



从波动光学到负折射透镜：透镜成像分辨率极限的理论重释与教学实践创新

陈 林 邓 明

(华中科技大学武汉光电国家研究中心, 华中科技大学光学与电子信息学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要 光学成像作为现代光学研究的核心领域, 在科学探索与工程技术中具有重要应用价值。菲涅耳衍射表明, 光学系统对点光源成像时, 受限于光的波动性和透镜的有限孔径, 会因衍射效应形成艾里斑, 其尺寸决定了瑞利衍射极限。当前本科教学普遍采用菲涅耳衍射积分分析成像分辨率, 本文基于傅里叶光学理论体系, 通过严格理论推导点光源角谱传输揭示了传统透镜成像的衍射受限本质。通过傅里叶角谱数值求解得到圆孔衍射图样强度的第一零点, 并与瑞利判据计算结果进行了对比。进一步结合负折射透镜等前沿进展, 阐明了负折射率材料成像突破传统衍射极限的物理机制。本研究不仅为光学成像理论提供了新的教学视角, 其分析方法对超分辨率成像技术研究也具有重要参考价值, 可有效衔接本科基础教学与研究生创新研究。

关键词 物理; 光学; 傅里叶光学; 负折射

FROM WAVE OPTICS TO NEGATIVE-REFRACTION LENSES: THEORETICAL REVISITATION OF IMAGING RESOLUTION LIMITS AND PEDAGOGICAL INNOVATION IN OPTICAL SCIENCE

CHEN Lin DENG Ming

(Wuhan National Laboratory for Optoelectronics & School of Optical and Electronic Information,
Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074)

Abstract Optical imaging, as a cornerstone of modern optical research, bears significant application value in both scientific exploration and engineering technologies. Fresnel diffraction theory reveals that when imaging a point source through an optical system, the interplay between light's wave nature and finite lens aperture induces diffraction effects, generating an Airy disk whose spatial extent defines the Rayleigh diffraction limit. While current undergraduate curricula predominantly utilize Fresnel diffraction integrals for imaging resolution analysis, this study adopts a Fourier optics framework to rigorously derive the angular spectrum propagation of point-source radiation, thereby fundamentally unveiling the diffraction-limited

收稿日期: 2025-03-09

基金项目: 2025 年华中科技大学教学研究项目“培养未来光电信息类新工科人才的新概念课程教学研究与实践”(2024099); 2025 年国家自然科学基金面上项目“片上复杂光场非对称转换研究”(12474382)。

通信作者: 陈林, chen.lin@mail.hust.edu.cn。

引文格式: 陈林, 邓明. 从波动光学到负折射透镜: 透镜成像分辨率极限的理论重释与教学实践创新[J]. 物理与工程, 2025, 35(5): 26-33, 42.

Cite this article: CHEN L, DENG M. From wave optics to negative-refraction lenses: Theoretical revisit of imaging resolution limits and pedagogical innovation in optical science[J]. Physics and Engineering, 2025, 35(5): 26-33, 42. (in Chinese)

nature of conventional lens systems. The first zero point of the intensity distribution in the circular aperture diffraction pattern is obtained through numerical solution based on the Fourier angular spectrum method, and the result is compared with that calculated using the Rayleigh criterion. By further integrating cutting-edge developments in negative-refraction optics, we systematically elucidate the physical principles enabling negative-index metamaterials to overcome classical diffraction constraints. This work not only establishes a novel pedagogical paradigm for optical imaging theory but also provides a critical analytical framework for super-resolution imaging research, serving as a conceptual bridge between undergraduate optics education and advanced graduate studies in photonic innovation.

Key words physics; optics; Fourier optics; negative refraction

在当今科技高速发展的背景下,光学成像系统作为现代光学的核心研究方向,其科学价值与工程意义已渗透至人类社会的各个领域。通过光波的传播、衍射与聚焦等物理过程,光学系统将物体信息精确传递至成像平面,这一基础功能使其成为医学诊断、安全监控及科学教育等领域的核心技术支撑。从揭示微观世界的显微成像到捕捉宏观动态的光学监控,从生物组织的断层扫描到纳米尺度的超分辨观测,光学成像技术不断突破人类感知的边界^[3]。

传统光学成像理论建立在菲涅耳衍射的框架之上,其研究表明:受限于光的波动性与透镜的有限孔径,点光源经光学系统成像时将产生艾里斑结构,其空间尺度所定义的瑞利判据构成了经典衍射极限的理论基石^[4]。这一物理限制不仅制约着光学系统的分辨率,更成为制约精密检测、生物医学成像等领域发展的关键瓶颈。当前本科教学普遍采用菲涅耳衍射积分分析成像分辨率,然而该公式是在傍轴条件下对傅里叶光学的近似,其准确性会受到限制。傅里叶光学是一种强大的工具,它利用傅里叶变换来分析光波的传播和变换^[5]。本文将基于傅里叶光学理论体系,通过理论推导点光源角谱传输,揭示常规折射率透镜的衍射受限本质。这种方法能够更精确地描述光波在光学系统中的传播过程,提供更准确的成像分析。这对于理解和设计高性能光学成像系统至关重要。本文还通过傅里叶方法对圆孔衍射图样进行数值求解,获得了强度第一零点位置及对应的最小分辨角。结果表明,该最小分辨角与瑞利判据所得值基本一致,从而验证了本文所提出傅里叶方法在光学成像分辨率计算中的准确性。

进一步结合负折射透镜等前沿进展^[6],本文

还将阐明负折射率材料突破传统衍射极限的物理机制。通过深入分析负折射材料在成像过程中的作用,本文旨在为光学成像技术的发展提供新的理论基础和设计指导。本研究不仅为光学成像理论提供了新的教学视角,其分析方法对超分辨成像技术研究也具有重要参考价值,可有效衔接本科基础教学与研究生创新研究,推动相关领域的学科前沿发展。

1 传统透镜

如图1所示,若将光源光场 $\phi_o(x, y)$ 分解为沿不同方向传播的平面波,则该光场的角谱 $A_o(k_x, k_y)$ 代表了不同平面波在光场中的权重。由傅里叶变换可得 $A_o(k_x, k_y)$ 为

$$A_o(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi_o(x, y) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy \quad (1)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$ 为虚数符号, k_x, k_y 为平面波分别沿 x 轴方向与 y 轴方向的波矢,它沿 z 方向的波矢为 $\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2}$ 。其中, k_0 为真空波数, n 为区域内物质折射率且为实数。光源发出的光经过距离 L_o 的传播后,角谱变化为 $A_f(k_x, k_y)$

$$A_f(k_x, k_y) = \exp \left[i \sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_o \right] A_o(k_x, k_y) \quad (2)$$

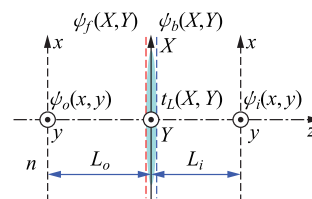


图1 光场经透镜变换示意图

该平面上的直角坐标为 (X, Y) , 光场 $\phi_f(X, Y)$ 可由傅里叶逆变换得到

$$\begin{aligned} \phi_f(X, Y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_f(k_x, k_y) \exp(ik_x X + ik_y Y) dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_f(k_x, k_y) \exp(ik_x X + ik_y Y) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (3)$$

该光场经过复振幅透过率函数为 $t_L(X, Y)$ 的透镜后, 透镜后表面的光场 $\phi_b(X, Y)$ 为

$$\phi_b(X, Y) = t_L(X, Y) \phi_f(X, Y) \quad (4)$$

其角谱 $A_b(k_x, k_y)$ 为

$$\begin{aligned} A_b(k_x, k_y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi_b(X, Y) \exp(-ik_x X - ik_y Y) dX dY \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \phi_b(X, Y) \exp(-ik_x X - ik_y Y) dX dY \end{aligned} \quad (5)$$

该光场再经过距离 L_i 的传播到达像面时, 其角谱为

$$\begin{aligned} A_i(k_x, k_y) &= A_b(k_x, k_y) \exp[i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_i] \\ &= A_b(k_x, k_y) \exp[i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_i] \end{aligned} \quad (6)$$

对应的像面光场为

$$\begin{cases} \phi_f(X, Y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_o] \exp(ik_x X + ik_y Y) dk_x dk_y \\ \phi_b(X, Y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} C \exp[-i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_i] \exp(ik_x X + ik_y Y) dk_x dk_y \end{cases} \quad (11)$$

结合式(4)可得

$$t_L(X, Y) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} C \exp[-i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_i] \exp(ik_x X + ik_y Y) dk_x dk_y}{\iint_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_o] \exp(ik_x X + ik_y Y) dk_x dk_y} \quad (12)$$

记 $\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}/k_0$, $\rho \cos \varphi = k_x/k_0$, $\rho \sin \varphi = k_y/k_0$, $k_0 R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $R \cos \theta = X$, $R \sin \theta = Y$, 在极坐

$$\begin{aligned} \phi_i(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_i(k_x, k_y) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} A_i(k_x, k_y) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (7)$$

若光源光场由位于坐标原点的点物产生, 且该透镜对该点物于像面中心成理想点像, 即

$$\begin{cases} \phi_o(x, y) = \delta(x) \delta(y) \\ \phi_i(x, y) = C \delta(x) \delta(y) \end{cases} \quad (8)$$

其中, C 为一复数常数, $\delta(x)$ 为单位冲激函数, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ 且 $\delta(x \neq 0) = 0$ 。将式(8)代入式(1)与式(7)可得

$$\begin{cases} A_o(k_x, k_y) = 1 \\ A_i(k_x, k_y) = C \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(2)与式(6)可得

$$\begin{cases} A_f(k_x, k_y) = \exp[i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_o] \\ A_b(k_x, k_y) = C \exp[-i\sqrt{(nk_0)^2 - k_x^2 - k_y^2} L_i] \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)代入式(3)与式(5)可得

标下式(12)可化为

$$t_L(X, Y) = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{+\infty} C \exp(-ik_0 \sqrt{n^2 - \rho^2} L_i) \exp[ik_0 R \rho \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\varphi}{\int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{+\infty} \exp(ik_0 \sqrt{n^2 - \rho^2} L_o) \exp[ik_0 R \rho \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\varphi} \quad (13)$$

又因为^[1]

$$\begin{aligned} J_v(k_0 R \rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp[-iv\varphi + ik_0 R \rho (\sin \varphi)] d\varphi \\ (v \in \mathbb{Z}) & \end{aligned} \quad (14)$$

其中, J_m 为 m 阶第一类贝塞尔函数。由式(14)可

得

$$J_0(k_0 R \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp[ik_0 R \rho \cos(\theta - \varphi)] d\varphi \quad (15)$$

代入式(13)可得

$$t_L(X, Y) = C \frac{\int_0^{+\infty} \exp\left[-ink_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^2} L_i\right] J_0\left(nk_0 R \frac{\rho}{n}\right) \frac{\rho}{n} d\left(\frac{\rho}{n}\right)}{\int_0^{+\infty} \exp\left[ink_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^2} L_o\right] J_0\left(nk_0 R \frac{\rho}{n}\right) \frac{\rho}{n} d\left(\frac{\rho}{n}\right)} \quad (16)$$

记

$$S_1(a, b, c) = \int_0^{+\infty} \exp(iac \sqrt{1-\rho^2}) J_0(ab\rho) \rho d\rho \quad (17)$$

其中, a, b, c 皆为正实数。则

$$t_L(X, Y) = C \frac{S_1(-nk_0, R, L_i)}{S_1(nk_0, R, L_o)} \quad (18)$$

式(17)又由三部分组成

$$S_1(a, b, c) = iS_2(a, b, c) + S_3(a, b, c) + S_4(a, b, c) \quad (19)$$

其中

$$\begin{cases} S_2(a, b, c) = \int_0^1 \sin(ac \sqrt{1-\rho^2}) J_0(ab\rho) \rho d\rho \\ S_3(a, b, c) = \int_0^1 \cos(ac \sqrt{1-\rho^2}) J_0(ab\rho) \rho d\rho \\ S_4(a, b, c) = \int_1^{+\infty} \exp(-ac \sqrt{\rho^2-1}) J_0(ab\rho) \rho d\rho \end{cases} \quad (20)$$

皆为实数。对于 $S_2(a, b, c)$, 因为下述关系式成立^[1]

$$\begin{aligned} & \int_0^a \cos(c\rho) J_0(b \sqrt{a^2-\rho^2}) d\rho \\ &= a \int_0^1 \cos(ac\rho) J_0(ab \sqrt{1-\rho^2}) d\rho \\ &= \frac{\sin(a \sqrt{b^2+c^2})}{\sqrt{b^2+c^2}} \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)两侧对 c 求偏导可得

$$\begin{aligned} & -a^2 \int_0^1 \sin(ac\rho) J_0(ab \sqrt{1-\rho^2}) \rho d\rho \\ &= \frac{\cos(a \sqrt{b^2+c^2}) ac}{b^2+c^2} - \frac{\sin(a \sqrt{b^2+c^2}) c}{(b^2+c^2)^{1.5}} \end{aligned}$$

经化简后可得

$$S_2(a, b, c) = \frac{\sin(a \sqrt{b^2+c^2}) c}{a^2 (b^2+c^2)^{1.5}} - \frac{\cos(a \sqrt{b^2+c^2}) c}{a (b^2+c^2)} \quad (22)$$

正弦与余弦函数的泰勒展开式为

$$\begin{cases} \sin\beta = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m+1}}{\Gamma(2m+2)} \\ \quad = \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m+1}}{2^{2m+1} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1.5)} \\ \cos\beta = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m}}{\Gamma(2m+1)} \\ \quad = \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m}}{2^{2m} \Gamma(m+1) \Gamma(m+0.5)} \end{cases} \quad (23)$$

其中, β 为无量纲变量

$$\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} \exp(-\beta) \beta^{m-1} d\beta \quad (\text{Re}(m) > 0) \quad (24)$$

为伽马函数^[2]。

结合式(22)与式(23)可得

$$S_2(a, b, c) = c \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m a^{2m+1} (b^2+c^2)^m}{2^{2m+2} \Gamma(m+1) \Gamma(m+2.5)} \quad (25)$$

又因为^[1]

$$\begin{aligned} J_v(\beta) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \beta^{2m+v}}{2^{2m+v} \Gamma(m+1) \Gamma(m+v+1)} \\ &(|\arg\beta| < \pi) \end{aligned} \quad (26)$$

结合式(25)与式(26)可得

$$S_2(a, b, c) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} ac \frac{J_{1.5}(a \sqrt{b^2+c^2})}{(a \sqrt{b^2+c^2})^{1.5}} \quad (27)$$

对于 $S_3(a, b, c)$ 及 $S_4(a, b, c)$, 先分别将两者转化后并合并为无穷级数之和, 再直接求解 $S_3(a, b, c) + S_4(a, b, c)$ 。对于 $S_3(a, b, c)$, 结合式(20)、式(23)、式(26)可得

$$\begin{aligned} S_3(a, b, c) &= \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (ac \sqrt{1-\rho^2})^{2m}}{2^{2m} \Gamma(m+1) \Gamma(m+0.5)} \cdot \\ & \quad \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{(-1)^M (ab\rho)^{2M}}{2^{2M} \Gamma(M+1) \Gamma(M+1)} \rho d\rho \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^{0.5\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (ac)^{2m} (\cos\beta)^{2m+1}}{2^{2m} \Gamma(m+1) \Gamma(m+0.5)} \cdot \\ & \quad \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{(-1)^M (ab)^{2M} (\sin\beta)^{2M+1}}{2^{2M} \Gamma(M+1) \Gamma(M+1)} d\beta \end{aligned} \quad (28)$$

因为下述积分成立^[2]

$$\begin{aligned} & \int_0^{0.5\pi} (\cos\beta)^m (\sin\beta)^M d\beta \\ &= \frac{\Gamma(0.5m+0.5) \Gamma(0.5M+0.5)}{2\Gamma(0.5m+0.5M+1)} \quad (m, M \geq 0) \end{aligned} \quad (29)$$

结合式(26)、式(28)、式(29)可得

$$\begin{aligned} S_3(a, b, c) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (ac)^{2m}}{2^{2m} \Gamma(m+0.5)} \cdot \\ & \quad \frac{(-1)^M (ab)^{2M}}{2^{2M} \Gamma(M+1) \Gamma(m+M+2)} \\ &= -\frac{2\sqrt{\pi}}{(ac)^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m (ac)^{2m}}{2^m (ab)^m \Gamma(m-0.5)} J_m(ab) \end{aligned} \quad (30)$$

对于 $S_4(a, b, c)$, 考虑到

$$S_4(a, b, c) = -\frac{\partial}{a \partial c} \int_1^{+\infty} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \cdot \exp(-ac \sqrt{\rho^2 - 1}) J_0(ab\rho) \rho d\rho \quad (31)$$

根据^[1]

$$\int_0^{+\infty} \exp(-a\beta - b/\beta) / \sqrt{\beta} d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-2\sqrt{ab}) \quad (32)$$

式(31)可变换为

$$S_4(a, b, c) = -\frac{\partial}{a \sqrt{\pi} \partial c} \int_0^{+\infty} \exp[\beta - 0.25(ac)^2 / \beta] / \sqrt{\beta} \left[\int_1^{+\infty} \exp(-\beta \rho^2) \rho J_0(ab\rho) d\rho \right] d\beta \quad (33)$$

记

$$S_5(a, b) = \int_1^{+\infty} \exp(-a\rho^2) \rho J_0(b\rho) d\rho \\ = 0.5 \int_1^{+\infty} \exp(-a\beta) J_0(b\sqrt{\beta}) d\beta \quad (34)$$

结合式(26)可得

$$S_5(a, b) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m b^{2m}}{2^{2m+1} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1)} \cdot \int_1^{+\infty} \exp(-a\beta) \beta^m d\beta \quad (35)$$

记

$$S_6(a, m) = \int_1^{+\infty} \exp(-a\beta) \beta^m d\beta \\ = \frac{\exp(-a)}{a} + \frac{m}{a} S_6(a, m-1) \quad (36)$$

又因为

$$S_6(a, 0) = \int_1^{+\infty} \exp(-a\beta) d\beta = \frac{\exp(-a)}{a} \quad (37)$$

结合式(36)与式(37)可得

$$S_6(a, m) = \sum_{M=0}^m \frac{\exp(-a) \Gamma(m+1)}{a^{M+1} \Gamma(m-M+1)} \quad (38)$$

将式(38)代入式(34)、并结合式(26)可得

$$S_5(a, b) \\ = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{M=0}^m \frac{(-1)^m b^{2m}}{2^{2m+1} \Gamma(m+1)} \frac{\exp(-a)}{a^{M+1} \Gamma(m-M+1)} \\ = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+M} b^{2m+2M}}{2^{2m+2M+1} \Gamma(m+M+1)} \frac{\exp(-a)}{a^{m+1} \Gamma(M+1)} \\ = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m b^m J_m(b)}{(2a)^{m+1} \exp(a)} \quad (39)$$

将式(39)代入式(33)可得

$$S_4(a, b, c) \\ = -\frac{\partial}{a \sqrt{\pi} \partial c} \int_0^{+\infty} S_5(\beta, ab) \cdot \exp[\beta - 0.25(ac)^2 / \beta] / \sqrt{\beta} d\beta \\ = -\frac{0.5 \partial}{a \sqrt{\pi} \partial c} \sum_{m=0}^{+\infty} (-0.5ab)^m J_m(ab) \cdot \int_0^{+\infty} \beta^{m-0.5} \exp[-0.25(ac)^2 \beta] d\beta \quad (40)$$

由式(24)可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-0.25(ac)^2 \beta} \beta^{m-0.5} d\beta = \frac{\Gamma(m+0.5)}{(0.5ac)^{2m+1}} \quad (41)$$

将式(41)代入式(40)可得

$$S_4(a, b, c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-2ab)^m \Gamma(m+1.5) J_m(ab)}{(ac)^{2m+2}} \quad (42)$$

由式(26)可知

$$J_m(ab) = (-1)^m J_{-m}(ab) \quad (m \in Z) \quad (43)$$

又因为伽马函数存在下列关系^[2]

$$\Gamma(m+1.5) \Gamma(-m-0.5) \\ = -(-1)^m \pi \quad (m \in Z) \quad (44)$$

式(42)可转换为

$$S_4(a, b, c) \\ = -2\sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2ab)^m J_{-m}(ab)}{(-1)^m (ac)^{2m+2} \Gamma(-m-0.5)} \\ = -\frac{2\sqrt{\pi}}{(ac)^2} \sum_{m=-\infty}^0 \frac{(-1)^m (ac)^{2m} J_m(ab)}{(2ab)^m \Gamma(m-0.5)} \quad (45)$$

结合式(30)与式(45)可得

$$S_3(a, b, c) + S_4(a, b, c) \\ = -\frac{2\sqrt{\pi}}{(ac)^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m (ac)^{2m} J_m(ab)}{(2ab)^m \Gamma(m-0.5)} \quad (46)$$

因为^[2]

$$\frac{1}{\Gamma(m)} = \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp(\beta) \beta^{-m} d\beta \quad (|\arg \beta| < \pi) \quad (47)$$

其中的积分为从负实轴无穷远处出发,逆时针绕原点一周,再回到出发点的围道积分。将式(47)代入式(46)可得

$$S_3(a, b, c) + S_4(a, b, c) \\ = \frac{i}{(ac)^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp(\beta) \beta^{0.5} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m (ac)^{2m} J_m(ab)}{(2ab)^m} d\beta \quad (48)$$

因为^[2]

$$\exp[0.5a(b-1/b)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b^m J_m(a) \quad (49)$$

结合式(48)与式(49)可得

$$\begin{aligned} & S_3(a, b, c) + S_4(a, b, c) \\ &= \frac{i}{(ac)^2 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left[\frac{b^2+c^2}{c^2}\beta - \frac{(ac)^2}{4\beta}\right] \beta^{0.5} d\beta \end{aligned} \quad (50)$$

因为^[1]

$$\begin{aligned} J_v(a) &= \frac{a^v}{i2^{v+1}\pi} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(\beta - \frac{a^2}{4\beta}\right) \beta^{-v-1} d\beta \\ &= \frac{(a/b)^v}{i2^{v+1}\pi} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(b\beta - \frac{a^2}{4b\beta}\right) \beta^{-v-1} d\beta \end{aligned} \quad (51)$$

结合式(50)与式(51)可得

$$\begin{aligned} & S_3(a, b, c) + S_4(a, b, c) \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} ac \frac{J_{-1.5}(a\sqrt{b^2+c^2})}{(a\sqrt{b^2+c^2})^{1.5}} \\ &= \frac{\cos(a\sqrt{b^2+c^2})c}{a^2(b^2+c^2)^{1.5}} + \frac{\sin(a\sqrt{b^2+c^2})c}{a(b^2+c^2)} \end{aligned} \quad (52)$$

由式(19)、式(22)、式(27)、式(52)可得

$$S_1(a, b, c) = -\frac{\exp(ia\sqrt{b^2+c^2})c}{a^2(b^2+c^2)} \left(ia - \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} \right) \quad (53)$$

将式(53)代入式(18)可得

$$\begin{aligned} & t_L(X, Y) \\ &= C \frac{L_i(R^2+L_o^2)^{1.5}}{L_o(R^2+L_i^2)^{1.5}} \frac{1+ink_o\sqrt{R^2+L_i^2}}{1-ink_o\sqrt{R^2+L_o^2}} \cdot \\ & \exp[-ink_o(\sqrt{R^2+L_i^2}+\sqrt{R^2+L_o^2})] \end{aligned} \quad (54)$$

由式(54)可知 $t_L(X, Y)$ 的幅值与相位皆需要随位置 (X, Y) 变化而变化。仅对相位进行调节的传统透镜无法实现点物成点像。

2 圆孔衍射数值解

如图 2(a) 所示, 对于圆孔衍射, 光源光场可记为

$$\psi_o(X, Y) = \begin{cases} 1 & (X^2 + Y^2 \leq D^2/4) \\ 0 & (X^2 + Y^2 > D^2/4) \end{cases} \quad (55)$$

其中, D 为圆孔直径。该光源光场的角谱为

$$\begin{aligned} A_o(k_x, k_y) &= 2\pi \int_0^{D/2} J_0(k_o R \rho) R dR \\ &= \frac{\pi D}{k_o \rho} J_1(k_o \rho D/2) \end{aligned} \quad (56)$$

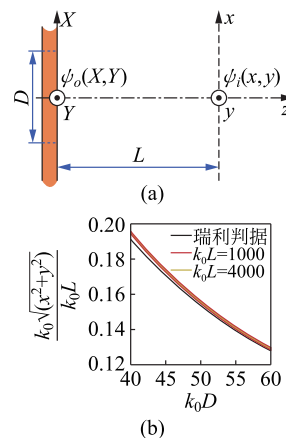


图 2

(a) 圆孔衍射示意图; (b) 最小分辨角随圆孔直径变化曲线

经过距离 L 的传播后到达像面, 其角谱为

$$A_i(k_x, k_y) = \frac{\pi D}{k_o \rho} J_1(k_o \rho D/2) \exp(ik_o L \sqrt{1-\rho^2}) \quad (57)$$

像面光场为

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y) &= \frac{k_o D}{2} \int_0^{+\infty} J_1(k_o \rho D/2) J_0(k_o \rho \sqrt{x^2+y^2}) \cdot \\ & \exp(ik_o L \sqrt{1-\rho^2}) d\rho \end{aligned} \quad (58)$$

当 $k_o L = 1000$ 或 $k_o L = 4000$ 时, 在 $40 \leq k_o D \leq 60$ 范围内, 通过 Matlab 对式(58)进行数值积分并求得其强度的第一零点 $k_o \sqrt{x^2+y^2}$ 。它所对应的最小分辨角 $\frac{k_o \sqrt{x^2+y^2}}{k_o L}$ 随 $k_o D$ 变化的曲线如图 2(b) 所示。图中还给出了瑞利判据最小分辨角所对应的曲线 $\frac{k_o \sqrt{x^2+y^2}}{k_o L} = 1.22 \frac{2\pi}{k_o D}$ 。从图 2(b) 可知, 两种方法计算得到的最小分辨角基本一致。

3 负折射透镜

如图 3 所示, 两半无限介质交界面为平面 $z=0$, $z < 0$ 一侧材料的相对介电常数与相对磁导率分别为 ϵ_1, μ_1 , $z > 0$ 一侧材料的相对介电常数与相对磁导率分别为 ϵ_2, μ_2 , 物面与像面分别位于 $z < 0$ 与 $z > 0$ 一侧的介质中且距交界面分别为 L_o, L_i 。 $\psi_o(x, y)$ 、 $\psi_f(X, Y)$ 、 $\psi_b(X, Y)$ 、 $\psi_i(x, y)$ 依次为光源光场、光源光场传播至交界面左侧时的光场、

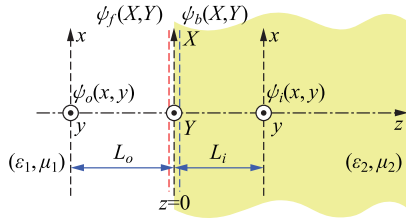


图3 光场经两半无限材料交界面变换示意图

交界面右侧光场与像面光场。对于 $z < 0$ 一侧中波矢为 (k_x, k_y, k_{z1}) 的平面波,由麦克斯韦方程组有

$$\begin{cases} ik_y E_z - ik_{z1} E_y = ik_0 \mu_1 \eta_0 H_x \\ ik_{z1} E_x - ik_x E_z = ik_0 \mu_1 \eta_0 H_y \\ ik_x E_y - ik_y E_x = ik_0 \mu_1 \eta_0 H_z \\ ik_y H_z - ik_{z1} H_y = -ik_0 \epsilon_1 E_x / \eta_0 \\ ik_{z1} H_x - ik_x H_z = -ik_0 \epsilon_1 E_y / \eta_0 \\ ik_x H_y - ik_y H_x = -ik_0 \epsilon_1 E_z / \eta_0 \end{cases} \quad (59)$$

其中, (E_x, E_y, E_z) 与 (H_x, H_y, H_z) 分别为该平面波的电场与磁场, $\eta_0 \approx 377 \Omega$ 为真空阻抗。

记

$$\begin{cases} E_z = V \\ H_z = U / \eta_0 \end{cases} \quad (60)$$

由式(59)可得电磁场切向分量为

$$\begin{cases} E_x = -\left(\frac{k_y U}{k_0 \epsilon_1} + \frac{k_{z1} k_x V}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) / \left(1 - \frac{k_{z1}^2}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) \\ E_y = \left(\frac{k_x U}{k_0 \epsilon_1} - \frac{k_{z1} k_y V}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) / \left(1 - \frac{k_{z1}^2}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) \\ H_x = \left(\frac{k_y V}{k_0 \mu_1} - \frac{k_{z1} k_x U}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) / \left(1 - \frac{k_{z1}^2}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) / \eta_0 \\ H_y = -\left(\frac{k_x V}{k_0 \mu_1} + \frac{k_{z1} k_y U}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) / \left(1 - \frac{k_{z1}^2}{k_0^2 \epsilon_1 \mu_1}\right) / \eta_0 \end{cases} \quad (61)$$

且 $k_x^2 + k_y^2 + k_{z1}^2 = \epsilon_1 \mu_1 k_0^2$ 。光源光场 $\phi_0(x, y)$ 经距离 L_0 的传播,达到交界面左侧形成光场 $\phi_f(X, Y)$, 分别以 $\begin{bmatrix} V_o \\ U_o \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} V_f \\ U_f \end{bmatrix}$ 记录它们的电磁场法向分量; $\phi_f(X, Y)$ 在交界面发生反射与透射, 分别以 $\begin{bmatrix} V_r \\ U_r \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} V_b \\ U_b \end{bmatrix}$ 记录反射电磁场与透射电磁场 $\phi_b(X, Y)$ 法向分量, (k_x, k_y, k_{z2}) 为透射平面波波矢且 $k_x^2 + k_y^2 + k_{z2}^2 = \epsilon_2 \mu_2 k_0^2$ 。由交界面处切向电磁场分量连续性可得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{k_{z1} k_x}{k_0 \mu_1} & k_y \\ -\frac{k_{z1} k_y}{k_0 \mu_1} & k_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_f \\ U_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_r \\ U_r \end{Bmatrix} \\ = \frac{\begin{bmatrix} \frac{k_{z2} k_x}{k_0 \mu_2} & k_y \\ -\frac{k_{z2} k_y}{k_0 \mu_2} & k_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_b \\ U_b \end{Bmatrix}}{k_0 \epsilon_2 [1 - k_{z2}^2 / (k_0^2 \epsilon_2 \mu_2)]} \\ \begin{bmatrix} k_y & -\frac{k_{z1} k_x}{k_0 \mu_1} \\ k_x & \frac{k_{z1} k_y}{k_0 \mu_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_f \\ U_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_r \\ U_r \end{Bmatrix} \\ = \frac{\begin{bmatrix} k_y & -\frac{k_{z2} k_x}{k_0 \mu_2} \\ k_x & \frac{k_{z2} k_y}{k_0 \mu_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_b \\ U_b \end{Bmatrix}}{k_0 \epsilon_2 [1 - k_{z2}^2 / (k_0^2 \epsilon_2 \mu_2)]} \end{cases} \quad (62)$$

消去 $\begin{bmatrix} V_f \\ U_f \end{bmatrix}$ 可得

$$\begin{bmatrix} V_b \\ U_b \end{bmatrix} = 2 \frac{\epsilon_2 [1 - k_{z2}^2 / (k_0^2 \epsilon_2 \mu_2)]}{\epsilon_1 [1 - k_{z1}^2 / (k_0^2 \epsilon_1 \mu_1)] \left(1 + \frac{\mu_1 k_{z2}}{k_{z1} \mu_2}\right)} \begin{bmatrix} V_f \\ U_f \end{bmatrix} \quad (63)$$

若 $\epsilon_1 = -\epsilon_2, \mu_1 = -\mu_2$ 且皆为正实数,则有

$$k_{z1} = -k_{z2} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} V_b \\ U_b \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} V_f \\ U_f \end{bmatrix} \quad (65)$$

对于任一垂直于 z 轴平面上的光场而言, V 与 U 分别正比于其 E_z 与 H_z 分量的角谱,由式(2)可知

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_f \\ U_f \end{bmatrix} = \exp(ik_{z1} L_o) \begin{bmatrix} V_o \\ U_o \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_i \\ U_i \end{bmatrix} = \exp(ik_{z2} L_i) \begin{bmatrix} V_b \\ U_b \end{bmatrix} \end{cases} \quad (66)$$

其中 $\begin{bmatrix} V_i \\ U_i \end{bmatrix}$ 记录了像面电磁场 $\phi_i(x, y)$ 的法向分量。结合式(64)~式(66)可得

$$\begin{bmatrix} V_i \\ U_i \end{bmatrix} = -\exp[ik_{z1}(L_o - L_i)] \begin{bmatrix} V_o \\ U_o \end{bmatrix} \quad (67)$$

当 $L_o = L_i$ 时由式(3)、式(7)可得

$$\varphi_i(x, y) = -\varphi_o(x, y) \quad (68)$$

当光源为点物时,在交界面另一侧对称位置将会产生点像,此时当 $z < 0$ 一侧材料为空气、即 $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$ 时, $z > 0$ 一侧材料应满足 $\epsilon_2 = \mu_2 = -1$ 。上述结论说明,理论上负折射透镜成像分辨率不受限制,可完美成像^[6]。

通过设置合适的负折射率材料可以使光学显微镜、天文望远镜等光学器件具有极高的分辨率^[7];另外,负值折射率使折射光线与入射光线在交界面法线同一侧,当用负折射率材料包覆物体时,可使光线仅围绕物体传播,最终以和入射光相同的状态出射,从而实现对物体的隐身^[8]。然而,迄今为止,人们尚未在自然界中发现具有负折射率的天然材料,这为实验验证上述理论带来了巨大挑战。幸运的是,研究人员已通过人工设计的方法构建出具有等效负折射率特性的材料,即负折射率超材料。例如,张翔团队通过堆叠银与氟化镁,制备出截面呈渔网状的三维超材料结构^[9]。该设计不仅使整个材料支持稳定的等离子体共振模式,还通过引入电介质层有效降低了传播过程中的能量损耗。实验表明,该超材料在工作波长范围内表现出明显的负折射率,且损耗较低。

物理光学课程在“光学成像系统的衍射和分辨本领”一节中指出成像系统的分辨率受到衍射效应的限制,基于此布置了一项以“突破瑞利衍射极限”为主题的拓展性课程作业。学生以小组为单位,使用 Ansys Lumerical FDTD 和 Matlab 软件构建负折射率超透镜模型,借助软件优化超透镜参数,从而突破衍射极限。在三个月的任务周期内,学生完成从理论调研、软件建模、仿真验证、结果分析的完整流程,最终提交课程报告。某小组采用张翔团队提出的负折射率结构,在 Ansys Lumerical FDTD 软件中构造出了负折射率材料,并且利用 Matlab 合理设计不同空间位置的超材料结构参数,构建了负折射超分辨透镜。利用 Ansys Lumerical FDTD,采用两个距离小于 $1/2$

工作波长的点光源作为入射光源对负折射超分辨透镜的超分辨衍射成像性能进行验证。仿真验证结果表明,在设计的像平面强度分布图中可以判断出该负折射超分辨透镜能够清晰地分辨出两个像点,证明该透镜具有突破传统光学成像系统分辨率极限的能力^[10]。该课程作业不仅加强了学生对衍射极限的理解,更培养了学生从理论分析到工程实现的实践能力。

4 结语

本文突破传统菲涅耳衍射积分的近似框架,基于傅里叶光学理论体系,通过严格推导点光源角谱传输过程,揭示了传统折射率透镜因有限孔径和波动性导致的衍射受限本质。研究表明,常规透镜仅调节相位而无法实现点物成点像的根本原因在于其幅值与相位分布无法同时满足理想成像条件。除此之外还通过数值计算最小分辨角,该值与瑞利判据最小分辨率角基本一致,验证了本文所提出傅里叶方法在光学成像分辨率计算中的准确性。进一步结合负折射率材料的电磁特性,理论阐明了负折射透镜重构光场角谱分布,从而突破瑞利衍射极限的物理机制。当材料参数满足 $\epsilon_2 = \mu_2 = -1$ 时,负折射透镜可实现电磁场的完美成像,为超分辨技术提供了理论支撑。本研究创新性地将傅里叶光学角谱分析法引入本科教学实践,通过严谨的数学推导与前沿案例结合,不仅深化了对衍射极限本质的理解,更搭建了基础理论与前沿光学技术(如超构透镜、超表面设计)的桥梁。研究成果不仅为光学成像理论提供了更普适的分析范式,其模块化推导过程亦可作为教学案例,助力本科生从波动光学向傅里叶光学进阶,同时为研究生探索超分辨成像技术奠定理论基础,有望推动光学学科教学与科研的协同发展。

参 考 文 献

- [1] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of Integrals, Series, and Products[M]. 8th ed. Boston: Academic Press, 2014.
- [2] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1965.
- [3] 陈玉平, 杜向楠. 光学成像技术综述[J]. 科技展望, 2015, 25(23): 121.

(下转第 42 页)

上式括号中的因子仅对 $k=0$ 才不为零,于是得到

$$H_{XX} |\xi_1(0)\rangle = 2\sqrt{2} |\xi_2(0)\rangle$$

$$H_{XX} |\xi_1(-\pi, \pm\pi/2)\rangle = 0$$

可见 $|\xi_1(-\pi, \pm\pi/2)\rangle$ 都是 H_{XX} 的本征值为零的本征态。类似地可计算

$$\begin{aligned} & H_{XX} |\xi_2(k)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + e^{ik} |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + e^{ik} |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \\ & \quad e^{ik} |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + e^{ik} |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{ik}) (|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \\ & \quad |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

得到

$$H_{XX} |\xi_2(0)\rangle = 2\sqrt{2} |\xi_1(0)\rangle$$

$$H_{XX} |\xi_2(-\pi)\rangle = 0$$

计及所有的非零矩阵元便可得到正文中的式(11)。

参 考 文 献

- [1] DIRAC P A M. The principles of quantum mechanics[M]. 4th ed. Oxford: Oxford University Press, 1958.
- [2] SAKURAI J J, NAPOLITANO J. Modern Quantum Mechanics[M]. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2021.
- [3] 曾谨言. 量子力学·卷 I [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
ZENG J Y. Quantum Mechanics: Volume I [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
- [4] ASHIDA Y, GONG Z, UEDA M. Non-Hermitian physics [J]. Advances in Physics, 2020, 69: 249.
- [5] YANG C N, YANG C P. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system[J]. Physical Review, 1966, 150: 321.
- [6] WU N, KATSURA H, LI S W, et al. Exact solutions of few-magnon problems in the spin-S periodic XXZ chain[J]. Physical Review B, 2022, 105: 064419.
- [7] LOU X, LI J, WU N. Evolution of two-magnon bound states in a higher-spin ferromagnetic chain with single-ion anisotropy: A complete solution[J]. Physical Review B, 2024, 110: L1004.
- [8] 党诗沛, 李润泽, 周美玲, 等. 显微成像系统分辨率问题讨论(特邀)[J]. 红外与激光工程, 2022, 51(11): 9-16.
DANG S P, LI R Z, ZHOU M L, et al. Discussion on resolution issues of microscopic imaging systems (invited)[J]. Infrared and Laser Engineering, 2022, 51(11): 9-16. (in Chinese)
- [9] 张书赫, 邵梦, 张盛昭, 等. 傅里叶域中的光线[J]. 物理学报, 2019, 68(21): 79-87.
ZHANG S H, SHAO M, ZHANG S Z, et al. Rays in the Fourier domain[J]. Acta Physica Sinica, 2019, 68(21): 79-87. (in Chinese)
- [6] PENDRY J B. Negative refraction makes a perfect lens[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(18): 3966.
- [7] 任百川, 钟兴, 金光. 采用负折射率材料提高空间望远镜分辨率的理论研究[J]. 中国光学与应用光学, 2009, 2(3): 184-189.
- REN B C, ZHONG X, JIN G. Study on negative index metamaterials for improving space telescope resolution[J]. Chinese Journal of Optics and Applied Optics, 2009, 2(3): 184-189. (in Chinese)
- [8] 许卫锴, 卢少微, 马克明, 等. 超材料在隐身领域的研究及应用进展[J]. 功能材料, 2014, 45(4): 7.
- XU W K, LU S W, MA K M, et al. Research and application progress in the field of stealth based on metamaterials [J]. Functional Materials, 2014, 45(4): 7. (in Chinese)
- [9] VALENTINE J, ZHANG S, ZENTGRAF T, et al. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index[J]. Nature, 2008, 455: 376.
- [10] BORN M, WOLF E. Principles of Optics: 60th Anniversary Edition. 7th ed [M]. Cambridge University Press, 2019.

(上接第 33 页)

CHEN Y P, DU X N. A review of optical imaging technology[J]. Technology Outlook, 2015, 25(23): 121. (in Chinese)