

螺丝钉沿斜坡下滑时振幅增大现象的力学分析

龚凡准^{1,2} 侯吉旋¹ 黎秋航¹ 陈 诚¹

(¹ 东南大学物理学院, 江苏 南京 211189; ² 东南大学吴健雄学院, 江苏 南京 211189)

摘 要 本文从动力学角度, 对 2023 年国际青年物理学家锦标赛的第 9 题“摆动螺丝(Oscillating Screw)”进行了理论分析和实验探究。该问题描述了在斜坡上释放一个螺丝钉, 螺丝钉沿着斜坡向下运动时可能会产生越来越大的振荡。本文通过下滑过程中的受力分析解释了振荡振幅增大的原因, 并通过实验进行验证。另外, 本文还利用仿真软件通过模拟仿真探究了不同参数对该运动的影响。

关键词 螺丝钉; 振荡增大; 理论力学

MECHANICAL ANALYSIS OF THE PHENOMENON OF AMPLITUDE INCREASE WHEN SCREWS SLIDE DOWN A SLOPE

GONG Fanzhun^{1,2} HOU Jixuan¹ LI Qiuhang¹ CHEN Cheng¹

(¹ School of Physics, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189;

² School of Chien-Shiung WU, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 211189)

Abstract This paper presents a theoretical analysis and experimental exploration of the 9th problem, “Oscillating Screw,” in the 2023 International Young Physicists’ Tournament (IYPT) from a dynamic perspective. The problem describes the release of a screw on a slope, which may generate increasing oscillations as it moves down the slope. In this paper, the reason for the increase in oscillation amplitude is explained through force analysis during the sliding process and verifies it through experiments. In addition, simulation software is used to explore the effects of different parameters on the motion through simulation.

Key words screw; growing oscillation; theoretical mechanics

在 2023 年国际青物理学家锦标赛(IYPT2023)的第 9 题中描述了一个现象, 题目的中文翻译如下: “当把一个螺丝放在斜坡上并松开时, 它沿着斜坡向下运动时可能会产生越来越大的振荡。研究螺丝的运动, 以及这些振荡的增长所依赖的相关参数。”

本文研究的螺丝钉为圆头螺丝钉, 螺丝钉运动时可能出现两种运动状态: 纯滚动或边滚边滑。为了简化分析, 基于实验观测, 本文认为仅在刚释放时可能出现纯滚动现象, 一旦开始滑动, 便不会

再出现纯滚动。本文将螺丝钉与斜坡均视为刚体, 它们之间的接触为点接触; 滑动摩擦力大小不随相对滑动速度改变, 且最大静摩擦力与滑动摩擦力相等。

1 理论模型

将一螺丝钉置于斜面上, 设螺丝钉重量为 m , 斜面与地面的夹角为 φ 。如图 1 所示, 螺丝钉与斜面有两个接触点 A 点与 B 点, 其绕螺丝钉中轴

收稿日期: 2023-09-06

基金项目: 东南大学教学改革研究与实践项目(青年资助课题 29; 面上项目课题 72)。

通信作者: 黎秋航, 东南大学物理学院工程师, 125033853@qq.com。

引文格式: 龚凡准, 侯吉旋, 黎秋航, 等. 螺丝钉沿斜坡下滑时振幅增大现象的力学分析[J]. 物理与工程, 2024, 34(6): 57-62.

Cite this article: GONG F Z, HOU J X, LI Q H, et al. Mechanical analysis of the phenomenon of amplitude increase when screws slide down a slope[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(6): 57-62. (in Chinese)

线旋转半径分别为 r_A 和 r_B , 尽管在转动过程中, A 点可能由于螺纹在螺丝钉杆上分布不均, 导致 r_A 的数值发生变化, 但经过测量, 本文实验中所使用的螺丝钉螺纹间距较小, 在旋转时 r_A 大小的变化可以忽略不计。取螺丝钉中轴线的延长线在斜面的交点为原点 O , 质心在斜面上的投影为 M 点, O 点到 A, M, B 的距离分别为 R_1, R 以及 R_2 。

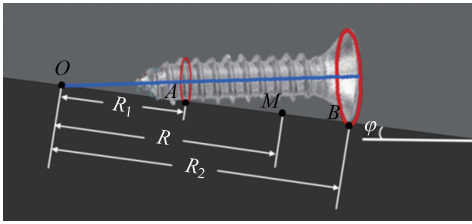


图1 螺丝钉与斜面侧视图

螺丝钉与斜面在垂直于斜面方向的俯视如图2所示, 取斜面为 xOy 平面, 螺丝钉杆为 y 轴, 垂直于螺丝钉杆的轴为 x 轴。设 y 轴与斜面上坡度最大的方向的夹角为 θ 。

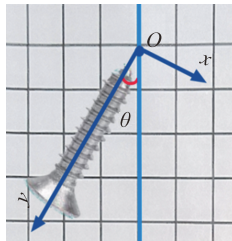


图2 螺丝钉与斜面俯视图

1.1 纯滚动

当螺丝钉在斜面上做纯滚动运动时, 从螺丝钉中轴线来看, 螺丝钉绕其中轴做转动, 从垂直于斜面的俯视角度来看, 为绕 O 点的圆周运动。此处将前者称为自转, 后者称为公转。设自转、公转的角速度分别为 ω_s 和 ω , 转动惯量分别为 J 和 J' 。不难得出, 自转与公转成正比例关系, 该比例与螺丝钉几何参数有关。设此比例系数为 k , 可得如下关系式

$$k = \frac{\omega_s}{\omega} = \frac{R_1}{r_A} = \frac{R_2}{r_B} \quad (1)$$

设螺丝钉沿斜面向下的重力分力为 $F = mg \sin \phi$, 设 A, B 两点处摩擦力分别为 f_1, f_2 , 将其正交分解为 $f_{1x}, f_{1y}, f_{2x}, f_{2y}$, 由此在 x 方向上可以得到如下动力学公式

$$F \sin \theta - (f_{1x} + f_{2x}) = mR\alpha \quad (2)$$

$$F \sin \theta \cdot R - (f_{1x}R_1 + f_{2x}R_2) = J'\alpha \quad (3)$$

$$f_{1x}r_A + f_{2x}r_B = J\alpha_s \quad (4)$$

其中, α 为角加速度 (不带下标的旋转参数默认为公转参数)。联立式(1)和式(4)可得

$$f_{1x}R_1 + f_{2x}R_2 = k^2 J \alpha \quad (5)$$

将式(5)代入式(3), 可得

$$\alpha = \frac{FR}{k^2 J + J'} \sin \theta \quad (6)$$

由式(6)可以看出, 该运动方程与单摆运动方程相同, 可以得出其小角度运动时周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 J + J'}{FR}} \quad (7)$$

当给出初始角度 θ_0 时, 可以得出螺丝钉任意夹角处的角速度

$$\omega^2 = \frac{2FR}{k^2 J + J'} (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (8)$$

现讨论满足纯滚动的条件: 在 x 方向上, 摩擦力需要满足式(3)和式(4); y 方向上需要满足摩擦力大于重力分力与向心力。由此可以得出纯滚动的条件如下

$$f_{1\max}R_1 + f_{2\max}R_2 \geq \frac{k^2 J}{k^2 J + J'} FR \sin \theta \quad (9)$$

$$f_{1y} + f_{2y} \geq mR\omega^2 + F \cos \theta \quad (10)$$

其中, $f_{1\max}, f_{2\max}$ 为 A, B 两点处的最大摩擦力。对于 x 方向的条件, 由于认为两个接触点的最大静摩擦力为定值, 且在纯滚动时, θ 不会比 θ_0 更大, 当 $\theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 只需代入 $\theta = \theta_0$ 判断即可; 当不

满足式(9)时, 螺丝钉将会在 x 方向开始滑动; 而满足式(9)时, 在滚动一定角度后, 有可能在 y 方向发生滑动, 而在 y 方向上需要做复杂判断, 具体判断方法将在 3.1 节介绍。

1.2 边滚边滑

当螺丝钉处于边滚边滑的状态时, 做以下两条假设:

(1) 螺丝钉不会再回到滚动状态;

(2) 接触点的滑动摩擦力大小为定值, 方向与相对运动方向相反。

在该运动状态下, 螺丝钉的自转与公转失去其在纯滚动状态下的比例关系, 因此只需分析公转即可。为了便于分析与计算, 该运动状态采用质心系。

如图3所示, 设螺丝钉两接触点距离为 L , 质

心投影 M 距离 A, B 两点距离分别为 L_1, L_2 。由此可以得出 A, B 两点支持力分别为

$$F_{N1} = \frac{L_2}{L} m g \cos \varphi = \frac{L_2}{L} F \cot \varphi \quad (11)$$

$$F_{N2} = \frac{L_1}{L} m g \cos \varphi = \frac{L_1}{L} F \cot \varphi \quad (12)$$

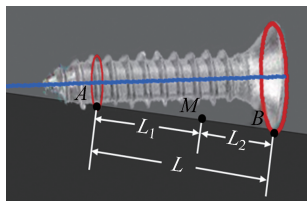


图3 螺丝钉侧视图(质心系)

设质心处速度为 v , 并将其正交分解为 v_x, v_y , 见图4。而 A, B 两点的速度分别为 v_1, v_2 , 由此可得两接触点的速度如下

$$v_{1x} = v_x - \omega L_1 \quad (13)$$

$$v_{2x} = v_x + \omega L_2 \quad (14)$$

$$v_{1y} = v_{2y} = v_y \quad (15)$$

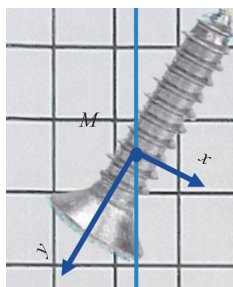


图4 螺丝钉侧视图(质心系)

设 A, B 两点的摩擦系数分别为 μ_1, μ_2 , 可得摩擦力公式如下

$$f_{1x} = -\mu_1 F_{N1} \frac{v_{1x}}{|v_1|} \quad (16)$$

$$f_{2x} = -\mu_2 F_{N2} \frac{v_{2x}}{|v_2|} \quad (17)$$

$$f_{1y} = -\mu_1 F_{N1} \frac{v_y}{|v_1|} \quad (18)$$

$$f_{2y} = -\mu_2 F_{N2} \frac{v_y}{|v_2|} \quad (19)$$

若螺丝钉绕质心轴公转的转动惯量为 J_0 , 质心加速度为 a , 可得如下三条运动学方程

$$J_0 \alpha = f_{2x} \cdot L_2 - f_{1x} \cdot L_1 \quad (20)$$

$$m a_x = -F \sin \theta + f_{1x} + f_{2x} \quad (21)$$

$$m a_y = -F \cos \theta + f_{1y} + f_{2y} \quad (22)$$

至此, 所有运动学分析已经完毕, 接下来将根据实验对振荡增大现象进行解释。

2 实验

2.1 实验装置

图5为实验装置, 由可调节倾角的斜坡和方格纸构成。斜坡用于探究斜面倾角对运动的影响, 方格纸用于在使用 Tracker 软件追踪时定位。

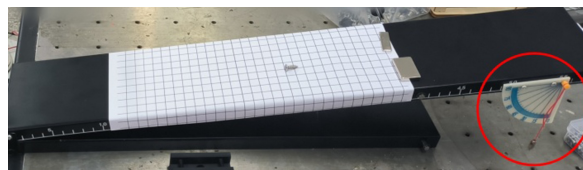


图5 实验装置

图6为实验所用的螺丝钉, 其参数如表1所示。



图6 螺丝钉

表1 螺丝钉的参数

参数	数值
m	0.92g
r_A	1.8mm
r_B	3.5mm
R_1	9.5mm
R	14.0mm
R_2	19.0mm
k	5.43

2.2 螺丝钉转动惯量的测量

对于绕螺丝钉杆的自转转动惯量 J , 采用近似算法。经测量, 将螺丝钉视为如图7所示的几何体。螺丝钉可分为圆锥、圆柱、圆台三部分, 由于其材质均匀, 计算体积后可将总质量均匀分配, 用轴对称几何体的转动惯量公式即可得出自转转动惯量 J 。

在1.1节提到, 螺丝钉做纯滚动时, 将呈现周期性的单摆运动。调整斜坡倾角, 使螺丝钉可以做纯滚动, 测量周期以及其他参数, 结合上文求出

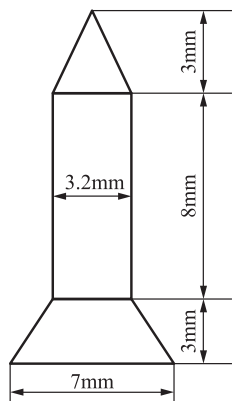


图7 螺丝钉模型图

的自转转动惯量 J , 由式(7)可以得出公转转动惯量 J' 。而绕质心轴的自转转动惯量 J_0 可以由如下公式得到

$$J_0 = J' - mR^2 \quad (23)$$

按上述方法得出的转动惯量如表2所示。

表2 转动惯量大小

参数	数值/(kg · m ²)
J	2.26×10^{-9}
J'	2.20×10^{-7}
J_0	3.92×10^{-8}

2.3 摩擦系数的测量

本文认为两个接触点摩擦系数不相同, 但要测量尺寸较小的螺丝钉与斜面两个接触点的摩擦系数, 需要采取如下特殊方法。

(1) 调整斜面倾角为 φ_1 , 使得螺丝钉受轻扰后恰好可以匀速下滑, 得到

$$\mu_1 F_{N1} + \mu_2 F_{N2} = mg \sin \varphi_1 \quad (24)$$

(2) 将一小磁片贴于螺丝钉底部, 测出新的质心位置, 如图8所示。



图8 磁片贴于螺丝钉底部

根据式(11)和式(12), 重新计算出 F'_{N1} 、 F'_{N2} , 并重新调整斜面倾角为 φ_2 , 得到

$$\mu_1 F'_{N1} + \mu_2 F'_{N2} = mg \sin \varphi_2 \quad (25)$$

联立式(24)和式(25), 即可计算出 μ_1 、 μ_2 , 相关实验数据如表3所示。

表3 摩擦系数测量

参数	数值
φ_1	13°
φ_2	11°
μ_1	0.35
μ_2	0.12

2.4 运动中振荡增大

在正式实验中, 将斜坡倾角设置为 17° , 该角度下可以观察到较为明显的振荡增大现象。实验中分别以大(75°)、中(50°)、小(20°)三种初始摆角 θ_0 进行释放, 通过 Tracker 软件对运动轨迹进行标记, 经过处理后的数据如图9所示。从图10中可以观察到, 在仅改变初始角度的情况下, 初始角度越大, 振荡增大现象越明显。

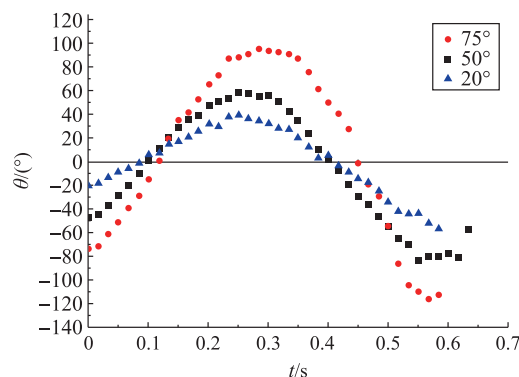


图9 不同初始摆角下螺丝钉的公转角度与时间的关系

3 代码仿真

由于运动参数测量较为困难, 且不同螺丝钉有多种不同参数, 无法通过修改特定参数进行探究。为了探究影响螺丝钉运动的参数, 本文对运动过程进行代码仿真。

3.1 纯滚动的仿真

在1.1节中提到对于 y 方向纯滚动条件的判断, 这里进行详细展开。首先需要计算出 $f_y = f_{1y} + f_{2y}$ 的条件。由于考虑纯滚动, 本文先考虑其必须满足的 x 方向摩擦力, 从而得出如下条件

$$f_y \leq \sqrt{f_{1\max}^2 - f_{1x}^2} + \sqrt{f_{2\max}^2 - f_{2x}^2} \quad (26)$$

根据式(2)、式(3)和式(5), 计算出 x 方向摩擦力如下

$$f_{1x} = \frac{F}{R_2 - R_1} \left[R_2 - \frac{k^2 J R + m R^2 R_2}{k^2 J + J'} \right] \sin \theta \quad (27)$$

$$f_{2x} = \frac{F}{R_2 - R_1} \left[\frac{k^2 J R + m R^2 R_1}{k^2 J + J'} - R_1 \right] \sin \theta \quad (28)$$

式(27)和式(28)在小于最大静摩擦力时才成立,然而 A, B 两点并不一定同时达到最大静摩擦力,若某一点超过了最大静摩擦力,并不一定马上开始滑动;而另一点若未达到最大静摩擦力,摩擦力会在式(27)或式(28)的基础上增大,弥补力矩,使其满足纯滚条件,因此需要分类讨论。

(1) 仅有 f_1 达到最大静摩擦力,则

$$f_{1\max} R_1 + f_{2x} R_2 = \frac{k^2 J}{k^2 J + J'} F R \sin \theta \quad (29)$$

且

$$f_y \leq \sqrt{f_{2\max}^2 - f_{2x}^2} \quad (30)$$

(2) 仅有 f_2 达到最大静摩擦力,那么

$$f_{1x} R_1 + f_{2\max} R_2 = \frac{k^2 J}{k^2 J + J'} F R \sin \theta \quad (31)$$

且

$$f_y \leq \sqrt{f_{1\max}^2 - f_{1x}^2} \quad (32)$$

在此基础上,根据初始参数,对角度设计逐差算法,每次循环令角度减少一个微小量 $\Delta\theta$,每次循环更新角速度 ω 等参数,根据上述条件判断其是否可以做纯滚动运动,算法流程如图 10 所示。

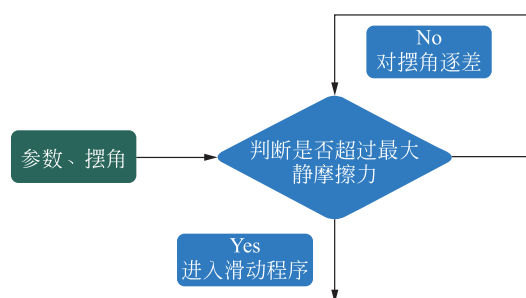


图 10 纯滚动算法流程图

3.2 边滚边滑的仿真

当纯滚动算法判定为会产生滑动后,进入边滚边滑的算法模块。

将开始滑动作为时间零点,每次循环时间增加一个微小量 $\Delta t = 0.01s$,进行迭代。每次迭代都套用式(20)、式(21)和式(22),从而得出任一时刻螺丝钉的公转角度。

3.3 仿真与实验的对比以及误差分析

通过算法,将实验测得参数输入,得出图像后与实验的图像进行对比,如图 11 所示。由图 11 可知拟合程度较好,但在振荡幅度上存在一定误

差,造成此误差最大的因素是摩擦系数测量不够精确,其次由于计算机精度有限,随着迭代次数增加,准确度也会下降。

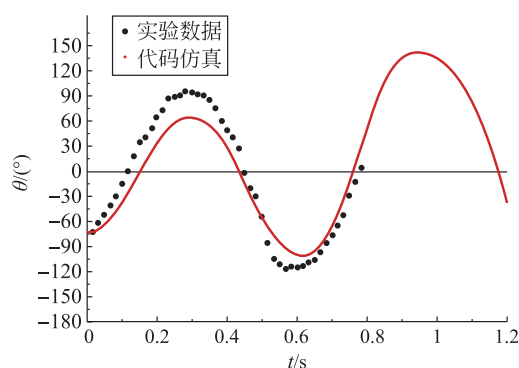


图 11 实验与仿真对比

4 影响运动的参数振荡增大的物理解释

一个只受重力和斜面支持力与摩擦力的物体,会出现振荡增大这种不稳定的运动是极为有趣的现象,本节将对这种现象进行物理解释。

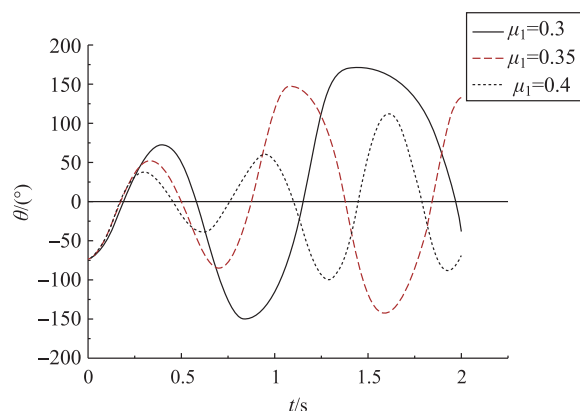
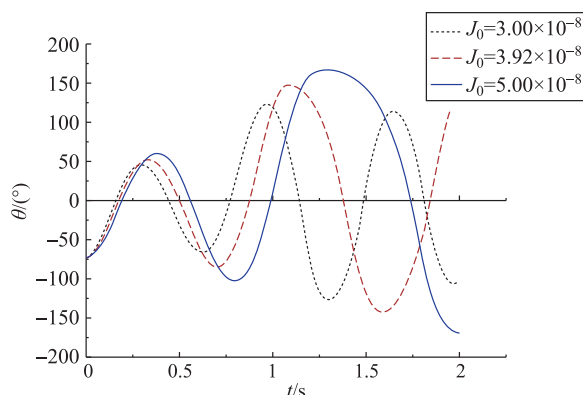
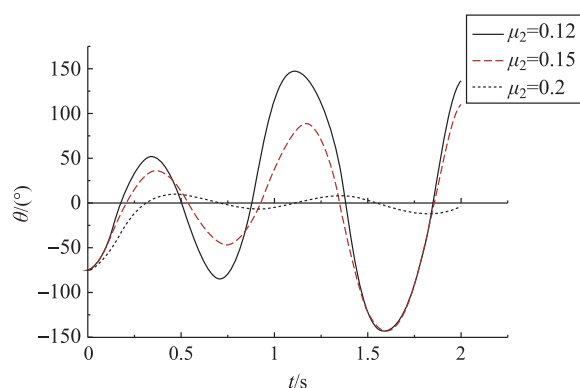
在前文分析中提到,在摩擦力足够大时,螺丝钉做稳定的单摆运动,而产生滑动后才会出现振荡增大的现象,原因是摩擦力的性质发生了变化。纯滚动状态下,摩擦力随螺丝钉转动角度变化,构成一个稳定的系统。然而开始滑动后,摩擦力被两个接触点的相对运动方向决定,此时该系统受到的摩擦力是一个大小固定,但方向不定的力,在螺丝钉受重力分力摆动时,摩擦力不能提供一个稳定的反作用力,制约螺丝钉的摆动,从而导致螺丝钉振荡增大,系统失去稳定性。

5 影响运动的参数

5.1 摩擦系数 μ_1 和 μ_2

从前文分析中可推测,摩擦力越小,螺丝钉越容易滑动,系统就越不稳定,越容易产生振荡增大的现象。当然,过小的摩擦力会导致螺丝钉下滑速度过快,在斜面长度较短的情况下不易观察到振荡增大现象。在仿真代码中设置不同的摩擦系数 μ_1 和 μ_2 ,仿真结果如图 12 和图 13 所示。

实际实验中,可通过适当增大斜面坡度,增加斜面光滑度等方式减小摩擦,从而更容易实现振荡增大。

图 12 $\mu_2=0.12$ 时,不同 μ_1 对比图 14 不同 J_0 对比图 13 $\mu_1=0.35$ 时,不同 μ_2 对比

5.2 转动惯量 J_0

螺丝钉的转动惯量 J_0 与螺丝钉质量和螺丝钉尺寸有直接关系,在实际情况下,螺丝钉质量与螺丝钉尺寸和材质相关,较难实现单一变量的改变。在采用仿真的情况下便于进行研究,在螺丝钉质量不变的情况下,其公转的转动惯量越大,摩擦力对其制约能力越弱,越容易产生更大的振荡。同时由式(7)可知,转动惯量越大,一个周期也就越长。在仿真代码中设置不同的转动惯量 J_0 ,仿真结果如图 14 所示。

5.3 螺丝钉的几何参数

螺丝钉质量不变的情况下,其几何参数的改变最终影响转动惯量以及质心位置。转动惯量的影响在 5.2 节已经加以说明。而质心位置决定了两个接触点的支持力大小,最终改变了摩擦力,与 5.1 节类似,因此不再赘述。结合螺丝钉的实际形状尺寸,可以总结为:螺丝钉长度相对较短、钉头直径相对较大、螺丝加工精细摩擦较小的螺丝

钉容易实现振荡增大现象。螺纹间距在实验中并不影响摩擦力,对转动惯量的影响也可忽略,因此对振荡是否增大并无显著影响。

6 结语

本文通过动力学分析、代码仿真途径探究了螺丝钉在斜面下滑振荡幅度增大的现象,并结合仿真讨论了摩擦系数、转动惯量和螺丝钉几何参数对该运动模式的影响。通过分析将多种影响因素进行整合,将最主要的影响因素确定为摩擦系数和转动惯量,不同螺丝钉的几何参数最终造成摩擦系数和转动惯量的不同,从而引起振荡现象不同。本文提出的算法可以对螺丝钉的运动进行拟合,但是由于参数测量不准确会引起误差,并且随着迭代次数增加,计算精度引起的误差会累积增大。

参 考 文 献

- [1] 陆果. 基础物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.
LU G. Fundamental physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1997. (in Chinese)
- [2] 姚干和. 刚体滚动中静摩擦力方向的直观判断方法与其做功问题[J]. 大学物理, 1985, 1(2): 23-24.
YAO G H. Direction-determining method of the static friction in a rotating rigid body problem and its relevant mechanical work problem[J]. College Physics, 1985, 1(2): 23-24. (in Chinese)
- [3] 卢国生. 保持滚动无滑动的条件[J]. 大学物理, 1983, 1(9): 17-22.
LU G S. The condition for keeping rolling without sliding [J]. College Physics, 1983, 1(9): 17-22. (in Chinese)