

追击问题的力学解法

袁庆新 邵立 段向阳

(郑州航空工业管理学院材料学院, 河南 郑州 450046)

摘要 运用相对运动分析, 对狗兔追击问题, 提出了一种简单、直观的方法确定猎狗追捕野兔的临界范围, 同时, 也可方便地求得追击的时间、路程及相对运动方程等。

关键词 追击问题; 临界范围; 相对运动; 运动方程

MECHANICAL SOLUTIONS TO PURSUIT PROBLEMS

YUAN Qingxin SHAO Li DUAN Xiangyang

(School of Materials Science and Engineering, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou, Henan 450046)

Abstract By analyzing relative motion, this paper offers a simple and intuitive way to determine the critical range for a hound to catch a hare in the dog-rabbit pursuit problem. It also conveniently calculates pursuit time, distance, and motion equations.

Key words pursuit problem; critical range; relative motion; equation of motion

关于追击问题, 微积分与数学分析领域已开展大量研究^[1-6], 但从基本物理角度, 尤其是对猎狗追捕野兔临界范围的讨论却较为匮乏^[7-12]。野兔被捕获或逃脱的条件究竟如何? 据我们所知, 这一问题最初由 Alfred J Lotka 通过微分方程和积分推导解决。他提出了追击曲线族的等时线为椭圆这一重要性质, 并探讨了其在生物捕食场景中的应用^[13]; 随后, 进一步拓展模型, 综合考虑地形特征、避难所分布及物种间的相互观测能力, 构建了更全面的捕获条件理论框架^[14]。本文从力学视角出发, 基于相对运动分析方法, 以参考系、速度和运动方程等直观的物理概念为基础, 构建并求解追击问题; 通过微积分方程对椭圆临界范围的确定提供一个简单的力学推导和物理理解, 简化了传统数学方法, 还可便捷地求解追击时间、路程及相对运动方程等, 这可能对运动学及大学物理教学具有一点参考价值。

在经典运动学框架下, 考虑如下追击问题: 如图 1 所示, 初始时刻, 速度大小恒定 (v_1) 的野兔跑至 R 点时, 察觉到速度大小恒定 (v_2) 的猎狗位于 D 点, 此后时刻野兔沿直线奔向洞穴 O, 而猎狗也立即追向野兔 (速度方向始终指向野兔, 且 $v_2 > v_1$), 问: 猎狗要想在野兔到达洞穴之前捕获它,

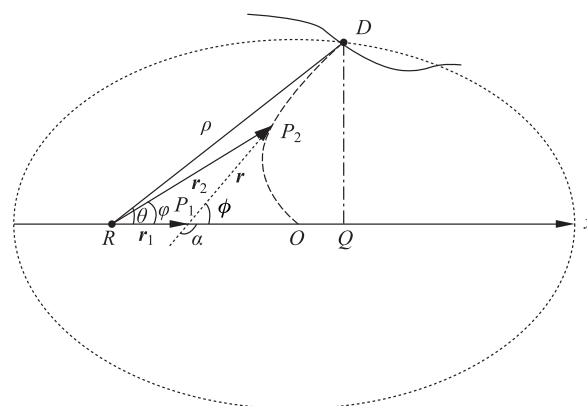


图 1 猎狗追击野兔

收稿日期: 2024-10-23

基金项目: 河南省高等教育教学改革研究与实践项目 (2023SJGLX332Y); 郑州航空工业管理学院教育教学改革研究与实践项目 (zhjy25-84)。

通信作者: 袁庆新, qx_yuan@126.com。

引文格式: 袁庆新, 邵立, 段向阳. 追击问题的力学解法[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 43-45, 54.

Cite this article: YUAN Q X, SHAO L, DUAN X Y. Mechanical solutions to pursuit problems[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 43-45, 54. (in Chinese)

其初始位置 D 需要满足什么条件? 其追击的时间、路程及轨迹又如何?

1 以地面为参考系

选地面为参考系, 建立以 R 为极点, 以 RO 为极轴的平面极坐标系 (见图 1), 在追击的过程中, 假设某一时刻 t , 猎狗跑至 P_2 , 其位置矢量为 $\mathbf{r}_2$, 野兔跑至 P_1 , 位置矢量为 $\mathbf{r}_1$, 依矢量三角形 RP_2P_1 , 有

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = k(t) \mathbf{v}_2 \quad (1)$$

其中, $k(t)$ 是一个依赖时间的函数。易知该函数满足的边界条件为

$$k(0) = \frac{\rho}{v_2}, \quad k(T) = 0 \quad (2)$$

其中, ρ 为猎狗与野兔的初始距离, T 为猎狗追上野兔的时间。

式(1)两边对时间求导, 得二者速度关系

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \frac{dk(t)}{dt} \mathbf{v}_2 + k(t) \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \quad (3)$$

又 $d(v_2^2)/dt = 0$, 即 $\mathbf{v}_2 \cdot (d\mathbf{v}_2/dt) = 0$, 说明猎狗速度与其加速度垂直; 于是式(3)两边同时点乘 $\mathbf{v}_2$, 有

$$v_1 v_2 \cos \alpha - v_2^2 = \frac{dk(t)}{dt} v_2^2 \quad (4)$$

式(4)在时间 $(0 \sim T)$ 区域上积分, 可得其位置关系

$$\int_0^T v_1 v_2 \cos \alpha dt - \int_0^T v_2^2 dt = v_2^2 \int_{k(0)}^{k(T)} dk(t)$$

即

$$e \int_0^T v_2 \cos \alpha dt - v_2 T = -\rho \quad (5)$$

其中, $e = v_1/v_2$, 又

$$\int_0^T v_2 \cos \alpha dt = v_1 T - \rho \cos \theta$$

则式(5)可化为

$$e(v_1 T - \rho \cos \theta) - v_2 T = -\rho \quad (6)$$

假设 $v_1 T = \overline{RO}$ 一定, 由式(6)可得猎狗恰好于 O 点捕获野兔时, 其初始位置 $D(\rho, \theta)$ 满足

$$\rho = \frac{(1 - e^2) \overline{RO}}{e(1 - e \cos \theta)} \quad (7)$$

显然, 此初始位置构成一个椭圆 (O 是中心点, R 为一焦点, e 为离心率), 就是说, 猎狗可以从椭圆

上任一点出发追击, 均可在 O 点处捕获野兔, 每次追击路线虽不同, 但所需时间 T 均相等, 它们具有追击的等时性, 此椭圆也称为追击等时线。换言之, 初始时刻, 如果猎狗处于椭圆内部, 则野兔在到达洞穴 O 之前就会被捕获, 相反, 猎狗在椭圆外部时, 野兔则可成功避险。

从式(6)可求得追击时间

$$T = \frac{\rho(1 - e \cos \theta)}{v_2 - e v_1} \quad (8)$$

特殊情况, 例如 $\theta = \pi/2$ 时, 追击的时间 $T = \rho v_2 / (v_2^2 - v_1^2)$, 与文献[8]中的结果一致。

猎狗的追击路程(追线长度)为

$$s = v_2 T = \frac{\rho(1 - e \cos \theta) v_2}{v_2 - e v_1} = \frac{\rho(1 - e \cos \theta)}{1 - e^2} \quad (9)$$

接下来求解猎狗的运动方程, 对式(4)速度关系在时间 $(0 \sim t)$ 区域上积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^t v_2 \cos \alpha dt &= \frac{v_2}{e} \left[k(t) + t - \frac{\rho}{v_2} \right] \\ &= r_2 \cos \varphi - \rho \cos \theta \end{aligned}$$

于是

$$k(t) = \frac{v_1}{v_2} (r_2 \cos \varphi - \rho \cos \theta) + \frac{\rho}{v_2} - t \quad (10)$$

则式(1)可表达为

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \left[\frac{v_1}{v_2} (r_2 \cos \varphi - \rho \cos \theta) + \frac{\rho}{v_2} - t \right] \mathbf{v}_2 \quad (11)$$

此即猎狗对野兔的相对运动方程(地面参考系)。

2 以野兔为参考系

以野兔为参考系, 如图 1 所示, 设某一时刻 t , 猎狗相对野兔的位置矢量为 $\mathbf{r}(P_1 \rightarrow P_2)$, 有 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, 两边对时间求导, 得猎狗相对野兔的速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, 速度 $\mathbf{v}$ 在径向和横向上的分量可表示为

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v_2 - v_1 \cos \phi \quad (12)$$

$$v_\phi = r \frac{d\phi}{dt} = v_1 \sin \phi \quad (13)$$

式(12)两边在时间 $(0 \sim T)$ 区域上积分, 得二者的位置关系

$$\int_0^T v_r dt = -\int_0^T v_2 dt - \frac{v_1}{v_2} \int_0^T v_2 \cos\phi dt$$

化简得

$$-\rho = -v_2 T - \frac{v_1}{v_2} (\rho \cos\theta - v_1 T)$$

此即前面的式(6),余不赘述。

野兔参考系下,猎狗的相对运动轨迹可方便地求出,具体如下。

由式(12)、式(13)可得

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{v_2 + v_1 \cos\phi}{v_1 \sin\phi} \quad (14)$$

两边积分,有

$$\int_{\phi}^{\phi} \frac{1}{r} dr = -\int_{\theta}^{\phi} \frac{v_2 + v_1 \cos\phi}{v_1 \sin\phi} d\phi$$

即

$$\begin{aligned} \ln \frac{r}{\rho} &= \int_{\theta}^{\phi} \frac{v_2/v_1 + \cos\phi}{(1 + \cos\phi)(1 - \cos\phi)} d\cos\phi \\ &= \ln \left(\frac{1 + \cos\phi}{1 + \cos\theta} \right)^{\frac{1}{2}(v_2/v_1 - 1)} \left(\frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\phi} \right)^{\frac{1}{2}(v_2/v_1 + 1)} \end{aligned}$$

所以

$$r = \rho \frac{\sin\theta}{\sin\phi} \left[\frac{\tan(\phi/2)}{\tan(\theta/2)} \right]^{v_1/v_2} \quad (15)$$

当 $\theta = \pi/2$ 时, $r = [\tan(\phi/2)]^{v_1/v_2} \rho / \sin\phi$, 与文献[8]中的结果一致。

如果猎狗和野兔的速度大小相等,它们之间的最小距离将是多少呢? 当 $v_2 = v_1$ 时,式(12)、式(13)可化为

$$v_r = -v_1 (1 + \cos\phi) \quad (16)$$

$$v_{\phi} = v_1 \sin\phi \quad (17)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r - r\cos\phi) &= \frac{dr}{dt}(1 - \cos\phi) + r \frac{d\phi}{dt} \sin\phi \\ &= v_r(1 - \cos\phi) + v_{\phi} \sin\phi = 0 \end{aligned}$$

所以

$$r - r\cos\phi = \text{常量} \quad (18)$$

由初始条件,可知

$$r - r\cos\phi = \rho - \rho\cos\theta \quad (19)$$

于是,在野兔参考系下,二者的最小距离为

$$r_{\min} = \lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{\rho - \rho\cos\theta}{1 - \cos\phi} = \frac{\rho}{2} (1 - \cos\theta) \quad (20)$$

3 结语

综上所述,我们从力学角度,基于相对运动分

析,以直观的物理概念方便地求出了猎狗追捕野兔的临界范围、追击时间、路程及相对运动方程等,前述的方法和思路可拓展到多体追击、军事拦截、游戏策略等相关问题中^[15-18]。

参 考 文 献

- [1] BERNHART A. Curves of pursuit[J]. Scripta Mathematica, 1954, 20: 125-141.
- [2] BERNHART A. Curves of pursuit II [J]. Scripta Mathematica, 1957, 23: 49-65.
- [3] BERNHART A. Polygons of pursuit [J]. Scripta Mathematica, 1959, 24: 23-50.
- [4] BERNHART A. Curves of general pursuit [J]. Scripta Mathematica, 1959, 24: 189-206.
- [5] PAVEL P, JOSEF T. The dog-and-rabbit chase revisited [J]. Acta Polytechnica, 1996, 36: 5-10.
- [6] BARTON J C, ELIEZER C J. On pursuit curves [J]. The ANZIAM Journal, 2000, 41: 358-371.
- [7] MUNGAN C E. A classic chase problem solved from a physics perspective [J]. European Journal of Physics, 2005, 26: 985-990.
- [8] CHASHCHINA I O I, SILAGADZE Z K. The dog-and-rabbit chase problem as an exercise in introductory kinematics [J]. Latin-American Journal of Physics Education, 2009, 3(3): 539-543.
- [9] IVAN M, LJILJANA K. Various methods for solving the pursuit problem with two objects on a plane [J]. European Journal of Physics, 2023, 44: 035002.
- [10] 毛澄映. 追击问题中关于临界范围是椭圆的证明 [J]. 力学与实践, 2000, 22(5): 77-80.
MAO C Y. The proof of the critical range being an ellipse in pursuit problems [J]. Mechanics in Engineering, 2000, 22(5): 77-80. (in Chinese)
- [11] 李晓萍. 追击问题临界范围的简洁证明与注记 [J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(1): 222-223.
LI X P. A concise proof and annotation of the critical range of the pursuit problem [J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2005, 35(1): 222-223. (in Chinese)
- [12] 邱为钢, 蒋明明, 杨虹. 追击问题临界范围的确定 [J]. 力学与实践, 2007, 29(5): 73.
QIU W G, JIANG M M, YANG H. Determination of the critical range of pursuit problems [J]. Mechanics in Engineering, 2007, 29(5): 73. (in Chinese)
- [13] ALFRED J L. Families of curves of pursuit and their isochrones [J]. American Mathematical Monthly, 1928, 35(8): 421-424.
- [14] ALFRED J L. Contribution to the mathematical theory of capture: I. Conditions for capture [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1932, 18(2): 172-178.

(下转第 54 页)

基础练习和复习。该预警系统不仅帮助教师进行自我调整,也为教育管理者提供了支持,确保及时干预并提供必要的指导。

教学质量反馈 采用聚类分析,将不同班级的教学效果分为三个类别:优秀、良好和待改进。通过将每个班级的平均能力值进行聚类,能够为教师和教育管理者提供更精准的教学档案,并为后续的教学改进措施提供科学依据。对于教学效果不佳的班级,可以加强对教师的指导和培训,调整教学方法,以提升整体教学质量。反之,对于表现优秀的班级,可以总结并推广其有效的教学实践。

教学管理者支持 分析结果为教学管理者提供了重要的决策支持,帮助其识别教学中的强项和弱项。基于数据的分析使得教学资源能够更加合理地分配,并优化教学策略。此外,定期的教学效果分析为管理者提供了持续改进教学质量的依据,促进了教育创新和教师专业成长。

4 结语

本研究通过对教学数据的深入分析,揭示了过程性评价与终结性评价之间的关系,识别了教学中的薄弱环节,并提供了改进措施。通过多维项目反应理论与教育数据挖掘的结合,教学管理者能够更有效地进行数据驱动的决策,优化教学方法和资源分配。最终,这些分析结果不仅能够帮助教师提升教学质量,还能为教育管理者提供制定更具针对性的改革策略的依据,从而促进教育质量的持续提升。

参 考 文 献

- [1] BATOOL S, RASHID J, NISAR M W, et al. Educational data mining to predict students' academic performance: A survey study[J]. *Education and Information Technologies*, 2022, 28: 905-971.
- [2] BURGOS C, CAMPANARIO M L, de la PEÑA D, et al. Data mining for modeling students' performance: A tutoring action plan to prevent academic dropout[J]. *Computers & Electrical Engineering*, 2018, 66: 541-556.
- [3] 中共中央、国务院印发《教育强国建设规划纲要(2024—2035年)》(2025年1月19日), http://www.moe.gov.cn/jyb_xxgk/moe_1777/moe_1778/202501/t20250119_1176193.html.
- [4] KABAKCHIEVA D. Predicting student performance by using data mining methods for classification[J]. *Cybernetics and Information Technologies*, 2013, 13(1): 61-72.
- [5] FERNANDES E, HOLANDA M, VICTORINO M, et al. Educational data mining: Predictive analysis of academic performance of public school students in the capital of Brazil[J]. *Journal of Business Research*, 2019, 94: 335-343.
- [6] RECKASE M D. *Multidimensional item response theory* [M]. Springer-Verlag New York, 2009.
- [7] RECKASE M D. The past and future of multidimensional item response theory[J]. *Applied Psychological Measurement*, 1997, 21: 25-36.
- [8] 康春花,辛涛. 测验理论的新发展:多维项目反应理论[J]. *心理科学进展*, 2010, 18(3): 530-536.
- [9] KAND C H, XIN T. New development in test theory: Multidimensional item response theory[J]. *Advances Psychological Science*, 2010, 18(3): 530-536. (in Chinese)
- [10] 许志勇,丁树良,钟君. 高考数学试卷多维项目反应理论的分析及应用[J]. *心理学探新*, 2013, 33(5): 438-443.
- [11] XU Z Y, DING S L, ZHONG J. The analysis and application of MIRT in mathematics paper in college entrance examination[J]. *Psychological Exploration*, 2013, 33(5): 438-443. (in Chinese)
- [12] 侯虎. 可解释人工智能在物理试卷分析中的应用[D]. 上海:同济大学,2023.
- [13] HOU H. Application of explainable artificial intelligence in the analysis of physics test papers[D]. Shanghai: Tongji University, 2023. (in Chinese)
- [14] LINACRE J M. WINSTEPS manual for rasch analysis [M]. winsteps.com, 1981.
- [15] 袁庆新,周永卫. 多狗追问题的力学解法[J]. *力学与实践*, 2010, 32(1): 81-82.
- [16] YUAN Q X, ZHOU Y W. A mechanics method of the dog-and-dog pursuit problem[J]. *Mechanics in Engineering*, 2010, 32(1): 81-82. (in Chinese)
- [17] 赵振国. 追击问题更直观的求解[J]. *力学与实践*, 2000, 22(5): 68.
- [18] ZHAO Z G. A more intuitive method to the pursuit problem[J]. *Mechanics in Engineering*, 2000, 22(5): 68. (in Chinese)
- [19] 马秀艳,于凤军. 多狗追问题的解析解[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2001, 29(4): 109-111.
- [20] MA X Y, YU F J. An analytic solution of a kinematical game[J]. *Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)*, 2001, 29(4): 109-111. (in Chinese)
- [21] 李力. N狗追问题的复分析方法[J]. *大学物理*, 2015, 34(8): 19-19.
- [22] LI L. An ingenious complex analysis solution of N dogs running problem[J]. *College Physics*, 2015, 34(8): 19-19. (in Chinese)

(上接第45页)