

小球脱离光滑半球面时间的分析和讨论

杨海彬¹ 麻银峰¹ 段清扬² 陈 聪¹

(¹ 海军工程大学基础部, 湖北 武汉 430033; ² 海军工程大学电气工程学院, 湖北 武汉 430033)

摘 要 本文主要处理小球滑落光滑半球面的时间问题。小球的运动学方程以及滑落时间可以借助 Python 的数值计算功能和可视化技术求解牛顿第二定律得到数值的结果, 也可以运用功能原理直接解析得到滑落时间; 结果表明数值计算和解析解完全等价。对于小球而言, 半球顶点是不稳定平衡位置, 当小球受到微扰, 初始位置偏离半球顶点或小球从顶点缓慢下滑, 小球滑落球面时的速度和位置都趋于定值, 但是随着微扰的增强滑落时间以指数的速度减小, 是因为小球在球面上所受的和外力是非线性的。

关键词 光滑半球面, 数值解, 无量纲化, 滑落时间

ANALYSIS AND DISCUSSION ON THE TIME FOR A SMALL BALL TO DETACH FROM A SMOOTH HEMISPHERE

YANG Haibin¹ MA Yinfeng¹ DUAN Qingyang² CHEN Cong¹

(¹ Department of Basic Courses, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033;

² School of Electrical Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033)

Abstract This paper primarily addresses the time of a small ball sliding off a smooth hemispherical surface. The kinematic equations and sliding time of the ball are obtained through Newton's second law with Python's numerical and visualization associate. At the same time, the sliding time can be directly derived analytically using the work-energy principle. The results show that the numerical calculations and analytical solutions are completely equivalent. For the ball, the top of the hemisphere is an unstable equilibrium position. When the ball is subjected to a slight perturbation, whether the initial position deviates from the top of the hemisphere or the ball slowly slides down from the top, the velocity and position of the ball when it slides down the surface tend towards constant values. However, as the perturbation increases, the sliding time decreases exponentially, which is due to the non-linear nature of the net external force acting on the ball on the hemispherical surface.

Key words smooth hemisphere surface; numerical solution; dimensionless; sliding time

收稿日期: 2024-05-14

基金项目: 2021 年湖北省高等学校省级教学研究项目(2021481); 2023 年海军工程大学教学改革项目; 2024 年度海军工程大学教学成果立项培育项目(NUE2024TA27); 2024 年度海军工程大学指令性课题研究项目(NUE2024AP17)。

作者简介: 杨海彬, 海军工程大学基础部副教授, 8895660@qq.com。

通信作者: 麻银峰, 海军工程大学基础部讲师, mayin@hnu.edu.cn。

引文格式: 杨海彬, 麻银峰, 段清扬, 等. 小球脱离光滑半球面时间的分析和讨论[J]. 物理与工程, 2024, 34(6): 97-100, 105.

Cite this article: YANG H B, MA Y F, DUAN Q Y, et al. Analysis and discussion on the time for a small ball to detach from a smooth hemisphere[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(6): 97-100, 105. (in Chinese)

小球在半球面上的运动是《大学物理》-力学中的一个经典问题^[1], 先前的文献对这个问题进行了一些讨论, 但是关注的主要是小球在何处脱离球面和摩擦力对下落过程的影响^[2-5], 但是在这些研究中大家都没有考虑半球顶点附近初始条件对于滑落过程的影响。本文从研究小球滑落半球面的时间出发, 通过功能原理得到滑落时间的解析解, 也可以借助 Python 数值求解牛顿第二定律得到运动方程和滑落时间的数值解, 结果表明半球顶点是一个不稳定平衡位置; 当小球受到微扰, 偏离顶点位置或从顶点处缓慢下滑时, 小球滑落的位置和速度趋于恒定值, 并且滑落时间为有限值且随着扰动的增强而减小。因为球面上的小球所受和外力是非线性的, 初始条件的微小改变就会导致滑落时间的重大差异。

1 功能原理

如图 1 所示, 小球质量为 m , 半径为 r , 半球的半径为 $R \gg r$, 重力加速度为 g , 小球受到的球面支撑力为 N , 小球位置和竖直方向的夹角为 θ 时, 运动速度为 v 。

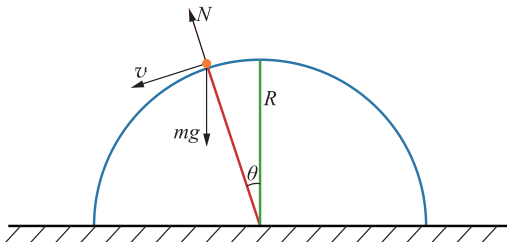


图 1 小球在光滑半球面上的运动示意图

小球在球面上下滑 ds 重力做功:

$$dA = mg \sin\theta ds = mg \sin\theta R d\theta \quad (1)$$

假设小球从 θ_0 处出发, 且速度为 v_0 , 到达 θ 处, 重力做功为 A , 速度为 v , 运用动能定理可以得到

$$\begin{aligned} A &= \int_{\theta_0}^{\theta} dA = mgR(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned} \quad (2)$$

小球下滑到 θ 处的速率为

$$v = \sqrt{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta) + v_0^2} \quad (3)$$

下滑的时间 T 为

$$\begin{aligned} T &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ds}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R d\theta}{v} \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R d\theta}{\sqrt{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta) + v_0^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

对于小球滑落球面时, 位置夹角为 θ_n , 速度为 v_n , 此时球面对小球的支撑力 $N=0$, 可以得到

$$mg \cos\theta_n = m \frac{v_n^2}{R} \quad (5)$$

联立(3)(5)两式可以得到滑落球面时的夹角 θ_n 和速度 v_n 分别为

$$\begin{aligned} \theta_n &= \arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0 + \frac{v_0^2}{3gR}\right) \\ v_n &= \sqrt{\frac{2gR}{3}\cos\theta_0 + \frac{v_0^2}{3}} \end{aligned} \quad (6)$$

代入式(4)得到滑落时间 T

$$T = t(\theta_n) - t(\theta_0) \quad (7)$$

其中, $t(\theta)$ 为

$$t(\theta) = \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{2}{\chi}} E_1\left(\frac{\theta}{2}, -\frac{2}{\chi}\right) \quad (8)$$

这里 $\chi = \cos\theta_0 - 1 + v_0^2/2gR$, $E_1(x, m)$ 是第一类椭圆积分^[6]。

当 $\theta_0 \rightarrow 0$, $v_0 \rightarrow 0$ 时, 小球滑落球面时的夹角 θ_n 、速度 v_n 和初始条件的关系式(6)可以展开为

$$\begin{aligned} \theta_n &\approx \theta_m + \frac{\sqrt{5}\theta_0^2}{5} - \frac{\sqrt{5}v_0^2}{5gR} \\ v_n &\approx v_m \left(1 - \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{v_0^2}{4gR}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\theta_m = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$, $v_m = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$ 。这表明小球滑落球面时的速度 $v_n \approx v_m$ 、夹角 $\theta_n \approx \theta_m$ 为恒定值。

当初始条件满足 $v_0 = \sqrt{2gR(1 - \cos\theta_0)}$ 时, 代入式(4)中, 滑落时间 T 为

$$\begin{aligned} T &= \int_{\theta_0}^{\theta_n} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{R}{g}} \ln \frac{\tan(\theta_n/4)}{\tan(\theta_0/4)} \end{aligned} \quad (10)$$

当小球趋于半球面的顶点时 $\theta_0 \rightarrow 0$, 此时小球的初速度 $v_0 = \sqrt{2gR(1 - \cos\theta_0)} \approx \sqrt{gR}\theta_0$, 滑落时间式(10)中 $\tan(\theta_0/4) \approx \theta_0/4$, $\ln \tan(\theta_n/4) \approx -1.54448$, 此时小球滑落时间 T 为

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(\ln \frac{4}{\theta_0} - 1.54448 \right) \quad (11)$$

因此滑落时间 T 随着初始位置趋于顶点而对数发散, 即 $T = \infty$, 说明顶点位置对于静止的小球是一个不稳定的平衡位置。

小球受到微扰, 当 $\theta_0 \neq 0, v_0 = 0$, 即小球的初始位置偏离半球顶点, 或从顶点缓慢下滑, $\theta_0 = 0, v_0 \neq 0$, 由式(9)可以得到这两类情况中式(7)中滑落时的位置相同 $\theta_n \approx \theta_m$, 初始条件对应的 $\chi \sim v_0^2 / 2gR(-\theta_0^2/2)$ 均正比于初始值的平方项, 因此两种情况下小球滑落时间 T 接近, 如图 2 所示。图中曲线表示小球滑落时间 $t_m = T/\sqrt{R/g}$ 随初始条件的变化。图中实线 $t_m(\theta_0)$ 和虚线 $t_m(v_0)$ 分别表示运用功能原理处理两类微扰得到的解析结果式(7), 而浅色点 $t_m(\theta_0)$ 和深色点 $t_m(v_0)$ 分别对应于图 3、图 4 中的数值计算的结果, 两者十分吻合。

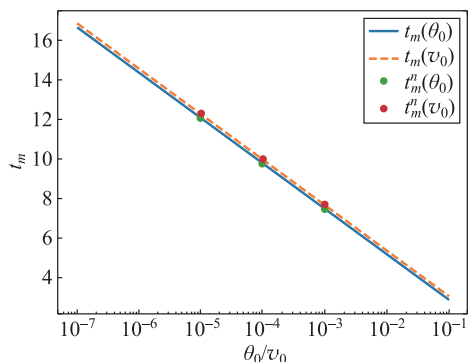


图 2 小球脱离半球面的时间 t_m 和初始条件的关系
实线为初始位置偏离顶点 θ_0 的滑落时间曲线, 虚线为顶点处初速度 v_0 对于滑落时间的影响, 浅色点和深色点为相应初始条件下数值求解运动方程的结果。随着小球越来越靠近顶点, 滑落时间不断增加

2 数值求解牛顿第二定律

对小球受力分析, 可知

$$\begin{aligned} mg \sin\theta &= ma_\tau = m \frac{dv}{dt} \\ mg \cos\theta - N &= ma_n = m \frac{v^2}{R} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, a_τ, a_n 分别为切向、法向加速度, 小球脱离球面时 $N=0$, 所用时间为 T 。对速度和时间做如下变换:

$$\begin{aligned} v &= v' v_m \\ t &= t' \sqrt{\frac{R}{g}} \end{aligned} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 可以得到无量纲化的速度 v' 和位置 θ , 下文为了简便省略',

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{3}} v \\ v^2 &\leq \frac{3}{2} \cos\theta \end{aligned} \quad (14)$$

其中, 第一行是小球切向加速度, 第二行是自然坐标系中小球速度和位移的关系, 第三行是小球在球面滑动时 $N>0$, 小球速度的约束条件。我们采用欧拉迭代法求解式(14), 选取时间间隔为 $\Delta t = 10^{-4}$, 在 $t = i\Delta t (i=0, 1, 2, 3, \dots)$ 时刻, 小球的速度 v_i 和位置夹角为 θ_i :

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta_i \Delta t \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \sqrt{\frac{2}{3}} v_i \Delta t \\ v_i^2 &\leq \frac{3}{2} \cos\theta_i \end{aligned} \quad (15)$$

欧拉迭代法的精度为 $\mathcal{O}(\Delta t)$, 为了提高数值计算的精度可以选择减小时间间隔, 或用 4 阶龙格-库塔法 $[\mathcal{O}(\Delta t^4)]$ 求解式(15)。其中, 小球滑落的时间为 $t_m = i_{\max} \Delta t, i = i_{\max} + 1, v_i^2 > 1.5 \cos\theta_i$ 。其中, v_0, θ_0 分别为初始时的速度和位置角度。

小球从半球顶点处无初速度滑下时, $v_0 = 0, \theta_0 = 0$ 。小球的速度 v 恒为零, 路程 s 也恒为零, 这说明小球静止不动, 半球顶点是小球的平衡位置。

小球受到微扰, 初始位置偏离顶点处, 假设此时夹角为 $\theta_0 = 10^{-n}$, 下落过程中的速度 v 和角度 θ 随时间的变化如图 3 所示。由图 3 可知, 微小的偏移都会导致小球开始运动, 因此半球顶点是小球的一个不稳定平衡点; 对于不同的微小偏移量 θ_0 , 小球脱离球面时的速度 $v = v_m$, 位置夹角 $\theta = \theta_m$, 这也验证了功能原理中的式(9), 与之前的研究结果一致^[3-5]。当 $n=3, 4, 5$ 时, 滑落时间分别为 $t_m = 7.443, 9.745, 12.0479$, 可以发现初始位置微小的差异, 下落时间就会有很大的差异, 同时越靠近顶点, 下落时间越长。

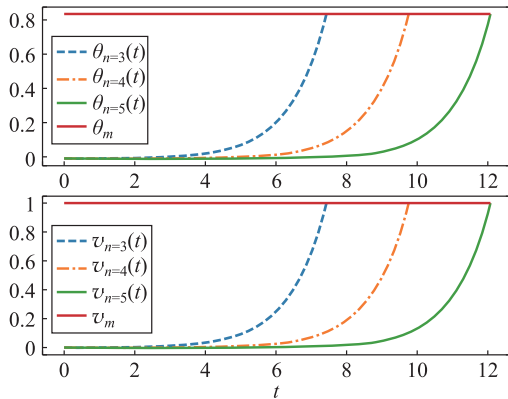


图3 数值计算结果(一)

小球受到微扰, 偏离半球的顶点处, 小球开始下滑。当偏离的角度 $\theta_0 = 10^{-n}$ 时, $t_m = 7.443(n=3), 9.745(n=4), 12.0479(n=5)$, 随着小球越来越靠近顶点, 滑落时间不断增加

当小球从顶点缓慢下滑时, 对于初速度为 $v_0 = 10^{-n}$, 此时下落过程中的速度 v 和角度 θ 随时间的变化如图4所示。由图4可知, 微小初速度也会导致小球开始滑落; 对于不同的初速度 v_0 , 小球脱离球面时的速度 $v = v_m$, 夹角 $\theta = \theta_m$, 与偏离顶点出发的结果一样, 再次印证了功能原理中的式(9), 也说明了两种微扰对于小球滑落时间是等效的。当 $n = 3, 4, 5$ 时, 滑落时间分别为 $t_m = 7.649, 9.952, 12.2567$, 与偏角的情况一样, 初速度的微小差异, 滑落时间就会有很大差异, 同时随着速度减小, 滑落时间增加, 速度趋于零, 时间无限长。

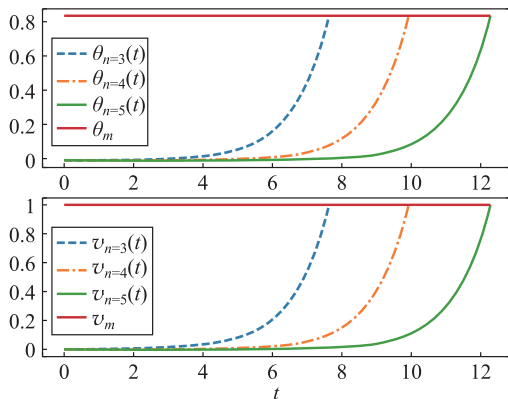


图4 数值计算结果(二)

小球从顶点处缓慢滑落, 初速度 $v_0 = 10^{-n}$ 时, $t_m = 7.649(n=3), 9.952(n=4), 12.2567(n=5)$, 随着小球初速度减小, 滑落时间不断增加

通过数值求解牛顿第二定律可以得到小球的

运动方程和滑落时间, 对运动方程可视化后我们发现小球滑落球面的位置和速度是恒定的, 如图3、图4中的水平线段所示, 进而可以印证功能原理中的式(9)。这也充分说明了牛顿定律和功能原理的等价性。

3 结论

半球顶点作为一个平衡点, 小球在此位置的和外力为零, 数值求解牛顿定律发现静止的小球速度始终为零, 而功能原理得到滑落时间为无穷大。两者从不同的方面印证了惯性定律。

小球受到微扰, 偏离平衡位置或平衡位置时的初速度不为零, 滑落时间是有限值, 且随着微扰的增大而减小, 如图3、图4所示, 而功能原理中得到的式(7), 积分收敛。微扰下, 小球滑落球面时的速度 $v \approx v_m$, 夹角 $\theta \approx \theta_m$, 和先前的研究结果一致。有微小偏角时 $\chi = -\theta_0^2/2$ 和微小速度时 $\chi = v_0^2/2gR$, 滑落时间近似相等, 说明了两种微扰对于小球运动是等效的。对于数值求解牛顿定理得到的时间和功能原理求得的解析结果, 两者完全一致, 如图2所示。

小球所受的和外力 $mg \sin \theta$ 是非线性的, 从而导致小球的运动方程 $R d^2 \theta / dt^2 - g \sin \theta = 0$ 的解严格依赖初始条件的选取^[7]。我们发现, 对于小球初始条件的微小改变 $\theta_0 = 10^{-n}$ 或 $v_0 = 10^{-n}$, 就会造成滑落时间的差异, 如图2所示。

通过分析小球的滑落时间, 我们发现数值求解牛顿第二定律和功能原理的解析解, 两者完全等价。这说明了数值计算可以作为物理学研究的重要方法和手段。

参 考 文 献

- [1] 康颖. 大学物理[M]. 北京: 科学出版社, 2019: 27-67.
KANG Y. College physics [M]. Beijing: Science Press, 2019: 27-67.
- [2] 廖斌, 陈善群, 卜洋, 等. 匀质滑块沿粗糙球面滑动问题的动力学解析[J]. 西安文理学院学报: 自然科学版, 2023(2): 7-10.
LIAO B, CHEN S Q, PO Y, et al. Dynamic analysis of sliding problem of homogeneous slider along rough spherical surface[J]. Journal of Xi'an University of Arts and Sciences: Natural Science Edition, 2023(2): 7-10. (in Chinese)

(下转第 105 页)

养的目标,“有心瞄准、无意击发”,有意栽花、无心插柳。

第四,要注重发挥团队优势。注重分工合作、优势互补,相互砥砺、共同提高。理论课教师,要发挥理论功底扎实,善于理性思考的优势,着重解决实验需要的理论问题;实验课教师,要发挥动手能力强,操作规范,熟悉仪器设备性能的优势,带领学生开阔实验思路,创新方式方法,解决实验中遇到的问题;领衔(参与)项目研究的教师(如我校等离子体、凝聚态物理)要发挥专业特长,引领学生紧跟时代前沿,围绕科研子项目进行针对性研究。

4 结语

就全局而言,开展竞赛活动的根本目的是促进教学水平提升、促进创新型人才的选拔与培养,竞赛只是一个平台、一种形式、一种鞭策,开放性题目研究是实现目标的良好载体。

通过开放性实验(研究探索),能在物质某种运动规律上有新发现(新观点,理论建树)当然最好;能找到或发现某个过程(路径、方法、条件…)与现象、结果相应的关系,或者建构某种解决问题的新思路、新技术(新方法),就很了不起;能制作出某种(个)实用的新工具,或对原有工具进行新

的开发和提升,也是非常有意义、有价值的。

面对激烈竞争的发展环境,培养适应新时代国家现代化建设的新型人才,必须把创新能力培养放在首要位置。要抓住学生参加物理实验竞赛(创新)的良好机遇,明确方向、理清思路,积极进取,大力促进实验教学改革和质量提升,并以此促进学生科技素养和创新能力提升。我们将不断努力、继续前行。

参 考 文 献

(上接第 100 页)

- [3] 邹兆贵. 对质点沿光滑半球面从顶端无初速度下滑问题的探讨[J]. 物理教学, 2019(2): 62-64.
ZOU Z G. Discussion on the problem of particles sliding down from the top without initial velocity along a smooth hemisphere[J]. Physics Teaching, 2019(2): 62-64. (in Chinese)
- [4] 刘梅, 杨玉超, 冯霞云. 物体从球面顶点下滑问题的研究[J]. 物理通报, 2012(2): 87-89.
LIU M, YANG Y C, FENG X Y. Research on the problem of objects sliding down from spherical vertices[J]. Physics Bulletin, 2012(2): 87-89. (in Chinese)
- [5] 杨以刚, 郭锦泉, 吕立国. 对物体在非光滑球面上的滑动的讨论[J]. 长春师范学院学报: 自然科学版, 2009(4): 19-21.

- [1] 教育部高等学校大学物理课程教学指导委员会. 理工科类大学物理课程教学基本要求 理工科类大学物理实验课程教学基本要求(2023年版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.
Teaching Guidance Committee for College Physics Courses in Higher Education Institutions of the Ministry of Education. Basic requirements for teaching physics courses in science and engineering universities (2023 Edition)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2023.
- [2] 张映辉. 大学物理实验[M]. 2版. 北京: 机械工业出版社, 2017.
ZHANG Y H. Experiment of physics[M]. 2nd ed. Beijing: Machinery Industry Press, 2017.
- [3] 张映辉. 大学物理实验学习指导书[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2021.
ZHANG Y H. University physics experiments study instruction[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2021.
- [6] YANG Y G, GUO J Q, LYU L G. Discussion on the sliding of objects on non smooth spheres[J]. Journal of Changchun Normal University: Natural Science Edition, 2009(4): 19-21. (in Chinese)
- [6] 王竹溪, 郭致仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2012: 395-403.
WANG Z X, GUO Z R. Introduction to special functions[M]. Beijing: Peking University Press, 2012: 395-403. (in Chinese)
- [7] Kathleen Alligood, Tim Sauer, James A. Yorke. Chaos: An introduction to dynamical systems[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1997, 105: 135.