

高斯定理及原子模型的建立

罗 炜¹ 汤 睿¹ 王学进² 赵 云² 刘玉颖²(¹ 中国农业大学工学院, 北京 100083; ² 中国农业大学理学院, 北京 100083)

摘 要 在大学物理中, 高斯定理及其应用是最基本且重要的内容。本文基于高斯定理分析球对称性分布的电场, 深入探讨了具有球对称性的几种原子模型的场的特点。包括汤姆逊原子模型、卢瑟福核式模型、玻尔氢原子模型, 充分体现了高斯定理在原子物理中的具体应用。高斯定理应用于原子模型有助于分析理解和灵活运用高斯定理及量子物理相关知识, 该教学内容与方法是对大学物理教学的有益尝试和补充。

关键词 高斯定理; 电场强度; 汤姆逊原子模型; 卢瑟福核式模型; 玻尔氢原子模型

GAUSS' LAW AND FOUNDATION OF ATOMIC MODEL

LUO Wei¹ TANG Rui¹ WANG Xuejin² ZHAO Yun² LIU Yuying²(¹ College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083;² College of Science, China Agricultural University, Beijing 100083)

Abstract Gauss' law and its applications are fundamental and important content in college physics. In this paper, we analyze the electric field with spherical symmetry based on Gauss's Law, and deeply explore the characteristics of the fields of several atomic models with spherical symmetry, such as Thomson's Plum Pudding model, the Rutherford nuclear atom model, and the Bohr model of hydrogen atom, fully demonstrating the specific applications of Gauss' law in atomic physics. Applying Gauss' law to various atomic models can help us comprehensively understand and flexibly apply Gauss' law and knowledge related to quantum physics. This teaching content and approach serve as a beneficial attempt and supplement to physics education.

Key words Gauss' law; electric field strength; Thomson's Plum Pudding model; Rutherford nuclear atom model; Bohr model of hydrogen atom

高斯定理提供了一种重要的方法来表达电荷和电场的关系, 由著名的数学家高斯(C. F. Gauss)提出。高斯定理表述为: 通过任意闭合曲面 S 的电通量, 等于该闭合曲面所包围的电量除以 ϵ_0 , 而与闭合曲面 S 以外的电荷无关。高斯定理是静电学中的重要定理, 表明了闭合曲面内

的净电荷与产生的电场在该闭合曲面上的电通量积分之间的关系^[1]。电、磁、万有引力等物理规律具有数学形式上的相似性, 即满足平方反比定律, 因此高斯定理不仅可以反映电磁场的基本规律, 也可以揭示其他满足平方反比定律的物理现象所具有的规律, 如引力场的分布可类比应用高斯定

收稿日期: 2024-02-21

基金项目: 北京高等教育本科教学改革创新项目 农林专业理科强基 3+1 核心能力体系研究(202010019004)。

通信作者: 刘玉颖, 中国农业大学理学院副教授, liuyuying@cau.edu.cn。

引文格式: 罗炜, 汤睿, 王学进, 等. 高斯定理及原子模型的建立[J]. 物理与工程, 2024, 34(6): 118-123.

Cite this article: LUO W, TANG R, WANG X J, et al. Gauss' law and foundation of atomic model[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(6): 118-123. (in Chinese)

理进行分析^[2,3]。

在探索原子内部微观结构的过程中,汤姆逊(J. J. Thomson)、卢瑟福(E. Rutherford)、玻尔(N. Bohr)等科学家对原子结构进行了深入的研究,提出了历史上著名的汤姆逊原子模型、卢瑟福核式模型、玻尔氢原子模型;高斯定理不仅可以分析具有对称性的宏观连续带电体的电场分布,还可以处理原子物理等微观领域问题;本文利用高斯定理,分别探究各种原子模型不同电荷分布下电场的特点,以飨读者。

1 高斯定理与汤姆逊原子模型

1897年英国物理学家汤姆逊发现了电子并且测量了电子的荷质比 e/m ,如图1所示。1909年,美国物理学家密立根(R. A. Millikan)首次测量了电子的电量 $-e$ 。以上实验和其他许多实验结果都表明几乎所有的原子质量都集中在正电荷,而不是在电子上。原子的大小在 10^{-10}m 的数量级上,除氢原子以外的其他原子都包含多个电子。

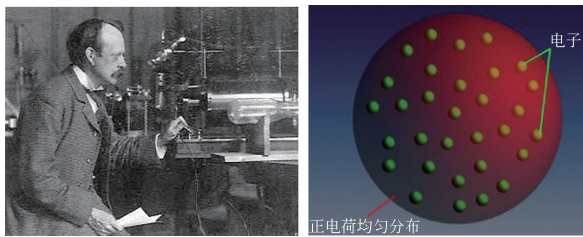


图1 汤姆逊在做实验及汤姆逊原子模型

1910年被普遍认可的原子结构模型是汤姆逊提出的“葡萄干布丁模型”,认为正电荷均匀地分布在球形原子中,带有负电荷的电子镶嵌其中。汤姆逊模型可以很好地解释线状光谱(如图2所示),如果一个原子和其他原子碰撞,例如被加热的气体,电子将要围绕其平衡位置以其固有频率振动,并且发射同频率的电磁波。如果原子受到含有多种频率的光照射,每个电子将吸收与其固有频率相同的光^[4]。

下文利用高斯定理和汤姆逊原子模型具体分析氢原子。电子质量为 m 、电量为 $-e$,可看成点电荷,正电荷可看成半径为 R 、带电量为 e 的均匀带电球体(电荷体分布)。以原子的中心为球心,在原子内部作一个半径为 r 的高斯面($r < R$),高

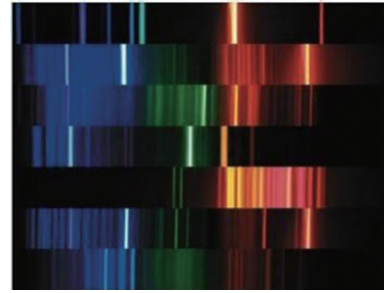


图2 各种原子的线状光谱^[4]

斯面上的电场强度大小相等,方向沿径向向外,电场强度的大小为

$$E = \frac{\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV}{\oint_S dS} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1)$$

在原子内部与原子中心距离为 r ($r < R$)处的电子所受到的电场力与电场方向反向,且总指向球心(电子的平衡位置),选沿着径向向外为正方向,则电子所受到的电场力为

$$F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (2)$$

在汤姆逊原子模型中,设电子的质量为 m ,假设正电荷对电子施加的阻力很小,若电子离开平衡位置的位移小于原子半径,则有

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0 \quad (3)$$

其中

$$\omega = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m R^3}} \quad (4)$$

由此可见,电子以原子中心为平衡位置做简谐振动,振动频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m R^3}} \quad (5)$$

在19世纪初,科学家们研究发现物质在受激或加热时会发射出特定的光谱线时,他们开始探索这些光谱的本质,其中一种光谱称为线状光谱。汤姆逊原子模型认为,这些发射光的频率与原子中电子的简谐振动频率相等。根据汤姆逊原子模型的计算公式,可以得到电子振动的频率与电子的电荷量、质量以及原子半径相关。在氢原子的光谱实验中,科学家们观察到了一个特定频率为 $4.57 \times 10^{14} \text{Hz}$ (波长为656nm)的红光。将氢原子的半径 $5.29 \times 10^{-11} \text{m}$ 代入式(5),理论计算得出

的频率为 $6.59 \times 10^{15} \text{ Hz}$ (波长为 46 nm 的紫外波), 理论计算与实验观测结果相差甚远, 表明汤姆逊原子模型存在一些不足之处, 无法完全解释氢原子的光谱特性。

2 卢瑟福对原子结构的探索

1910—1911 年, 卢瑟福和他的两个学生汉斯·盖革(Hans Geiger)、欧内斯特·马斯登(Ernest Marsden)设计实验去验证汤姆逊原子模型, 该实验就是大家熟知的 α 粒子散射实验(如图 3 所示)。实验中用一束带电粒子轰击各种材料的箔片, 观察这些箔片对粒子运动的偏转作用; 当时在还没有目前实验室常用的粒子加速器, 卢瑟福使用的是放射性元素衰变产生的 α 粒子, 20 世纪初科学家们对 α 粒子的性质认识还不完备, 但已经了解 α 粒子离开不稳定原子核的速度为 10^7 m/s , 带正电荷, 可以在空气中穿行几厘米, 或者在固体物质中穿行 0.1 mm 左右^[4]。

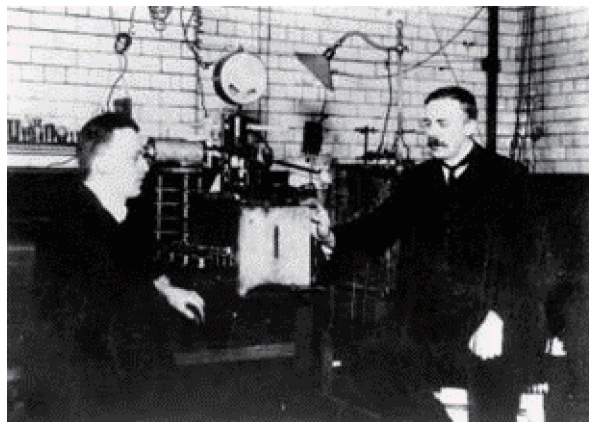


图 3 卢瑟福和学生盖革在做实验

一束 α 粒子穿过金属箔片(例如金箔、银箔、铜箔)后, 打到涂有硫化锌的屏上, 产生一道闪光, 卢瑟福和他的学生记录各种偏转角度的闪光数目。 α 粒子从金箔中穿过, 现分析在原子内部, α 粒子与电子和正电荷的相互作用; 因为原子呈中性, 所以 α 粒子在原子外部感受到的静电力很小, α 粒子的质量是电子的 7300 倍, 所以根据动量定理, 电子对 α 粒子的偏转作用可忽略; 任何偏转均源自正电荷对 α 粒子的作用。

在汤姆逊原子模型中, 正电荷和电子均匀分布在原子内, 原子内部的电场与距原子中心的距离

成正比, 对进入原子内部的 α 粒子作用力很弱, 如果只考虑原子内正电荷的影响, 计算得到在金原子表面处的电场强度大小仅为 $3.76 \times 10^{12} \text{ V/m}$, 最大的偏转角在几度之内[如图 4(a)所示], 但卢瑟福的实验结果与汤姆逊原子模型的理论计算结果有着巨大的不同。一些 α 粒子以很大的角度被散射[如图 4(b)所示]。卢瑟福后来写道:“这真是在我的一生中遇到的最不可思议的事情; 就好像你发射了一颗 15 英寸的炮弹, 它打到一张纸上居然反弹回来打你。”

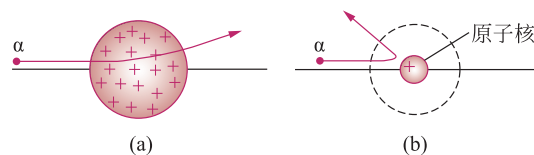


图 4 α 粒子偏转情况示意图

(a) 汤姆逊原子模型; (b) 卢瑟福的实验结果

显然汤姆逊原子模型是不对的, 需要构建新的原子结构模型, 假设正电荷不是均匀分布在半径为 10^{-10} m 的体积内, 而是集中在非常小的体积内, 此时正电荷会产生非常强的电场, 大角度散射才会发生, 在卢瑟福的 α 粒子散射实验中, α 粒子有大约 $1/8000$ 的概率偏转角超过 90° 。卢瑟福的 α 粒子散射实验不仅否定了汤姆逊的原子结构模型, 也说明“在物质的原子中应该聚集有巨大的电力^[5]”; 卢瑟福将集中的正电荷称为原子核, 他计算了各种散射角度的 α 粒子数目, 理论计算得出原子核半径为 10^{-14} m , 利用该数值估算原子核表面处的电场强度的数量级为 10^{21} V/m 。经过缜密的思考, 卢瑟福于 1911 年提出了原子核式模型; 原子核只占据了原子体积的 10^{-12} , 但其集中了所有的正电荷和 99.95% 的原子的质量, 电子围绕着原子核旋转。

下文利用高斯定理对卢瑟福核式模型进行探究。设靶原子的半径为 R , 靶原子内的正电荷电量为 $+Q$, 且正电荷集中在原子中心一个半径为 R_0 的极小球形空间(即原子核)内。以原子的中心为球心, 建立一个半径为 r 的高斯面($r > R_0$), 电场强度具有中心对称性, 方向沿径向向外, 高斯面上电场强度的大小为

$$E = \frac{\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV}{\oint_S dS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6)$$

α 粒子所带的正电荷为 q , 当 α 粒子从无穷远处运动到该高斯面时, 电场力所做功为

$$W = \int_{+\infty}^r qE dr = \int_{+\infty}^r \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

当 $r=R$ (取靶原子半径 $R=1.74 \times 10^{-10} \text{ m}$) 时, $W=-2.09 \times 10^{-16} \text{ J}$, 相比于 α 粒子的初动能 $E_k=5 \text{ MeV}=8 \times 10^{-13} \text{ J}$, 电场力所做的功可以忽略不计。因此可简化为在原子内部 ($R=1.74 \times 10^{-10} \text{ m}$) 分析 α 粒子与原子核的相互作用; 该电场具有中心对称性, 分析任意一个过球心的剖面即可, 将三维问题转化为二维问题, 从而进一步方便探究 (如图 5 所示)。

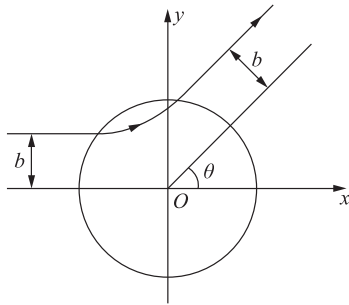


图 5 α 粒子散射示意图

设 α 粒子质量为 m , 入射该电场时的初速度为 v , 入射方向与电场球心的垂直距离 (即瞄准距离) 为 b , 根据卢瑟福散射公式^[6,7], 推导 α 粒子的偏转角。过程如下。

库仑力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \mathbf{n} = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8)$$

所以

$$r^2 = \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \quad (9)$$

由于 α 粒子所受到的电场力为有心力, 力心为球形电场的球心, 电场力对球心的力矩恒为 0, 除了该有心力之外 α 粒子不受其他外力, 因此 α 粒子对球心角动量守恒

$$mr^2 \cdot \frac{d(\pi - \theta)}{dt} = b \times m v_0 \quad (10)$$

所以

$$mr^2 \cdot \frac{d(\pi - \theta)}{dt} = m \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \cdot \frac{d(\pi - \theta)}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d(\pi - \theta)}{d\mathbf{v}} \\ &= b \times m v_0 \end{aligned} \quad (11)$$

即

$$d\mathbf{v} = \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 b \times m v_0} d(\pi - \theta) \quad (12)$$

由于球形电场的空间对称性, 当 α 粒子离开球形电场时的速度大小等于入射速度, 离开时速度垂直于入射方向的分量为

$$v_y = v_0 \sin \theta \quad (13)$$

$$dv_y = v_0 \cos \theta d\theta \quad (14)$$

$$\begin{aligned} dv_y &= d\mathbf{v} \cdot \sin \theta \\ &= \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 b \times m v_0} d(\pi - \theta) \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (15)$$

所以

$$v_0 \cos \theta d\theta = \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 b \times m v_0} \sin \theta d(\pi - \theta) \quad (16)$$

对式(16)等号两端分别积分得

$$\int_0^\theta v_0 \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi-\theta} \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 b \times m v_0} \sin \theta d(\pi - \theta) \quad (17)$$

解得

$$v_0 \sin \theta = \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 b \times m v_0} \cdot (1 + \cos \theta) \quad (18)$$

进行三角恒等变换得到

$$\begin{aligned} v_0 \cdot 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ = \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 b \times m v_0} \cdot 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

即

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{Qq \cdot \mathbf{n}}{4\pi\epsilon_0 b \times m v_0^2} \\ \theta &= 2 \tan^{-1}\left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 b}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

令 $\theta = \pi/2$, 解得 $b = 2.27 \times 10^{-14} \text{ m}$, 在卢瑟福散射实验中, α 粒子有大约 1/8000 的概率偏转角超过 90° , 这意味着只有很少一部分 α 粒子会与金原子核发生较强的相互作用, 发生大角度散射。因此可以近似地用瞄准距离 b 除以 1/8000, 估算出金原子半径为 $1.82 \times 10^{-10} \text{ m}$, 与查得的金原子半径 $1.74 \times 10^{-10} \text{ m}$ 也较为接近。在进行模型简化时未计入金原子中电子的影响, 而且 1/8000 不是特别精确的实验值, 因此在误差允许范围内可以利用高斯定理以及相关分析验证卢瑟福核式模

型的正确性。

3 玻尔氢原子模型

卢瑟福核式模型成功地解释了 α 粒子散射实验现象,却无法解释原子的稳定性,按照经典电磁学理论,加速运动的电荷(振动或旋转)要向外辐射电磁波,电子围绕原子核做轨道运动,始终具有向心加速度,所以电子持续向外辐射能量,随着向外辐射能量,电子轨道越来越小,最终电子将在一瞬间落到原子核上^[8]。原子会变得不稳定,并且发射出连续光谱(如图 6 所示)。然而,我们实际观察到的是线状光谱,表明电子在特定的能级上稳定存在。卢瑟福核式模型虽然能够解释 α 粒子散射实验中的现象,但无法解释原子的稳定性和观察到的线状光谱。

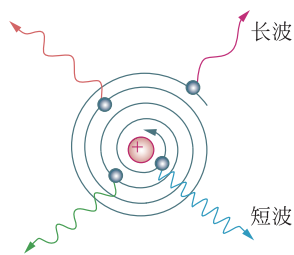


图 6 原子不稳定发出连续光谱

为了解决卢瑟福核式模型的局限性,玻尔提出了新的原子结构模型,即原子定态假说,能量辐射量子化、轨道角动量量子化。

下文以氢原子为例,利用高斯定理对玻尔原子结构模型进行探究。如图 7 所示,一个氢原子由一个带正电荷 $+Q = +1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 的质子和一个带负电荷 $-Q = -1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 的电子构成。质子的体积远小于整个氢原子的体积,质子可看作位于氢原子中心的点电荷。基态电子的运动使负电荷形成球对称分布电子云,氢原子基

态(1s)波函数为: $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$ [9]。

则氢原子基态电子云电荷体密度为

$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \quad (21)$$

其中, $a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 为玻尔半径。

以质子所在位置为球心,建立一个半径为 r 的高斯面,高斯面内的负电荷总量为

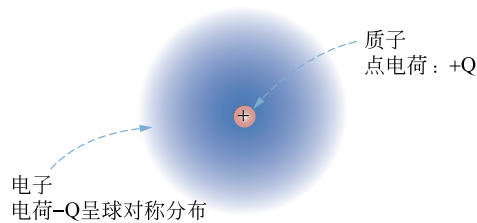


图 7 玻尔原子结构模型

$$\begin{aligned} -q &= \int_0^r -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{2Qr^2}{a_0^2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + \frac{2Qr}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} + Q e^{-\frac{2r}{a_0}} - Q \end{aligned} \quad (22)$$

高斯面内正负电荷的代数和

$$\begin{aligned} \sum Q &= -q + Q \\ &= \frac{2Qr^2}{a_0^2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + \frac{2Qr}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} + Q e^{-\frac{2r}{a_0}} \end{aligned} \quad (23)$$

电场强度具有中心对称性,方向沿径向向外,半径为 r 的高斯面上由质子和电子产生的总的电场强度 E 的大小为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{\sum Q}{\oint_S dS} \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a_0^2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a_0 r} e^{-\frac{2r}{a_0}} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \end{aligned} \quad (24)$$

仅由质子引起的电场强度大小 E' 为

$$E' = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\oint_S dS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (25)$$

所以,总的电场强度 E 的大小和仅由质子引起的电场强度大小 E' 之比为

$$\frac{E}{E'} = e^{-\frac{2r}{a_0}} \left(\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1 \right) \quad (26)$$

通过分析式(26),总的电场强度 E 和仅由质子引起的电场强度 E' 之比与距原子核中心的距离 r 的关系,由此帮助理解玻尔的氢原子模型中球形电子云电场的特点。

为了更透彻地理解 E/E' 与 r 的关系,现绘制 E/E' 与 r 的图像(如图 8 所示),发现当距原子核中心的距离 r 很小(原子核表面附近)时,比值 E/E' 接近于 1,即 $E \approx E'$,此时电子云的影响相对较小,质子的正电荷对电场分布起主导作用。随着距原子核中心的距离 r 的增大,负电荷对电场

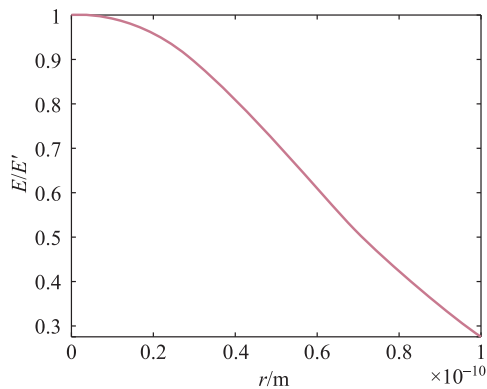


图8 E/E' 与距原子核中心的距离 r 的关系图线

分布产生愈加显著的影响,比值 E/E' 逐渐减小,电子云的存在导致总的电场强度 E 相对于仅由质子引起的电场强度 E' 变得更弱。当距离 r 趋近于 10^{-10}m 时,电子云对总的电场强度起主导作用,质子的电场强度相对较小。

4 结语

本文重点探究了高斯定理在几种重要的原子模型中的具体应用,利用高斯定理具体分析了汤姆逊模型中原子内部的电场,卢瑟福模型中 α 粒子的偏转角度与电场及原子核半径的对应关系,以及玻尔的氢原子模型中球形电子云情况下电场的特点;高斯定理对于处理原子物理等微观领域的问题也具有很好的应用价值。本文拓展了高斯定理的应用,有助于更好地理解和灵活运用高斯定理和量子物理相关知识。

参 考 文 献

- [1] 赵凯华,陈熙谋. 新概念物理教程 电磁学[M]. 北京:高等教育出版社,2006: 1-8.
ZHAO K H, CHEN X M. New conceptual physics course;

Electromagnetism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006: 1-8. (in Chinese)

- [2] 周国全,黄华玲. 类比法研究万有引力场的高斯定理[J]. 物理与工程,2019,29(S1):22-25.
ZHOU G Q, HUANG H L. Studying Gauss' theorem about universal gravitation field and its applications with analogue method[J]. Physics and Engineering, 2019, 29(S1): 22-25. (in Chinese)
- [3] 廖德含,杨兴,鲁同所,等. 利用引力场的高斯定理推算地球内部压强[J]. 大学物理,2020,39(8):35-38,42.
LIAO S H, YANG X, LU T S, et al. Calculating the pressure in the earth's interior by using Gauss theorem of gravitational field[J]. College Physics, 2020, 39(8):35-38, 42. (in Chinese)
- [4] HUGH D. YOUNG, Roger A. Freedman. University Physics with modern physics[M]. 15th ed. Britain, 2020: 767-772,1315-1317.
- [5] 曹肇基. 卢瑟福散射与原子的有核模型[J]. 大学物理, 1999(12):34-36.
CAO Z J. Rutherford scattering and the nuclear model of atom[J]. College Physics, 1999(12): 34-36. (in Chinese)
- [6] 李曦坤. 卢瑟福散射公式的几何证明方法[J]. 大学物理, 2009, 28(1): 52-53.
LI X K. Geometrical deduction on the Rutherford scattering formula[J]. College Physics, 2009, 28(1): 52-53. (in Chinese)
- [7] 尹建武. 卢瑟福散射公式的几种推导方法[J]. 黄冈师范学院学报, 2003(3): 31-34.
YIN J W. The methods of deriving the Rutherford scattering formula[J]. Journal of Huanggang Normal University, 2003(3): 31-34. (in Chinese)
- [8] 马文蔚. 物理学[M]. 6版. 北京:高等教育出版社,2019:345-347.
MA W W. Physics[M]. 6th Edition. Beijing: Higher Education Press, 2019: 345-347. (in Chinese)
- [9] SERWAY R A, JEWETT J W. Physics for scientists and engineers with Modern Physics (Eighth Edition)[M]. Boston: Cengage Learning, Inc., 2009: 1263-1264.