + \lambda$ ,  $z = z_0 - \lambda$  处”<sup>[11]</sup>。于是二者的平均位置差就是 2λ。这个系数 2 乘以一维运动简化模型(本文 1.2 节将讨论)中的系数后,就得到输运系数(如黏性系数、导热系数、扩散系数)的微观表达式中的系数<sup>[11]</sup>。如果不使用前述“2λ”假设,通过直接计算也可以得到相同的输运系数微观表达式结果。

### 1.1 立体角积分法

对输运问题进行微观解释时,有时使用一个相对接近真实情况的模型——满足理想气体速率分布律和自由程分布的气体分子各向同性地做三维运动。在该模型中讨论穿过分界面的气体分子时需要计入各个不同方向运动分子的贡献,涉及对速率、自由程、径向位置以及立体角的积分。有的教学论文<sup>[1]</sup>用这种方法直接计算黏性系数微观表达式,得到了与使用“2λ”假设相同的结果。另外一些讨论输运过程的教学论文<sup>[2-5]</sup>以及一些欧美的热学教材<sup>[12-14]</sup>也使用了三维运动模型。值得注意的是,其中部分的推导过程并没有对分子穿过界面前的自由程进行积分<sup>[3-5,12,14]</sup>,自然也没有涉及分子随自由程分布的具体形式,而是直接假设了“能越过 dS 面的所有分子,在越过 dS 面之前最后一次碰撞的位置,到 dS 间的直线距离,平均地讲都为 λ。对此可作严格证明,但为简单起见,在普通物理热学研究中作为假定提出”<sup>[4]</sup>。这实际上也产生了“2λ 问题”。*Concepts in Thermal Physics* 一书也简单说“Then molecules which cross a plane of constant  $z$  will have travelled on average a distance  $\lambda$  since their last collision”<sup>[12]</sup>,并未加以进一步说明。经典的热学教材——C. Kittel 编写的 *Thermal Physics* 中也使用了类似的办法推导扩散系数<sup>[14]</sup>。

在理想气体三维运动模型中证明“2λ”假设的思路可以简要表述为:考虑位置  $(r, \theta, \varphi)$  处的一个体积元  $dV$ (如图 1 所示),其包含的分子数为  $n \cdot dV$ ,其中  $n$  是分子数密度。这些分子中自由程介于  $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$  之间的数量是

$$dN(r, \theta, \varphi, \lambda) = \frac{1}{\lambda} n e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr d\lambda \quad (1)$$

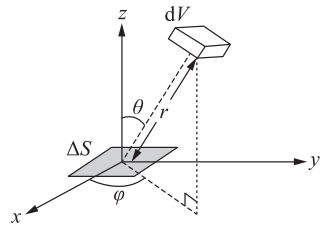


图 1 分界面  $\Delta S$  和体积元  $dV$  示意图

这里  $\lambda$  表示某个分子当前段自由程的长度, $\bar{\lambda}$  表示全体分子的平均自由程,后续公式中也都使用此表示方式。如果上述分子能够不经碰撞穿过位于原点处平行于  $x$ - $y$  平面的分界面  $\Delta S$ ,需要同时满足两个条件:(1)自由程大于  $r$ ;(2)朝原点运动且运动方向在一个大小为  $\Delta S/r^2 \cdot \cos\theta$  的立体角内。根据第(2)点可以把运动方向指向分界面的分子数写为

$$dN'(r, \theta, \varphi, \lambda) = \frac{1}{4\pi\lambda} n \Delta S e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi dr d\lambda \quad (2)$$

接下来在  $z > 0$  的空间内对  $dN'$  进行积分,以求出能“向下”穿过分界面的分子总数。对自由程的积分区间是  $r \rightarrow \infty$ ,以排除自由程不足的分子。

$$\int dN' = \frac{1}{4\pi\lambda} n \Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_r^{\infty} dr \int_r^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} d\lambda \quad (3)$$

上式从右向左逐项积分后,得到能穿过分界面的分子总数为

$$\int dN' = \frac{1}{4} n \bar{\lambda} \Delta S \quad (4)$$

然后在同样的范围内对  $\lambda \cdot dN'$  进行积分,以求出这些分子的自由程总和

$$\int \lambda dN' = \frac{1}{4\pi\lambda} n \Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_r^{\infty} dr \int_r^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} \lambda d\lambda \quad (5)$$

上式从右向左逐项积分后,得到能穿过分界面的分子自由程总和为

$$\int \lambda dN' = \frac{1}{2} n \bar{\lambda}^2 \Delta S \quad (6)$$

最终得到向下穿过分界面的分子的当前段自由程平均值  $\bar{\lambda}_{\text{穿}}$  (式(7))。考虑到对称性,向上穿过分界面的分子的当前段自由程平均值也有相同数值。值得注意的是,这个结果仅是某一时刻的全体分子中能够自由运动到分界面的一部分分子的平均值。但是因为所讨论的问题是准平衡态的,具有时间和空间的平移对称性,所以任意时间段内穿过分界面的分子的自由程平均值必然与此相同,为  $2\bar{\lambda}$ ,即

$$\bar{\lambda}_{\text{穿}} = \frac{\int \lambda dN'}{\int dN'} = 2\bar{\lambda} \quad (7)$$

通过上述推导以及前述文献中的各种推导方法,可以看出“ $2\lambda$ ”这一假定实质上是对分子穿过界面前的自由程进行积分的结果。系数“2”作为积分结果的一部分,其产生依赖于分子随自由程分布为指数衰减分布这一特定形式。一些论文和教材为了简化积分计算,就把该结果作为默认前提使用了。事实上不论是否涉及“ $2\lambda$ 问题”,对立体角积分这种推导在国内的教材中很少使用,常见教材中仅李洪芳编著的《热学》采用<sup>[15]</sup>。这可能是因为国内物理专业一般在第一、二学期讲授“热学”,多重积分和对立体角的处理等较为复杂的计算对刚刚接触高等数学的学生而言难度偏大,并且也会占用过多的课堂时间。欧美大学的 thermal physics 一般是高年级课程,所以有时会在教材中涉及立体角积分<sup>[12-14]</sup>。

也有个别教材通过与实验结果比较或者直接引用严密的理论计算结果的办法来确定输运系数的微观表达式。比如包科达编著的《热学教程》<sup>[16]</sup>中先在输运系数表达式中设了一个待定的比例系数,然后直接给出严密的理论计算得出的系数值。An Introduction to Thermal Physics 中干脆认为分子穿过界面前的平均碰撞位置是  $1/2 \lambda$  处<sup>[17]</sup>,亦即去掉了“ $2\lambda$ ”的系数 2。不过同时也忽略了分子的三维运动,视分子只在一个方向上运动。这样一出一入,最终推导出的热导率微观表达式却和其他教材中的相差不远,然后再与实验值对比,展示了相关物理量之间的定性关系。

## 1.2 简化的一维运动模型

大多数国内《热学》教材在从微观角度讨论输

运系数时采用简化的一维运动模型,即“分子分 6 组都以平均速率朝 6 个方向运动”<sup>[11,18-25]</sup>。西方常用教材也有 Baierlein 编写的 *Thermal Physics* 采用了相同的方法<sup>[26]</sup>。一维运动模型中,分子数密度为  $n$  的气体在  $dt$  时间内通过  $dS$  面积元界面两侧交换分子对的数量为

$$dN = \frac{1}{6} n \bar{v} dS dt \quad (8)$$

该模型推导出的输运系数和根据分子三维运动计算的结果是相同的,也便于大一学生更方便、更直观地理解微观的分子运动和宏观的输运行为间的关联。使用这种模型的教材大都直接采用了“ $2\lambda$ 假设”:“越过界面之前最后一次碰撞的位置,平均为距界面  $\lambda$ ”,以及对称性必然导致的“分子越过界面前后两次碰撞间的距离,平均为  $2\lambda$ ”。为了证明一维运动模型中“ $2\lambda$ 假设”的合理性,可以对分子沿运动方向分层,对每一层分子按其自由程分布来计算对“穿过界面”的贡献,然后对各层积分来得到穿过界面的分子的平均自由程。例如,考虑距离界面在  $r \rightarrow r + dr$  之间的薄层内的气体分子,自由程在  $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$  之间的分子数为

$$dN(\lambda) = \frac{1}{\lambda} n_+ e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} dS dr d\lambda \quad (9)$$

其中,  $\bar{\lambda}$  为所有分子的平均自由程;  $n_+$  为朝该方向运动的分子数密度,等于  $n$  的六分之一。积分计算所有穿过界面的分子总数以及它们的自由程总和,然后得到它们的自由程平均值  $\bar{\lambda}_{\text{穿}}$  (式(10))。因为只有自由程大于  $r$  的分子才能穿过界面,所以在计算时对  $d\lambda$  的积分区间是  $r \rightarrow \infty$ 。结果显示这些分子的平均自由程的确是所有分子平均自由程的 2 倍。

$$\bar{\lambda}_{\text{穿}} = \frac{\frac{1}{\bar{\lambda}} \int_0^{\infty} dr \int_r^{\infty} \lambda n_+ e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} d\lambda \cdot dS}{\frac{1}{\bar{\lambda}} \int_0^{\infty} dr \int_r^{\infty} n_+ e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} d\lambda \cdot dS} = \frac{2\bar{\lambda}^2 n_+ dS}{\bar{\lambda} n_+ dS} = 2\bar{\lambda} \quad (10)$$

一些教学论文采取了同样的办法计算论证了“ $2\lambda$ 假设”<sup>[6-9]</sup>。这个推导也被常树人编著的《热学》教材采用<sup>[25]</sup>。但是热学课一般面向大一学生,甚至是高等数学基础薄弱的大一上学期的新生,并且该部分内容在整个课程中的重要性相对较低,分配到的教学时间很短,所以往往在教学实践中并不采用积分计算的办法论证“ $2\lambda$ 问题”。

前述的绝大多数教材也没有采用积分计算,而是直接给出了这一结论。这样就造成了部分学生在此处产生疑问:“为什么穿过界面的分子的平均自由程不是 $\lambda$ 而是 $2\lambda$ ?”由此,如何用简单直观的方式在较短的课堂教学时间内向学生进行定性的说明呢?本文设计了一种适合当代课堂教学使用多媒体、数字化的特点的教学方案,下面将用文字和插图对该教学方案进行简化展示。

## 2 直观化的教学方案

首先,前述使用一维运动模型的教材在讨论气体分子自由程的分布时大都采用了类似于选手不断退出的集体长跑模型:“一组分子在以后的运

动中将与组外的其他分子相碰,每发生一次碰撞,这组分子就减少一个。”<sup>[18]</sup>一维的输运问题可以方便地借用该模型,不过区别是分子经受碰撞以后并不“退出”,而是继续按原有的统一速率朝原方向运动,仅在此处把自由程进行了分段。此外碰撞时分子获得碰撞位置处的“输运属性”(如黏性现象中的定向运动速度等)。这样规定是符合平衡态下各处气体性质相同的假设的,因为在任何地方总是有相同数量的分子在以“统一速率”朝同一方向运动,“退出”的分子必然被“加入”的分子替代,所以可以等效于分子不再因碰撞而退出。

然后向学生展示将若干分子的“自由程段”顺序排列的图形,如图 2(a)所示。图中长短不一的

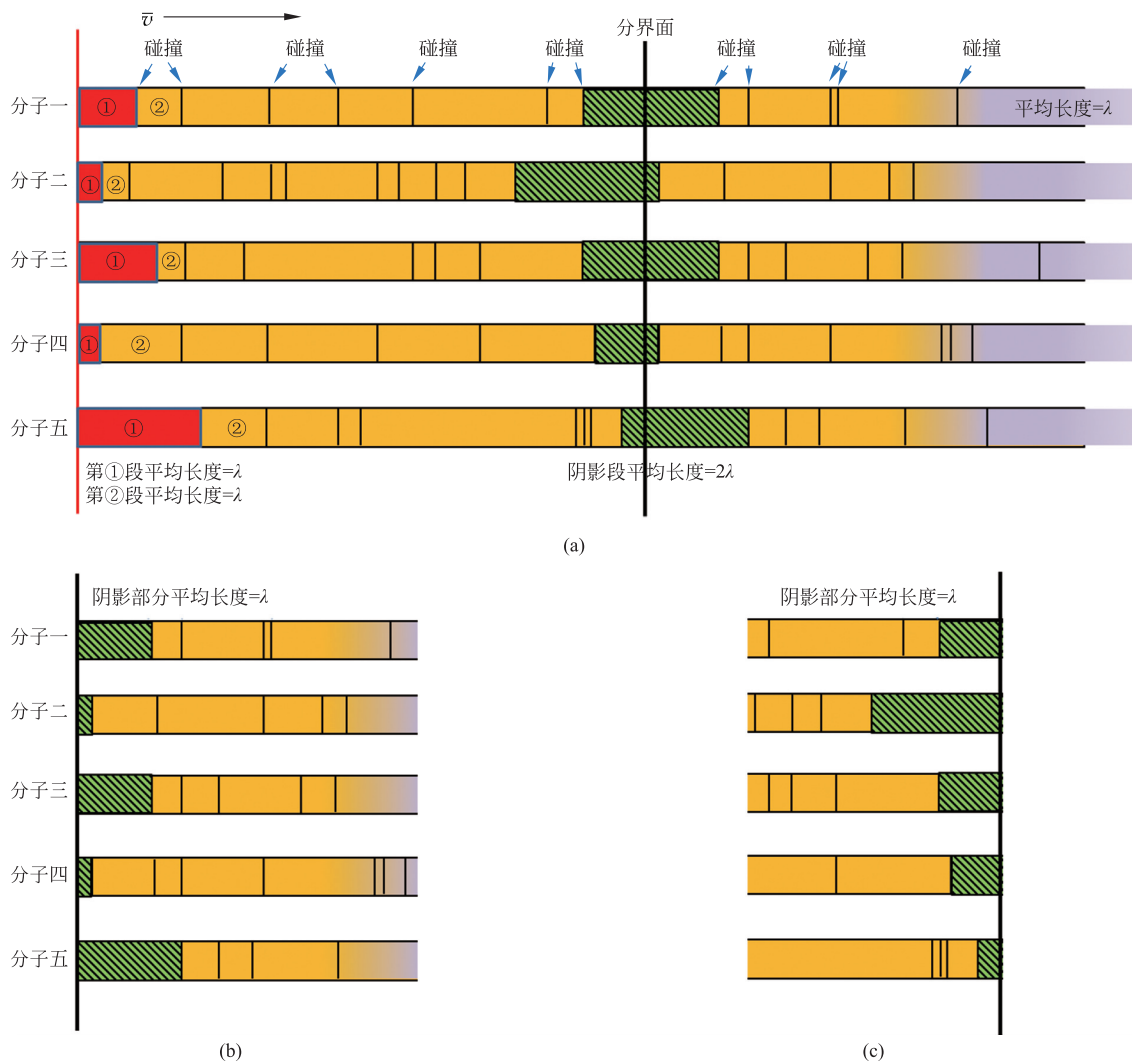


图 2 用线段表示分子的自由程

(a) “集体长跑”模型中分子自由程的分段和穿过分界面的情况; (b) 从分界面开始重新计算第一段平均长度; (c) 分界面左侧部分根据对称性也有相同平均长度

线段代表了自由程的随机分布。本文的方案采用了类似讨论气体分子自由程的分布时的做法,令所有分子的“起点”为同一位置。这样可以直观地看到每个分子的“第一段”的长度平均值为 $\lambda$ 。同时也可以向学生指出,对于完全相互独立的随机事件而言,多个相同对象的一次试验结果的统计平均期望值,与单个对象的多次重复试验结果的统计平均期望值是相等的。所以图 2(a)中,任一分子对应的一列的线段长度平均值也是 $\lambda$ ,而所有分子的“第  $N$  段”长度平均值同样也是 $\lambda$ 。

接下来解释图 2(a)中穿过“分界线”的线段长度平均值为什么是 $2\lambda$ ,而不是 $\lambda$ 。这里应该向学生强调:从起点开始计数,穿过分界线的线段的序号对于各个分子而言并不是相同的,所以不能根据前述论断来认为这些线段的长度平均值是 $\lambda$ 。事实上,以“被分界线穿过”为标准对线段进行采样,并非等概率随机采样。因为长的线段被采样的概率更大,所以可以预计平均值会大于 $\lambda$ 。这一点在早期的教科书,如 1938 年的 *Kinetic theory of gases* 中就已讨论<sup>[27]</sup>,并证明了采样的平均值为 $2\lambda$ 。

即使不进行积分计算,教师也可以通过图 2(b)直观展示这一结果。如果把分界线看作新的起点,那么阴影线段被分界线切割后的右侧部分就等价于图 2(a)最左侧的第一段——所有分子从“起点”位置出发,直到随机发生第一次碰撞时的自由运动距离。所以分界线右侧阴影部分的长度平均值也应该是 $\lambda$ 。再考虑到随机性和对称性,阴影线段对于分界线左右两侧而言是平等的,所以分界线左侧的阴影部分长度平均值也是 $\lambda$ ,如图 2(c)所示。二者相加,于是图 2(a)中穿过分界线的线段长度平均值就是 $2\lambda$ 。

### 3 关于该方案的讨论

可以进一步向学生说明:“分界线”与原先最左边的“起跑线”等价的合理性在于气体分子发生碰撞的随机性。即不论从什么位置开始看,不论已经自由运动了多远,一个气体分子接下来单位时间内发生碰撞的概率是不变的。因此图 2(a)中任一条竖线都与最左侧的“起点”在上述讨论中是等价的。

如果课堂时间充裕,或者部分学生有课后进行推导的兴趣,可以介绍或者引导学生用积分来证明式(10)。在此基础上,可以进一步向学生指

出:“穿过分界线的线段长度平均值为 $2\lambda$ ”这一结果是依赖“自由程分布为指数衰减分布”这一性质的。如果自由程分布是其他性质的分布,则计算结果一般不是 $2\lambda$ 。比如 *Kinetic theory of gases* 中用一道例题展示了均匀分布会导致另外一个系数<sup>[27]</sup>。而“自由程分布为指数衰减分布”则是“气体分子发生碰撞完全随机”(与位置和当前行程无关)这一根本性前提的结果。如果学生明确了这三点之间的因果关系(图 3),就可以更好地理解为什么在前述的图形表示中,任一条竖线都能将若干线段分割成平均长度均为 $\lambda$ 的左右两部分。

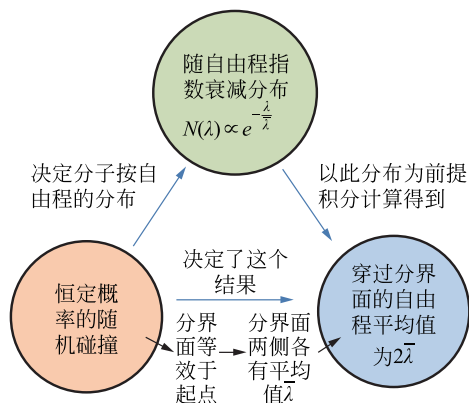


图 3 三个论断之间的因果逻辑关系

### 4 结语

本文设计的教学方案在实际教学中可以做成动图,高亮显示需要学生注意的部分,这样就能把图 2 的(a)、(b)和(c)整合在一起。还可以在此基础上制作一个模拟实验,选择特定的自由程的分布率,然后统计若干分子某一编号线段的平均值,与预期平均自由程做比较;再用分界线进行采样,统计穿过分界线的线段平均值。这样可以使学生对随机、概率、统计分布等概念产生更加深刻的印象。如果不进行积分的推导、只用图形展示的方式讲述上述内容,在课堂上所耗时间一般只有几分钟,但是可以让学生对统计的基本原理和随机分布产生非常直观的体会,并且能定性接受“ $2\lambda$ ”这个结论。即使是少数对此结果仍然抱有疑惑的学生,该教学方案也能使他们比较容易地找到计算验证的入手点。

### 参 考 文 献

[1] 杨桂臣. 分子按自由程的分布与输运系数的推导[J]. 大学

- 物理, 1998(1): 5-7.  
 YANG G C. Molecular free path distribution and the derivation of transport coefficients[J]. College Physics, 1998(1): 5-7. (in Chinese)
- [2] 谢名春.  $2\lambda$  问题的一种证明[J]. 大学物理, 1996(11): 13-14.  
 XIE M C. A proof for the problem of  $2\lambda$  in the transport processes[J]. College Physics, 1996(11): 13-14. (in Chinese)
- [3] 俞达仁. 输运系数的一种推导方法[J]. 杭州师范学院学报(自然科学版), 1985(S2): 76-77.  
 YU D R. A method for deriving transport coefficients[J]. Journal of Hangzhou Normal University (Natural Science Edition), 1985(S2): 76-77. (in Chinese)
- [4] 王锦峨. 推导输运系数的又一种方法[J]. 大学物理, 1997(11): 47,46.  
 WANG J E. Another method for deriving transport coefficients[J]. College Physics, 1997(11): 47, 46. (in Chinese)
- [5] 苏莉, 李子军. 推导粘滞系数的一种方法[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2000(2): 207-209.  
 SU L, LI Z J. A method for deriving viscosity coefficient [J]. Journal of Inner Mongolia Teacher's College for the Nationalities (Natural Science Edition), 2000(2): 207-209. (in Chinese)
- [6] 李科敏. 对  $2\lambda$  的定性解释和定量计算[J]. 井冈山学院学报(自然科学版), 2007, 28(1): 30-31.  
 LI K M. A kind of qualitative explanative and quantitative calculation to  $2\lambda$  [J]. Journal of Jinggangshan University (Natural Science Edition), 2007, 28(1): 30-31. (in Chinese)
- [7] 温明生. 在《热学》课教学中推导输运系数的又一方法[J]. 大学物理, 1985(10): 32-34.  
 WEN M S. Another method for deriving transport coefficients in the teaching of "Thermal Physics" [J]. College Physics, 1985(10): 32-34. (in Chinese)
- [8] 常树人. 谈普通物理《热学》课中一个关于自由程的问题[J]. 大学物理, 1982(4): 20-26.  
 CHANG S R. A discussion on the problem of free path in the "Thermal Physics" course of general physics[J]. College Physics, 1982(4): 20-26. (in Chinese)
- [9] 吴瑞贤. 推导输运系数的一些方法[J]. 大学物理, 1983(10): 16-19.  
 WU R X. Some methods for deriving transport coefficients [J]. College Physics, 1983(10): 16-19. (in Chinese)
- [10] 门甫, 邓德勋. 气体分子自由程分布公式中的初始条件和  $2\lambda$  佯谬[J]. 大学物理, 1989(7): 19-21.  
 MEN F, DENG D X. Initial conditions in the free path distribution formula of gas molecules and the  $2\lambda$  paradox[J]. College Physics, 1989(7): 19-21. (in Chinese)
- [11] 刘玉鑫. 热学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2016: 120-123.  
 LIU Y X. Thermal physics[M]. Beijing: Peking University Press, 2016: 120-123. (in Chinese)
- [12] BLUNDELL S, BLUNDELL K. Concepts in thermal physics[M]. England: Oxford University Press, 2009: 76-77.
- [13] PRASAD R. Classical and quantum thermal physics[M]. England: Cambridge University Press, 2016: 66-74.
- [14] KITTEL C, KROEMER H. Thermal physics[M]. U. S. A.: W. H. Freeman and Company, 1980: 397-404.
- [15] 李洪芳. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 296-305.  
 LI H F. Thermal physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 296-305. (in Chinese)
- [16] 包科达. 热学教程[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 111-117.  
 BAO K D. Thermal physics[M]. Beijing: Science Press, 2007: 111-117. (in Chinese)
- [17] SCHROEDER D. An introduction to thermal physics[M]. U. S. A.: Addison Wesley Longman, 1999: 41-43.
- [18] 李椿, 等. 热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015: 83, 87-89.  
 LI C, et al. Thermal physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2015: 83, 87-89. (in Chinese)
- [19] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程-热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005: 237-239.  
 ZHAO K H, LUO W Y. New concept physics course—Thermal physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005: 237-239. (in Chinese)
- [20] 张玉民. 热学[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 161-172.  
 ZHANG Y M. Thermal physics[M]. Beijing: Science Press, 2006: 161-172. (in Chinese)
- [21] 朱晓东. 热学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014: 118-120.  
 ZHU X D. Thermal physics[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2014: 118-120. (in Chinese)
- [22] 何丽珠. 热学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013: 83-86.  
 HE L Z. Thermal physics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 83-86. (in Chinese)
- [23] 黄淑清, 等. 热学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020: 159-166.  
 HUANG S Q, et al. Thermal physics course[M]. Beijing: Higher Education Press, 2020: 159-166. (in Chinese)
- [24] 李军刚, 等. 热学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2022.  
 LI J G, et al. Thermal physics[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2022. (in Chinese)
- [25] 常树人. 热学[M]. 天津: 南开大学出版社, 2009: 127-134.  
 CHANG S R. Thermal physics[M]. Tianjin: Nankai University Press, 2009: 127-134. (in Chinese)
- [26] BAIERLEIN R. Thermal physics[M]. England: Cambridge University Press, 1999: 362-364.
- [27] KENNARD E. Kinetic theory of gases[M]. U. S. A.: McGraw-Hill Book Company, 1938: 141-142.