

一些关于厄米算符的结论至非厄米情形的扩展

姜欣岚 徐大智 吴 宁

(北京理工大学物理学院量子技术研究中心, 北京 100081)

摘 要 本文将量子力学中关于厄米算符的一些熟知结论推广至非厄米算符情形。具体地, (1)给出了满足代数方程的非厄米算符的本征值结构;(2)针对一类可对角化的非厄米算符, 阐明了对易性、简并子空间, 以及块对角化之间的关系, 给出了其可视化的图像;(3)以四格点自旋-1/2 海森堡 XXZ 链为例具体说明了这些扩展结果的物理内涵和应用。

关键词 非厄米算符; 对易性; 简并; 共同本征态; 块对角化

SOME CONCLUSIONS ABOUT HERMITIAN OPERATORS EXTENDED TO NON-HERMITIAN CASES

LOU Xinlan XU Dazhi WU Ning

(Center for Quantum Technology Research, School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract This paper extends some well-known conclusions about Hermitian operators in quantum mechanics to the case of non-Hermitian operators. Specifically, (1) it presents the eigenvalue structure of non-Hermitian operators satisfying algebraic equations; (2) for a class of diagonalizable non-Hermitian operators, it clarifies the relationship between commutativity, degenerate subspaces, and block diagonalization, and provides a visual representation; (3) taking the four-site spin-1/2 Heisenberg XXZ chain as an example, it specifically illustrates the physical implications and applications of these extended results.

Key words non-Hermitian operators; compatibility; degeneracy; simultaneous eigenstates; diagonalization

狄拉克在其经典著作《量子力学原理》^[1]中证明了若干关于厄米算符的重要定理。例如, 在数学上严格判断一个厄米算符是否为一个可观测量通常是困难的, 这涉及算符本征态集合的完备性问题。但狄拉克在[1]的第二章(“动力学变量和可观测量”, 32-34 页)中证明了:

满足有限次代数方程的厄米算符是一个可观测量, 其本征值由该方程的实根给出。 (I)
该结论很有用。例如, 泡利算符 σ_i 和投影算符 P

分别满足二次方程 $\sigma_i^2 - 1 = 0$ 和 $P^2 - P = 0$, 故都是可观测量。

问题 1: 能否将结论 I (或其部分) 推广至非厄米算符情形?

同在[1]的第二章(49-50 页)中, 狄拉克对最普遍的情况严格证明了熟知的结论:

两个相互对易的可观测量具有完备的共同本征态集合, 即二者可被同时对角化。 (II)
该结论是量子力学教科书中的标准内容[见 Saku-

收稿日期: 2025-03-03

基金项目: 科技部科技创新 2030 重大项目(2023ZD0300703); 北京理工大学物理学院教改项目“科研成果融入本科量子力学教学”。

通信作者: 吴宁, wunwyz@gmail.com。

引文格式: 姜欣岚, 徐大智, 吴宁. 一些关于厄米算符的结论至非厄米情形的扩展[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 34-42.

Cite this article: LOU X L, XU D Z, WU N. Some conclusions about Hermitian operators extended to non-Hermitian cases[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 34-42. (in Chinese)

rai 等人所著《现代量子力学》1.4 节(27-28 页)^[2], 或曾谨言所著《量子力学(卷 I)》4.3.3 节(140-141 页)^[3], 其重要性不言而喻。考虑某一可观测量 ξ 的对角化问题, 若能直接通过算符对易子运算找到与之对易的可观测量 η , 且后者的对角化过程较前者来的容易, 则可有效地实现 ξ 的块对角化(见下)甚至完全对角化。例如, Sakurai 等人在[2]的 4.3 节(“晶格平移作为一种离散对称性”, 266 页)讨论周期性晶格中的单粒子问题时, 便利用了以下事实: 由于晶格平移算符和系统的哈密顿量对易, 故二者可被同时对角化。然而, 读者应注意该例中的晶格平移算符是一个么正的非厄米算符, 故结论 II 原则上不可直接应用于此。

问题 2: 为何结论 II 对非厄米的晶格平移算符依然成立? 何种类型的非厄米算符可保持该结论成立?

对易可观测量与所谓的“简并解除”现象密切相关, 这在[1]的第三章(“表象”, 56-57 页)中有详细阐述(亦见[2, 3]):

若可观测量 ξ 的某一本征值 ξ' 存在简并, 则可寻找与 ξ 对易的另一可观测量 η , 以借助二者共同本征态 $|\xi', \eta'\rangle$ 中的本征值 η' 来解除(或部分解除)与 ξ' 相关的简并。 (III)

大多数量子力学教材在讨论简并解除这一重要概念时往往选择对易角动量算符对 (L^2, L_z) 的共同本征态 $|lm\rangle$ 作为典型例子, 以说明

L_z 解除了 L^2 的本征值简并。

诚然, 这是氢原子薛定谔方程解中的常规内容。然而, 对初次学习量子力学的学生来说, 该例子或许不是理解简并解除的最佳选择。我们注意到, 狄拉克在叙述结论 III 时并没有提及任何具体的实例^[1]; Sakurai 等人在[2]的第一章中引用该例子时写道(28 页): “虽然本书到第三章才会对轨道角动量进行完整的讨论, 但读者应能从其在基本波动力学接受的早期训练中意识到 L^2 和 L_z 的本征值分别为 $l(l+1)\hbar^2$ 和 $m\hbar$ ”; 曾谨言则在讨论结论 III 前写道: “在讲述求两个力学量共同本征态的一般原则之前, 先讨论一下轨道角动量的本征态”, 并事先完整求解了 L^2 和 L_z 的本征值问题^[3](4.3.2 节, 138-140 页)。上述几处略显突兀的讲述方式的出现并非偶然, 主要归因于合适实例的缺乏。

问题 3: 除了 (L^2, L_z) 的例子, 是否存在可用

来理解简并解除现象的其他物理实例呢? 其在数学上应简单(例如, 不借助特殊函数), 在物理上应明晰(例如, 从矩阵力学而非波动力学的角度)。

一般量子力学教材对于对易可观测量的讨论大多集中在结论 II 和 III 上, 但对与之相关的另一重要概念, 即块对角化的讨论较少。再以 (L^2, L_z) 为例, l 的简并性蕴含了 L_z 在 L^2 对角的表象中是块对角的, 即 L_z 在具有不同 l 值的角动量态之间的矩阵元为零: $\langle lm | L_z | l'm' \rangle = 0 (l \neq l')$ 。我们可以说

L^2 实现了 L_z 的块对角化。

可见 L_z 的块对角化与 L^2 本征值的简并性密切相关。

块对角化的概念亦具有重要的实用价值, 可有效降低系统的希尔伯特空间维数。考虑某一多体哈密顿量 H 的本征值问题, 人们常寻找与之对易的可观测量 η 以实现 H 的块对角化或完全对角化。如前所述, η 的对角化手续往往比 H 来的简单, 这导致其本征值可能存在大量简并, 从而形成 H 的块对角结构。在实际问题中, 寻找此类对易可观测量并非易事, 有时需借助非厄米的可对易算符(如[2]中的单粒子平移算符)。

问题 4: 与哈密顿量 H 对易的何种类型的非厄米算符可用来实现其块对角化?

本文的主要目的有三:

(a) 将结论 I ~ III 推广至非厄米算符情形, 从而回答上述的问题 1 ~ 4; (b) 通过对易性算符在不同表象中表示矩阵的图形结构演化来实现简并性和块对角化关系的可视化; (c) 为阐述简并解除和块对角化等概念提供物理内容更为丰富、更易理解的简单实例, 即四格点自旋-1/2 海森堡 XXZ 链。

为简单起见, 本文仅讨论离散本征值和有限维希尔伯特空间的情形。

1 满足代数方程的线性算符

狄拉克在[1](32 页)中证明了关于厄米算符的一个重要定理:

定理 1 设厄米线性算符 A 满足 n 次代数方程

$$f(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0 = 0$$

即 $f(A)$ 作用于任意非零态矢都得到零态矢, 其

中 c_i 是复系数。若该方程是 A 所满足的最简方程, 则有

i) A 有 n 个相异的本征值, 对应方程 $f(z)=0$ 的 n 个实根。

ii) 任意态矢都可由 A 的本征态展开, 即 A 是一个可观测量。

该定理的证明可参见[1]。为完整起见, 我们在附录 A 中也给出了其详细证明。现对定理 1 做如下说明:

a) 定理中的“最简”二字必不可少, 其最直接的含义是 A 不满足次数低于 n 的代数方程。例如, 泡利算符 σ_i 也满足三次方程 $\sigma_i^3 - \sigma_i = 0$, 但其显然不是最简的。

b) 定理 1 表明若某一厄米算符满足一个最简的代数方程, 则该方程无重根。但这并不意味着 A 的本征谱不存在简并。例如, d 维希尔伯特空间中的单位算符显然满足一次方程 $A - 1 = 0$, 但其有 d 个简并的本征值 1。

c) 若一个非厄米算符满足一个最简代数方程, 则该方程可能存在重根。例如, 自旋-1/2 降算符 S_- 满足 $(S_-)^2 = 0$, 但其本身显然不是零算符。

作为对问题 1 的回答, 我们将定理 1.1 的结论 i 推广至非厄米算符情形。与厄米算符不同, 非厄米算符的本征值一般为复数, 需区分左右本征值和左右本征态^[4]。

定理 2 设非厄米线性算符 A 满足最简代数方程

$$f(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0 = \prod_{i=1}^l (A - a_i)^{m_i} = 0$$

其中, $m_i \geq 1$ 且 $\sum_{i=1}^l m_i = n$, 则 A 有 l 个互不相同的右本征值 $\{a_1, a_2, \cdots, a_l\}$ 。

证明: 对任一 $1 \leq j \leq l$, 记 $f(A) \equiv (A - a_j) \cdot g_j(A)$, 其中 $g_j(A) \equiv (A - a_j)^{m_j-1} \prod_{i(\neq j)} (A - a_i)^{m_i}$ 。由于 $f(A) = 0$ 为 A 满足的最简代数方程, 故 $g_j(A) \neq 0$ 。于是必存在某一非零态矢 $|\chi\rangle$ 使得 $g_j(A)|\chi\rangle \neq 0$ 。而 $(A - a_j)g_j(A)|\chi\rangle = 0$, 因此 $g_j(A)|\chi\rangle \neq 0$ 是 A 的右本征值为 a_j 的右本征态。

另外, 设 a' 是 A 的任一右本征值: $A|a'\rangle =$

$a'|a'\rangle$, 其中 $|a'\rangle$ 为非零态矢。则有 $0 = f(A)|a'\rangle = f(a')|a'\rangle$, 即 a' 是 $f(z) = 0$ 的根, 故必在集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_l\}$ 中。证毕。

由定理 2 可知 S_- 具有两个零本征值, 但相应的非平庸本征态却只有一个, 即自旋下态 $|\downarrow\rangle$ 。这意味着非厄米算符 S_- 不可被对角化。然而, 存在一类可通过么正变换对角化的特殊非厄米算符, 我们称之为 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符。

定义 1 如果一个非厄米算符满足以下两条性质:

i) A 可通过么正变换对角化, 即其所有的右本征态集合 $\{|a'\rangle\}$ 形成正交归一的完备基矢。

ii) 若 $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$, 则有 $\langle a'|A = \langle a'|a'$, 即 A 的左右本征值集合相同, 且相应的左右本征态互为厄米共轭, 则称该非厄米算符为一个 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符。

$\mathcal{A}$ 类非厄米算符的一个明显例子是算符 iF , 其中 F 是某一厄米算符, 其在最近颇受关注的非厄米物理研究中较为常见^[4]。 iF 满足的左右本征方程分别为 $\langle f'| (iF) = \langle f'| (iF)$ 和 $(iF)|f'\rangle = (iF)|f'\rangle$, 其中 f' 是实数, 即 iF 的左右本征值相等, 且相应的左本征态和右本征态互为厄米共轭。

定理 3 任意么正算符都是一个 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符。

证明: 任意么正算符 U 都可写为 $U = e^{iF}$ 的形式, 其中 F 为厄米算符。由于 F 可通过么正变换对角化, 故 U 也可以。此外, 由 $U|f'\rangle = e^{if'}|f'\rangle$, $U^\dagger|f'\rangle = e^{-if'}|f'\rangle$ 可知 $\langle f'|U = \langle f'|e^{if'}$ 。证毕。

2 四格点自旋-1/2 海森堡 XXZ 链

我们选取在统计物理和凝聚态物理中具有重要地位的自旋-1/2 海森堡 XXZ 链作为贯穿全文的实例, 其哈密顿量在文献中通常写为 (令 $\hbar=1$)^[5]

$$H_{\text{XXZ}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \quad (1)$$

其中, N 为总格点数, $\sigma_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ 是格点 i 上的泡利算符, $\Delta \neq 0$ 是各向异性参数。为简单起见, 我们采用无量纲的能量单位并使用周期性边界条件 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ 。在本文中我们考虑 $N=4$ 的短链 [见图 1(a)]。

顺便指出, 二能级系统是能够反映量子力学线性代数特性的最简单的非平庸例子, 其理应在

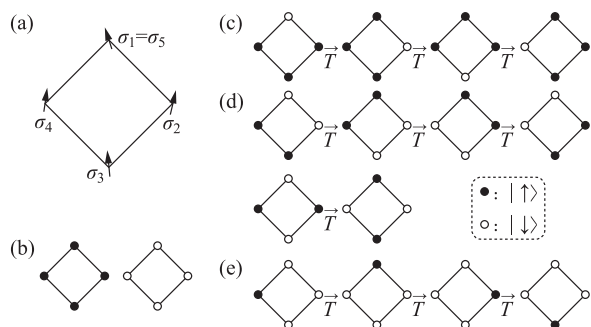


图 1

(a) 四格点自旋-1/2 XXZ 链的示意图; (b) 两个最大极化态 $|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$; (c) $C_4^1=4$ 个“1-磁振子”态可通过将平移算符 T 连续作用于 $|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ 得到; (d) $C_4^2=6$ 个“2-磁振子”态可分为两类: $|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$ 在 T 的作用下会生成 3 个态 $|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$; 则 $|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$ 在 T 的作用下只生成一个态 $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle$; (e) 4 个“3-磁振子”态(与 1-磁振子类似)

量子力学课程的初期就被引入(例如,通过对光子偏振或斯特恩-盖拉赫实验的讨论——正如狄拉克^[1]和 Sakurai^[2]所做的那样),尽管大多数国内的教材并没有这样做。任何熟悉二能级系统的学生都可结合复合希尔空间的知识而方便地理解自旋-1/2 XXZ 链的物理内容。

四格点 XXZ 链的实空间完备基矢态为 $2^4=16$ 个所谓伊辛构型 $|\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\rangle \equiv |\tau_1\rangle_1 \otimes |\tau_2\rangle_2 \otimes |\tau_3\rangle_3 \otimes |\tau_4\rangle_4$, 其中 $\tau_i = \uparrow, \downarrow$ 。我们在图 1(b)~(e)中列出了这 16 个态。总磁矩算符定义为 $S_z = \frac{1}{2} \sum_j \sigma_j^z$ 。容易验证 S_z 与 H_{XXZ} 对易

$$[H_{\text{XXZ}}, S_z] = 0 \quad (2)$$

显然所有的伊辛构型都是 S_z 的本征态。 S_z 的本征值 s_z 是 $C_4^{2-s_z} = \frac{4!}{(2+s_z)!(2-s_z)!}$ 重简并的:所有具有 $2-s_z$ 个下自旋的伊辛构型都是属于本征值 s_z 的本征态[见图 1(b)~(e)]。

与[2]中的单粒子晶格平移算符类似,我们引入晶格平移算符 T ,其满足关系式 $T|\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\rangle = |\tau_4\tau_1\tau_2\tau_3\rangle$ 或 $T\sigma_j T^{-1} = \sigma_{j+1}$ 。 T 是一个么正算符,故属于 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符。然而,与 $T=e^{iF}$ 对应的厄米算符 F 并不容易利用自旋算符显式地写出^①。周期性边界条件意味着对任意 j 都有 $T^4\sigma_j(T^{-1})^4 = \sigma_j$,即 T 满足最简代数方程 $T^4=1$ 。由定理 2 可知 T 的本征值为 4 个单位根

$$t_1=1, t_2=i, t_3=-1, t_4=-i \quad (3)$$

由于系统是平移不变的,故有

$$[H_{\text{XXZ}}, T] = 0 \quad (4)$$

此外,易见总磁矩 S_z 也与 T 对易:

$$[T, S_z] = 0 \quad (5)$$

在下一节中,我们将利用方程(2)~方程(5)来讨论 H_{XXZ} 的块对角化。

3 对易性算符:共同本征态、简并解除和块对角化

对易可观测量与简并解除、守恒量、共同本征态和块对角化等重要概念密切相关。在本节中,我们将前述的结论 II 和 III 推广至 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符的情形,并借助四格点 XXZ 链说明其应用。我们从简单的无简并情形出发。

定理 4 设 A 是一本征值不存在简并的可观测量或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符, B 是任一与 A 对易的线性算符,则 B 在 A 为对角的表象下也是对角的。

证明:对 A 的任意两个本征值为 a' 和 a'' 的本征态 $|a'\rangle$ 和 $|a''\rangle$, 由 $[A, B]=0$ 可得 $0 = \langle a'' | AB - BA | a' \rangle = (a'' - a') \langle a'' | B | a' \rangle$, 其中利用了厄米或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符 A 的性质 $\langle a'' | a'' \rangle = \langle a'' | A | a' \rangle$ 和 $A | a' \rangle = a' | a' \rangle$ 。故对 $a'' \neq a'$ 必有 $\langle a'' | B | a' \rangle = 0$, 即 B 在 A 对角的表象下也是对角的。证毕。

定理 4 表明 A 和 B 具有共同本征态 $|a', b'\rangle$, 其中 $b' \equiv \langle a' | B | a' \rangle$ 。注意 B 的本征值集合 $\{b'\}$ 可能存在简并,但互异的 $\{a'\}$ 足以区分任意两个共同本征态。

更为微妙的是 A 的本征值集合 $\{a'\}$ 存在简并的情况,此时有以下定理:

定理 5 设 A 是一个可观测量或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符, B 是任一与 A 对易的线性算符。若 A 的本征值集合存在一个或多个简并子空间,则 B 在 A 为对角的表象下是块对角的。具体地,设 A 存在某一属于本征值 $\bar{a}$ 的 n 维简并子空间 ($n \geq 2$), 相应的简并本征态集合为 $\{|\bar{a}_1\rangle, |\bar{a}_2\rangle, \dots, |\bar{a}_n\rangle\}$, 则 B 的表示矩阵在这 n 个基矢态下形成一个 $n \times n$ 的块。

证明:设 $a' \neq \bar{a}$, 即本征态 $|a'\rangle$ 不在 $\bar{a}$ -简并子空间中。由于对任意 $1 \leq i \leq n$ 有 $\langle \bar{a}_i | A = \langle \bar{a}_i | \bar{a}$, 对易条件 $[A, B]=0$ 给出 $0 = \langle \bar{a}_i | AB - BA | a' \rangle =$

① 本例中的 F 为晶格动量算符,可通过将自旋链费米子化后在费米子模型的动量空间中写出,但这超出了本文的讨论范围。

$(\bar{a}-a')\langle\bar{a}_i|B|a'\rangle$, 得到 $\langle\bar{a}_i|B|a'\rangle=0$, 即简并块内与块外的态不通过算符 B 相联系。另外, 对子空间内的任意两个简并态 $|\bar{a}_i\rangle$ 和 $|\bar{a}_j\rangle$, 有 $0=\langle\bar{a}_i|AB-BA|\bar{a}_j\rangle=(\bar{a}-\bar{a})\langle\bar{a}_i|B|\bar{a}_j\rangle=0\times\langle\bar{a}_i|B|\bar{a}_j\rangle$, 故无法断定 $\langle\bar{a}_i|B|\bar{a}_j\rangle=0$ 。证毕。

为了形象地理解该块对角化结构, 我们给出 A 和 B 在 A 表象下的表示矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} |\bar{a}_1\rangle, |\bar{a}_2\rangle, \dots, |\bar{a}_n\rangle \\ \tilde{a} & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{a} \end{pmatrix}_A \quad (6)$$

$$B = \begin{pmatrix} |\bar{a}_1\rangle, |\bar{a}_2\rangle, \dots, |\bar{a}_n\rangle \\ \begin{matrix} 0 & & \\ & n & \\ 0 & n & 0 \end{matrix} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_A \quad (7)$$

其中, 下标 A 代表在 A 表象下的表示矩阵。

现将定理 5 应用于 H_{XXZ} 的初步块对角化。在定理 5 中取 $A=S_z$ 和 $B=H_{\text{XXZ}}$, 可知 H_{XXZ} 在具有固定总磁矩的子空间中成块。特别地, $s_z=\pm 2$ 的两个子空间非简并, 故 $|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$ 本身都是 H_{XXZ} 的本征态[图 1(b)]。类似的分析可应用于对易的算符对 S_z 和 T 。在定理 5 取 $A=S_z$ 和 $B=T$, 可知 T 在具有固定总磁矩的子空间中也成块。

作为对问题 2 的回答, 我们有以下推论:

推论 1 设 A 和 B 是对易的可观测量或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符, 则无论 A 的本征值是否存在简并, 二者总可以被同时对角化。

证明: 由于 B 是可观测量或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符,

故存在幺正变换 $|\tilde{b}_i\rangle = \sum_{j=1}^n c_{ij} |\bar{a}_j\rangle$ 将式(7)中的 $n\times n$ 块对角化: $B|\tilde{b}_i\rangle = \tilde{b}_i |\tilde{b}_i\rangle$ 。另外, 显然 $|\tilde{b}_i\rangle$ 都是 A 的本征值为 $\bar{a}$ 的本征态。故 A 和 B 在块内具有共同本征态 $|\bar{a}, \tilde{b}_i\rangle$, 在新基 $\{|\tilde{b}_i\rangle\}$ 下都是对角的:

$$A = \text{diag}(\dots, \bar{a}, \dots, \bar{a}, \dots)_B,$$

$$B = \text{diag}(\dots, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, \dots)_B$$

证毕。

如果 $\tilde{b}_i$ 各不相同, 则可利用它们来区分 A 的这 n 个简并本征态。例如, 考察上述 $A=S_z$ 和 $B=T$ 在 $s_z=1$ 的 4 维“1-磁振子”子空间[图 1(c)]中的同时对角化。为了找到 T 的本征态, 可仿照[2]中的单粒子问题, 将图 1(c)中的 4 个伊辛构型做线性叠加来构造 4 个由波数 k 标记的 1-磁振子布洛赫态

$$|\xi(k)\rangle = \frac{1}{2}(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + e^{ik}|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + e^{i2k}|\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{i3k}|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

我们要求 $|\xi(k)\rangle$ 是平移算符 T 的本征态:

$$T|\xi(k)\rangle = e^{-ik}|\xi(k)\rangle$$

给出 $e^{ik}=1$, 即 k 应取 4 个离散值 $k=-\pi, -\frac{\pi}{2},$

$0, \frac{\pi}{2}$, 从而 T 的本征值由式(3)中 4 个单位根 $t_1, \dots, t_4$ 给出。我们看到, 布洛赫态 $|\xi(k)\rangle$ 即为 S_z 和 T 在 $s_z=1$ 子空间的共同本征态, s_z 的 4 重简并可由 T 的 4 个相异本征值完全解除。4 维的 3-磁振子子空间[图 1(e)]可做类似分析。

然而, 一般情况下, 将 A 和 B 同时对角化后 $\{\tilde{b}_i\}$ 中可能仍然存在简并, 例如 $\tilde{b}_1=\tilde{b}_2=\dots=\tilde{b}_m=\tilde{b}$, 其中 $m\leq n$ (我们总可以把简并的 $\tilde{b}_i$ 对应的态顺序排列)。此时需寻找第三个满足 $[A, C]=[B, C]=0$ 的算符 C 以进一步解除 $\{\tilde{b}_i\}$ 中的简并。

作为例子, 考察四格点 XXZ 链具有零磁矩 $s_z=0$ 的 $C_4^2=6$ 维“2-磁振子”子空间。 T 的 4 个相异本征值显然无法完全解除 s_z 在此子空间的 6 重简并。注意到该子空间的 6 个伊辛构型可分为两类: 两下自旋间距为 1 的 4 个态 $|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$ [图 1(d)第一行], 以及两下自旋间距为 2 的两个态 $|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$ 和 $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle$ [图 1(d)第二行]。这提示我们构造以下两类 2-磁振子布洛赫态^[6,7]

$$|\xi_1(k)\rangle = \frac{1}{2}(|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + e^{ik}|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{i2k}|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + e^{i3k}|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|\xi_2(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{ik}|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

其中态的下标代表两下自旋的间距。我们同样要求 $|\xi_1(k)\rangle$ 和 $|\xi_2(k)\rangle$ 均应是 T 的本征态

$$T|\xi_1(k)\rangle = e^{-ik}|\xi_1(k)\rangle \quad (8)$$

$$T|\xi_2(k)\rangle = e^{-ik}|\xi_2(k)\rangle \quad (9)$$

与 1-磁振子布洛赫态 $|\xi(k)\rangle$ 类似, $k = -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ 可保证式(8)成立。然而, 注意到

$$\begin{aligned} T|\xi_2(k)\rangle &= \frac{1}{2}(|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{ik}|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) \\ &= e^{-ik}\frac{1}{2}(e^{ik}|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{i2k}|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

这意味着只有当 $e^{i2k} = 1$ 时式(9)才能成立, 故 $|\xi_2(k)\rangle$ 只对 $k = -\pi$ 和 0 有定义, 得到

$$|\xi_2(-\pi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|\xi_2(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

以下 6 个顺序排列的 2-磁振子布洛赫态

$$\{|\xi_1(-\pi)\rangle, |\xi_2(-\pi)\rangle, |\xi_1(0)\rangle, |\xi_2(0)\rangle, |\xi_1(-\pi/2)\rangle, |\xi_1(\pi/2)\rangle\} \quad (10)$$

便实现了 T 的完全对角化, 表示矩阵为

$$T = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, i, -i)_T \quad (11)$$

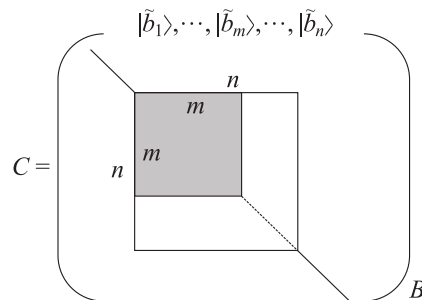
可见, 对易 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符 T 的引入并未完全消除 s_z 的 6 重简并, 仍存在两个分别与本征值 $t_1 = 1$ 和 $t_3 = -1$ 对应的 2 维简并子空间。

为了进一步解除式(11)中的简并, 需寻找与 S_z 和 T 都对易的算符。式(2)和式(4)提示我们哈密顿量 H_{XXZ} 或可实现该任务。

一般地, 我们有:

定理 6 设 A 和 B 是对易的可观测量或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符, C 是任一与 A 和 B 都对易的线性算符。若 A 的本征值存在某个维数为 n 的简并子空间, 且将 A 和 B 在推论 1 的意义下同时对角化后, B 在 A 的简并子空间中仍存在 $m \leq n$ 重简并, 则 C 在 A 和 B 共同对角的表象中形成一个 $m \times m$ 的块。

证明: 对条件 $[A, C] = 0$ 应用定理 5, 可知 C 在 A 和 B 共同对角的表象中形成一个 $n \times n$ 的块。再对条件 $[B, C] = 0$ 应用定理 5, 则 C 在 $n \times n$ 的块中进一步形成一个 $m \times m$ 的块, 如下图所示:



证毕。

类似地, 当 C 为一可观测量或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符时, 可找到 $|\tilde{b}_1\rangle, \dots, |\tilde{b}_m\rangle$ 的线性组合将 C 对角化, 从而实现在此 C 表象中 A, B 和 C 的同时对角化。若对角化后 C 在 $m \times m$ 块中的本征值仍存在简并, 可继续寻找第四个与 A, B, C 均对易的线性算符 D (前提是 A, B, C 都是可观测量或 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符), 重复以上操作直至简并完全解除。

现在回到 XXZ 链的例子。我们在定理 6 中取 $A = S_z, B = T, C = H_{\text{XXZ}}$ 。首先注意到 4 个 1-磁振子布洛赫态 $\{|\xi(k)\rangle\}$ 已实现了 S_z 和 T 在 1-磁振子子空间中的同时对角化, 且 S_z 的简并已经被 T 的本征值完全解除 (即 $m = 1$)。由定理 6, H_{XXZ} 在 $\{|\xi(k)\rangle\}$ 下自动对角, 即 $\{|\xi(k)\rangle\}$ 都是 H_{XXZ} 的本征态。值得强调, 我们无须具体计算 H_{XXZ} 对态 $|\xi(k)\rangle$ 的作用 (具体计算见附录 B), 利用定理 6 可立得此结论。

对于 $s_z = 0$ 的 2-磁振子子空间, 由式(11)可知哈密顿量 H_{XXZ} 在布洛赫基式(10)下会形成两个 2×2 的块矩阵, 分别占据 1、2 行列和 3、4 行列。此外, 由于 T 的本征值 i 和 $-i$ 在布洛赫基下非简并, 我们无须计算便可立刻断言 $|\xi_1(\pm\pi/2)\rangle$ 都是 H_{XXZ} 的本征态。附录 B 中的具体计算给出 H_{XXZ} 在式(10)下的如下表示矩阵

$$H_{\text{XXZ}} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_T \quad (12)$$

至此, 我们已利用与 H_{XXZ} 均对易的厄米算符 S_z 和 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符 T 实现了 H_{XXZ} 的块对角

化。如所期待的, $|\xi_1(-\pi/2)\rangle$ 和 $|\xi_1(\pi/2)\rangle$ 都是 H_{XXZ} 的本征值为零的简并本征态(但可利用 T 的本征值 i 和 $-i$ 加以区分)。两个 2×2 的块矩阵已被圈出, 其中第一个块因矩阵元 $\langle \xi_1(-\pi) | H_{\text{XXZ}} | \xi_2(-\pi) \rangle = 0$ 而已经具有对角形式。将表示矩阵(11)进一步对角化, 我们最终得到算符 S_z , T 和 H_{XXZ} 的对角表示

$$S_z = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0)_{H_{\text{XXZ}}}$$

$$T = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, i, -i)_{H_{\text{XXZ}}}$$

$$H_{\text{XXZ}} = 2\text{diag}(0, -\Delta, h_+, h_-, 0, 0)_{H_{\text{XXZ}}}$$

其中, $h_{\pm} = \frac{1}{2}(-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 8})$ 。

从另一个角度看, 我们也利用与 S_z 均对易的 $\mathcal{A}$ 类非厄米算符 T 和厄米算符 H_{XXZ} 完全解除了 S_z 在零磁矩空间的 6 重简并(对 $\Delta \neq 0$)。需要指出的是, H_{XXZ} 并不是能实现该简并解除的唯一选择。事实上, H_{XXZ} 中的伊辛耦合部分 $H_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$ 足以实现该目的。容易验证式(10)中的布洛赫基态都是 H_z 的本征态, 给出 H_z 在 T 表象中的表示

$$H_z = \text{diag}(0, -2\Delta, 0, -2\Delta, 0, 0)_T \quad (13)$$

这同时也意味着以 H_z 为例来说明块对角化这一概念是平庸的。

以上关于块对角化的分析同样可扩展至任意偶数 N 的情形。对于 N 格点自旋 $-1/2$ XXZ 链, 其 $C_N^2 = N(N-1)/2$ 维的 2-磁振子空间可借助平移算符 T 进一步分割成维数为 $\frac{N}{2}$ 或 $\frac{N}{2}-1$ 的小块, 这大大简化了对大尺度 XXZ 链中 2-磁振子问题的数值和解析处理, 详见笔者最近关于高自旋铁磁链中 2-磁振子束缚态的工作^[6,7]。

以上通过寻找可对易力学量的完全集来解除简并的手续是量子力学教材中的标准内容^[2,3]。这里, 我们结合块对角化的概念将该过程可视化, 使其便于理解。我们认为以上对四格点 XXZ 链块对角化的讨论为理解简并解除这一重要概念提供了比 (L^2, L_z) 更为简单(本例不涉及球谐函数等复杂数学知识, 学生只需熟悉泡利算符的基本对易关系和简单的线性代数知识)、物理内容更丰富的实例。至此我们回答了问题 3 和问题 4。

4 结论

本文将量子力学中关于厄米算符的一些熟知结论推广至非厄米算符情形, 并借助凝聚态物理中的海森堡 XXZ 自旋链以具象地理解这些扩展结论。

我们首先给出了满足代数方程的一般非厄米算符的本征值结构, 由此得到了周期性晶格中平移算符 T 的本征值。受平移算符的启发, 引入了一类可对角化的特殊非厄米算符并证明了么正算符隶属其中。我们将一般量子力学教材中关于对易性可观测量同时对角化和简并解除的标准内容推广至此类非厄米算符。特别地, 我们详细阐述了块对角化这一与对易性密切相关但却较少被讨论的重要概念, 利用表示矩阵的图形将其与简并解除的关系可视化。

本文中的每个一般性结论都可以通过对四格点自旋 $-1/2$ XXZ 链的分析得到清楚地理解, 这也建立起了连接量子力学课堂内容和凝聚态物理或统计物理研究的桥梁。

附录 A 定理 1 的证明^[1]

证明: 由代数基本定理, n 次多项式 $f(A)$ 总

可在复数域分解为 $f(A) = \prod_{i=1}^l (A - a_i)^{m_i}$, 其中

$m_i \geq 1$ 且 $\sum_{i=1}^l m_i = n$ 。对某一个特定的 j , 将

$f(A)$ 写为 $f(A) = (A - a_j)g_j(A)$, 其中 $g_j(A) = (A - a_j)^{m_j-1} \prod_{i=1, i \neq j}^l (A - a_i)^{m_i}$ 。 $f(A) = 0$ 是 A

满足的最简代数方程意味着 $g_j(A) \neq 0$, 于是必存在某一非零态矢 $|\chi\rangle$ 使得 $g_j(A)|\chi\rangle \neq 0$ 。将 $f(A) = 0$ 两边作用于 $|\chi\rangle$ 便得 $A[g_j(A)|\chi\rangle] = a_j[g_j(A)|\chi\rangle]$, 即因子 a_j 是厄米算符 A 的本征值, 从而必为实数。此外, 易见 A 的任一本征值 a' 必在集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ 中: 令 $A|a'\rangle = a'|a'\rangle$, 则有 $0 = f(A)|a'\rangle = f(a')|a'\rangle$, 给出 $f(a') =$

$\prod_{i=1}^l (a' - a_i)^{m_i} = 0$, 即 $a' \in \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ 。

下面证明对任意 i 都有 $m_i = 1$, 从而 $l = n$ 。为此需利用狄拉克在[1]中证明的如下引理:

[引理] 若 A 是一个满足方程 $A^m|\phi\rangle=0$ 的线性厄米算符, 其中 m 为正整数, $|\phi\rangle$ 为某一个特殊态矢, 则亦有 $A|\phi\rangle=0$ 。

该引理可利用递推法或数学归纳法证明^[1], 此处从略。现假设存在某一 $m_j \geq 2$ 。由于对任意态矢 $|\psi\rangle$ 都有 $0 = f(A)|\psi\rangle = (A - a_j)^{m_j} \prod_{i=1, i \neq j}^l (A - a_i)^{m_i} |\psi\rangle$, 且注意到 $A - a_j$ 是一个厄米算符(以上已证明 a_j 是实的), 故由引理有 $(A - a_j) \cdot \prod_{i=1, i \neq j}^l (A - a_i)^{m_i} |\psi\rangle = 0$ 。由于 $|\psi\rangle$ 是任意态矢, 于是有算符方程 $(A - a_j) \prod_{i=1, i \neq j}^l (A - a_i)^{m_i} = 0$, 但这与 $f(A) = 0$ 是 A 满足的最简代数方程相矛盾, 故方程 $f(A) = 0$ 无重根。

定理的第二部分可通过构造法证明。令 $f(A) = (A - a_j)g_j(A)$, 其中 $g_j(A) = \prod_{i=1, i \neq j}^n (A - a_i)$ 。由于本征值集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的元素两两不同, 显然有 $g_j(a_j) \neq 0$ 。另外, 对任意 $k \neq j$ 都有 $g_j(a_k) = 0$ 。现构造 $n-1$ 次多项式

$$F(A) \equiv \sum_j \frac{g_j(A)}{g_j(a_j)} - 1$$

对任意 k , 有 $F(a_k) = \sum_j \frac{g_j(a_k)}{g_j(a_j)} - 1 = \frac{g_k(a_k)}{g_k(a_k)} + \sum_{j \neq k} \frac{g_j(a_k)}{g_j(a_j)} - 1 = 0$, 即 $F(A) = 0$ 有 n 个实根。若一个 $n-1$ 次多项式有 n 个根, 则该多项式必恒为零, 即 $\sum_j \frac{g_j(A)}{g_j(a_j)} = 1$ 。将该式作用于任意态矢 $|\psi\rangle$, 得

$$|\psi\rangle = \sum_j \frac{1}{g_j(a_j)} g_j(A) |\psi\rangle$$

然而, 前面已证明若 $g_j(A)|\psi\rangle \neq 0$ 则其为 A 的本征态, 故任意态矢 $|\psi\rangle$ 都可以利用 A 的本征态展开, 即 A 的所有本征态形成完备集, A 是一个可观测量。

附录 B H_{XXZ} 在 2-磁振子布洛赫基矢态式(10)下表示矩阵(12)的推导

利用熟知的关系式 $\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y = 2(\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+)$ [这里 $\sigma_i^\pm = (\sigma_i^x \pm i\sigma_i^y)/2$], 可将 H_{XXZ} 改写为

$$H_{\text{XXZ}} = H_{\text{XX}} + H_z$$

其中

$$H_{\text{XX}} = (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+) + (\sigma_2^+ \sigma_3^- + \sigma_2^- \sigma_3^+) + (\sigma_3^+ \sigma_4^- + \sigma_3^- \sigma_4^+) + (\sigma_4^+ \sigma_1^- + \sigma_4^- \sigma_1^+)$$

$$H_z = \frac{1}{2} \Delta (\sigma_1^z \sigma_2^z + \sigma_2^z \sigma_3^z + \sigma_3^z \sigma_4^z + \sigma_4^z \sigma_1^z)$$

我们首先验证 1-磁振子布洛赫态 $|\xi(k)\rangle$ 是 H_{XXZ} 的本征态。将 H_{XX} 作用于 $|\xi(k)\rangle$ 可得(利用 $\sigma_i^+|\uparrow\rangle_i = 0$ 和 $\sigma_i^+|\downarrow\rangle_i = |\uparrow\rangle_i$)

$$\begin{aligned} & H_{\text{XX}} |\xi(k)\rangle \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1^+ \sigma_2^- |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \sigma_4^- \sigma_1^+ |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + \\ & \quad e^{ik} \sigma_1^- \sigma_2^+ |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + e^{ik} \sigma_2^- \sigma_3^+ |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + \\ & \quad e^{i2k} \sigma_2^- \sigma_3^+ |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{i2k} \sigma_3^- \sigma_4^+ |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \\ & \quad e^{i3k} \sigma_3^- \sigma_4^+ |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{i3k} \sigma_4^- \sigma_1^+ |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + e^{i4k} |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad e^{ik} |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + e^{ik} |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \\ & \quad e^{i2k} |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + e^{i2k} |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad e^{i3k} |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{-ik} |\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ &= 2\cos k |\xi(k)\rangle \end{aligned}$$

其中利用了 $e^{i4k} = 1$ 。此外, 易见有 $H_z |\xi(k)\rangle = 0$, 故 $H_{\text{XXZ}} |\xi(k)\rangle = 2\cos k |\xi(k)\rangle$, 即 $|\xi(k)\rangle$ 为 H_{XXZ} 的本征值为 $2\cos k$ 的本征态。

现在我们来推导 H_{XXZ} 在 2-磁振子空间中的表示矩阵。容易验证式(10)中的 6 个布洛赫态都是 H_z 的本征态, 其在布洛赫基的表示矩阵由式(13)给出。将 H_{XX} 作用于 $|\xi_1(k)\rangle$ 可得

$$\begin{aligned} & H_{\text{XX}} |\xi_1(k)\rangle \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_2^+ \sigma_3^- |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + \sigma_4^- \sigma_1^+ |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + \\ & \quad e^{ik} \sigma_1^- \sigma_2^+ |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{ik} \sigma_3^- \sigma_4^+ |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + \\ & \quad e^{i2k} \sigma_2^- \sigma_3^+ |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + e^{i2k} \sigma_4^- \sigma_1^+ |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \\ & \quad e^{i3k} \sigma_1^- \sigma_2^+ |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{i3k} \sigma_3^- \sigma_4^+ |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad e^{ik} |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{ik} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad e^{i2k} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{i2k} |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \\ & \quad e^{i3k} |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{i3k} |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{ik} + e^{i2k} + e^{i3k}) (|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \\ & \quad |\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle) \end{aligned}$$

上式括号中的因子仅对 $k=0$ 才不为零,于是得到

$$H_{XX}|\xi_1(0)\rangle = 2\sqrt{2}|\xi_2(0)\rangle$$

$$H_{XX}|\xi_1(-\pi, \pm\pi/2)\rangle = 0$$

可见 $|\xi_1(-\pi, \pm\pi/2)\rangle$ 都是 H_{XX} 的本征值为零的本征态。类似地可计算

$$\begin{aligned} & H_{XX}|\xi_2(k)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + e^{ik}|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{ik}|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \\ & \quad e^{ik}|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{ik}|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+e^{ik})(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

得到

$$H_{XX}|\xi_2(0)\rangle = 2\sqrt{2}|\xi_1(0)\rangle$$

$$H_{XX}|\xi_2(-\pi)\rangle = 0$$

计及所有的非零矩阵元便可得到正文中的式(11)。

参 考 文 献

- [1] DIRAC P A M. The principles of quantum mechanics[M]. 4th ed. Oxford: Oxford University Press, 1958.
 - [2] SAKURAI J J, NAPOLITANO J. Modern Quantum Mechanics[M]. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2021.
 - [3] 曾谨言. 量子力学·卷 I [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
ZENG J Y. Quantum Mechanics: Volume I [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
 - [4] ASHIDA Y, GONG Z, UEDA M. Non-Hermitian physics [J]. Advances in Physics, 2020, 69: 249.
 - [5] YANG C N, YANG C P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system[J]. Physical Review, 1966, 150: 321.
 - [6] WU N, KATSURA H, LI S W, et al. Exact solutions of few-magnon problems in the spin-S periodic XXZ chain[J]. Physical Review B, 2022, 105: 064419.
 - [7] LOU X, LI J, WU N. Evolution of two-magnon bound states in a higher-spin ferromagnetic chain with single-ion anisotropy: A complete solution[J]. Physical Review B, 2024, 110: L1004.
-
- (上接第 33 页)
- CHEN Y P, DU X N. A review of optical imaging technology[J]. Technology Outlook, 2015, 25(23): 121. (in Chinese)
- [4] 党诗沛, 李润泽, 周美玲, 等. 显微成像系统分辨率问题讨论(特邀)[J]. 红外与激光工程, 2022, 51(11): 9-16.
DANG S P, LI R Z, ZHOU M L, et al. Discussion on resolution issues of microscopic imaging systems (invited)[J]. Infrared and Laser Engineering, 2022, 51(11): 9-16. (in Chinese)
- [5] 张书赫, 邵梦, 张盛昭, 等. 傅里叶域中的光线[J]. 物理学报, 2019, 68(21): 79-87.
ZHANG S H, SHAO M, ZHANG S Z, et al. Rays in the Fourier domain[J]. Acta Physica Sinica, 2019, 68(21): 79-87. (in Chinese)
- [6] PENDRY J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(18): 3966.
- [7] 任百川, 钟兴, 金光. 采用负折射率材料提高空间望远镜分辨率的理论研究[J]. 中国光学与应用光学, 2009, 2(3): 184-189.
- REN B C, ZHONG X, JIN G. Study on negative index metamaterials for improving space telescope resolution[J]. Chinese Journal of Optics and Applied Optics, 2009, 2(3): 184-189. (in Chinese)
- [8] 许卫锴, 卢少微, 马克明, 等. 超材料在隐身领域的研究及应用进展[J]. 功能材料, 2014, 45(4): 7.
- XU W K, LU S W, MA K M, et al. Research and application progress in the field of stealth based on metamaterials [J]. Functional Materials, 2014, 45(4): 7. (in Chinese)
- [9] VALENTINE J, ZHANG S, ZENTGRAF T, et al. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index[J]. Nature, 2008, 455: 376.
- [10] BORN M, WOLF E. Principles of Optics: 60th Anniversary Edition. 7th ed [M]. Cambridge University Press, 2019.