

物理光学教学中引入广义斯涅耳定律和菲涅耳公式的尝试

陈 林^{1,2} 邓 明^{1,2} 张大伟³

(¹ 华中科技大学武汉光电国家研究中心, 湖北 武汉 430074;

² 华中科技大学光学与电子信息学院, 湖北 武汉 430074;

³ 上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

摘 要 光学是物理学的重要分支学科,是高校物理类、光学工程类及光电信息类等专业的必修基础课程。斯涅耳定律和菲涅耳公式是光学教学的重要知识点,但是近期研究发现非均匀界面存在异常折反射现象,传统的斯涅耳定律不再适用。虽然研究者采用费马原理推导了广义斯涅耳定律,可计算非均匀分界面的折反射角度,但是用于计算折反射系数的广义菲涅耳公式尚未进行探索。本文利用麦克斯韦方程和边界条件,推导出广义斯涅耳定律和菲涅耳公式,同时适用于均匀界面/非均匀界面的折反射角度关系的描述以及折反射效率的计算,推导的理论公式与仿真结果一致,证明了广义斯涅耳定律和菲涅耳公式的正确性。本文为高校光学教学内容的创新提供一种有益尝试。

关键词 物理;光学;斯涅耳定律;菲涅耳公式;折反射

ATTEMPT TO INTRODUCE GENERALIZED SNELL'S LAW AND FRESNEL'S FORMULAS IN PHYSICAL OPTICS TEACHING

CHEN Lin^{1,2} DENG Ming^{1,2} ZHANG Dawei³

(¹ Wuhan National Laboratory for Optoelectronics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074;

² School of Optical and Electronic Information, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074;

³ College of Optoelectronic Information and Computer Engineering, Shanghai University of Technology, Shanghai 200093)

Abstract Optics is an important branch of physics and a required foundational course for students majoring in physics, optical engineering, and optoelectronics, among others. Snell's law and Fresnel's formulas are crucial topics in optical teaching, but recent research has revealed anomalous reflection and refraction phenomena at non-uniform interfaces, rendering traditional Snell's law obsolete. While researchers have derived the generalized Snell's law using Fermat's principle to calculate reflection and refraction angles at non-uniform interfaces, the generalized Fresnel formula for calculating the reflection coefficients has remained unexplored. In this paper, we derive the generalized Snell's law and Fresnel's formulas using

收稿日期: 2023-11-05

基金项目: 2020 年湖北省高等学校省级教学研究项目“光电专业递进式、系统化科研训练培养方法改革与实践研究”(2020097);2021 年国家自然科学基金面上项目“基于双曲色散超材料慢光效应的宽频二次谐波增强研究”(12074137);2022 年国家重点研发计划“可重构光接触阵列研制及多通道调控研究”(2021YFB2801903)。

通信作者: 陈林,华中科技大学武汉光电国家研究中心、光学与电子信息学院教授,chen.lin@mail.hust.edu.cn。

引文格式: 陈林,邓明,张大伟. 物理光学教学中引入广义斯涅耳定律和菲涅耳公式的尝试[J]. 物理与工程,2024,34(6):32-41,50.

Cite this article: CHEN L, DENG M, ZHANG D W. Attempt to introduce generalized Snell's law and Fresnel's formulas in physical optics teaching[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(6): 32-41, 50. (in Chinese)

Maxwell's equations and boundary conditions, providing a comprehensive framework for describing the relationships between reflection and refraction angles at both uniform and non-uniform interfaces, as well as calculating the efficiency of reflection and refraction. The theoretical formulas derived align with simulation results, confirming the correctness of the generalized Snell's law and Fresnel's formulas. This work presents a valuable attempt at innovating the teaching content of optics in universities.

Key words physics; optics; Snell's law; Fresnel's formulas; reflection and refraction

光学是高校物理类、光学工程类及光电信息类等专业的必修基础课程。虽然经过了几百年的发展,光学的发展依然方兴未艾。2023年诺贝尔物理学奖颁发给为阿秒激光研究作出突出贡献的光学科学家。从2012年至今有5届诺贝尔物理学奖获奖内容主要涉及光学基础及应用研究。21世纪光学的蓬勃发展,迫切需要高校教材适应新形势的要求,不断创新教学内容,以满足光学基础前沿与变革性技术的发展需求。光学基础课程的教学质量直接关系到国家光学创新人才的高度,以及相关产业的发展。本文试从光学前沿发展的角度,提出高校光学专业基础课教学的创新思路;以光学教学重要内容斯涅耳折反射定律和菲涅耳公式为例,结合麦克斯韦方程和边界条件,推导出广义斯涅耳定律和菲涅耳公式。这不仅适用于传统光学教学中均匀界面的情形,也适用于现代光学需要处理光在非均匀界面的折反射问题。

在光学教学中,对描述平面光在均匀分界面上透射/反射现象的斯涅耳定律做了讲述,在该定律中,两半无限材料被一均匀界面分开,当平面光以一定角度入射该分界面时,依据麦克斯韦方程与电磁场边界条件,可推导出描述折/反射角度与入射角度关系的斯涅耳折反射定律,以及描述折/反射振幅与入射振幅关系的菲涅耳公式。斯涅耳折反射定律和菲涅耳公式适用均匀界面折反射问题。近年来,光学研究发现,在非均匀界面,即引入梯度相位,光的折反射不再遵循斯涅耳折反射定律和菲涅耳公式。2011年和2012年,美国哈佛大学和复旦大学光学研究团队先后在 *Science* 和 *Nature Materials* 发现,在界面处引入相位变化的梯度,折反射角度与入射角的关系不再遵循传统的斯涅耳折反射定律,而是受到相位梯度的影响^[1,2],他们建立了广义斯涅耳定律,用于描述折反射角度与入射角度的关系。物理的推导是基于费马原理,并没有使用传统光学教材中推导斯涅

耳折反射定律的麦克斯韦方程和电磁场边界条件。广义斯涅耳定律为近年来有了长足发展的超构表面光子器件的设计提供了重要的理论支持,基于该定律研究者们发明了异常折反射超构表面^[2-5]、超构透镜^[6-8]、隐身^[9]、结构色^[10]等。但是广义斯涅耳定律不能计算在非均匀界面情形下,光的透射系数与反射系数(菲涅耳公式),也就是无法理论计算光的折/反射振幅与入射振幅的比值关系。麦克斯韦方程组作为描述电磁场波动性质的核心,同样应当可以推导出广义斯涅耳定律和菲涅耳公式。

本文将从电磁理论出发,基于麦克斯韦方程推导出非均匀界面的折/反射角度,即广义斯涅耳定律,并利用电磁场边界条件推导出在平面波入射下,分界面两侧的透射/反射系数,即广义菲涅耳公式。最后设置任意的不均匀界面,理论计算的透反射系数与仿真计算结果完全一致。推导的公式有利于分析各种不同形式的相位突变对透射/反射造成的影响。广义斯涅耳折反射定律和菲涅耳公式同样适用于均匀界面的情形,即现行高校光学教材的斯涅耳折反射定律和菲涅耳公式是我们推导的广义斯涅耳折反射定律和菲涅耳公式的一个特例。

1 研究方法

1.1 s 波入射

如图1所示,假设入射面为 xz 平面,分界面为平面 $z=0$,入射平面光以入射角 θ_i 从 $z<0$ 的

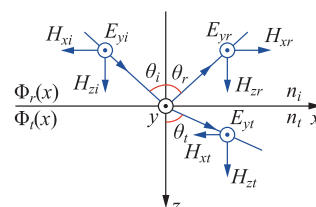


图1 s 波入射至非均匀分界面上的透射与反射

一侧入射至分界面上。 $\Phi_r(x)$ 与 $\Phi_t(x)$ 分别为反射与透射过程中的界面相位突变。

首先分析 s 波的反射与透射,此情形下的电磁场分量只含有 H_x, E_y, H_z 。在分界面两侧的磁导率 $\mu \approx \mu_0$ 的条件下,入射、反射、透射场的切向电磁场分量表达式分别为

$$\begin{cases} H_{xi}(x, z) = -\frac{n_i \cos \theta_i}{Z_0} e^{in_i k_0 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \\ E_{yi}(x, z) = e^{in_i k_0 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} H_{xr}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}}{k_0 Z_0} r_s(k_x) e^{ik_x x - i\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \\ E_{yr}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_s(k_x) e^{ik_x x - i\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} H_{xt}(x, z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n_t^2 k_0^2 - k_x^2}}{k_0 Z_0} t_s(k_x) e^{ik_x x + i\sqrt{n_t^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \\ E_{yt}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_s(k_x) e^{ik_x x + i\sqrt{n_t^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \end{cases} \quad (3)$$

式(1)~式(3)分别描述了入射、反射与透射场。 i 为虚数单位,这里将反射场与透射场皆表示为无数沿不同方向传播的平面波的加权之和, k_x 即为这些平面波沿 x 方向的波矢分量, $r_s(k_x)$ 与 $t_s(k_x)$ 则分别和反射场与透射场中这些平面波的权重相关, n_i 和 n_t 分别为 $z < 0$ 与 $z > 0$ 一侧区域内的材料折射率且皆为实数, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376.73 \Omega$ 为真空波阻抗, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 为真空波数。

在构建分界面两侧的电磁场后,将引文^[1]中分界面上的相位突变翻译为如下关系

$$\begin{cases} E_{yi}(x, 0) e^{i\Phi_r(x)} = E_{yr}(x, 0) \\ E_{yi}(x, 0) e^{i\Phi_t(x)} = E_{yt}(x, 0) \end{cases} \quad (4)$$

则

$$\begin{cases} r_s(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(n_i k_0 x \sin \theta_i + \Phi_r(x) - k_x x)} dx \\ t_s(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(n_i k_0 x \sin \theta_i + \Phi_t(x) - k_x x)} dx \end{cases} \quad (5)$$

1.1.1 s 波入射下广义斯涅尔定律的推导

当 $\Phi_r(x)$ 或 $\Phi_t(x)$ 满足下式中的第一式或第二式时

$$\begin{cases} \Phi_r(x) = \Phi_r(0) + x \frac{d\Phi_r(x)}{dx} \\ \Phi_t(x) = \Phi_t(0) + x \frac{d\Phi_t(x)}{dx} \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)可得, $r_s(k_x)$ 或 $t_s(k_x)$ 为下式中的第一式或第二式

$$\begin{cases} r_s(k_x) = e^{i\Phi_r(0)} \delta\left(k_x - \frac{d\Phi_r(x)}{dx} - n_i k_0 \sin \theta_i\right) \\ t_s(k_x) = e^{i\Phi_t(0)} \delta\left(k_x - \frac{d\Phi_t(x)}{dx} - n_i k_0 \sin \theta_i\right) \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\delta(k_x)$ 为单位冲击函数,在 $k_x \neq 0$ 时 $\delta(k_x) = 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k_x) dk_x = 1$ 。此时反射场或透射场只存在 x 方向波矢分量分别为 $\frac{d\Phi_r(x)}{dx} + n_i k_0 \sin \theta_i$ 或 $\frac{d\Phi_t(x)}{dx} + n_i k_0 \sin \theta_i$ 的成分,它们与反射角 θ_r 或折

射角 θ_t 的关系分别为 $\begin{cases} \frac{d\Phi_r(x)}{dx} + n_i k_0 \sin \theta_i = n_i k_0 \sin \theta_r \\ \frac{d\Phi_t(x)}{dx} + n_i k_0 \sin \theta_i = n_i k_0 \sin \theta_t \end{cases}$,

即

$$\begin{cases} \sin \theta_r - \sin \theta_i = \frac{\lambda_0}{2\pi n_i} \frac{d\Phi_r(x)}{dx} \\ n_t \sin \theta_t - n_i \sin \theta_i = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{d\Phi_t(x)}{dx} \end{cases} \quad (8)$$

式(8)即为引文^[1]中的广义斯涅尔定律,它描述了当分界面上存在相位突变时,透反射场的出射角度与入射角度的关系。

当 $\Phi_r(x)$ 与 $\Phi_t(x)$ 分别为常数 $\Phi_r(0)$ 与 $\Phi_t(0)$ 时,代入式(5)可得

$$\begin{cases} r_s(k_x) = e^{i\Phi_r(0)} \delta(k_x - n_i k_0 \sin \theta_i) \\ t_s(k_x) = e^{i\Phi_t(0)} \delta(k_x - n_i k_0 \sin \theta_i) \end{cases} \quad (9)$$

此时反射场或透射场都只存在 x 方向波矢分量为 $n_i k_0 \sin \theta_i$ 的成分,它们与反射角 θ_r 或折射角 θ_t 的关系分别为 $\begin{cases} n_i k_0 \sin \theta_i = n_i k_0 \sin \theta_r \\ n_i k_0 \sin \theta_i = n_t k_0 \sin \theta_t \end{cases}$,即

$$\begin{cases} \sin \theta_r = \sin \theta_i \\ n_t \sin \theta_t = n_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (10)$$

式(10)即为现行高校物理类光学教材中的斯涅尔折反射定律(狭义),描述了均匀分界面两侧反/折射角与入射角的关系。

1.1.2 s 波入射下非周期性分界面上广义菲涅尔反/透射系数

下面针对广义菲涅尔反/折射系数进行进一步的讨论。考虑分界面两侧的切向电场强度连

续,应有 $E_{yi}(x,0) + E_{yr}(x,0) = E_{yt}(x,0)$,代入式(4)可得

$$1 + e^{i\Phi_r(x)} = e^{i\Phi_t(x)} \quad (11)$$

将式(5)代入式(11)可得

$$t_s(k_x) - r_s(k_x) = \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \quad (12)$$

假设 $\Phi_r(x)$ 或 $\Phi_t(x)$ 满足下式中第一式或第二式的线性相位

$$\begin{cases} \Phi_r(x) = x a_r k_0 + b_r + i c_r \\ \Phi_t(x) = x a_t k_0 + b_t + i c_t \end{cases} \quad (13)$$

其中, a_r, a_t, b_r, b_t, c_r 和 c_t 皆为实数。

当式(13)仅第一式成立时,代入式(7)第一式有

$$r_s(k_x) = e^{i b_r - c_r} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i - a_r k_0) \quad (14)$$

将式(14)代入式(12)可得

$$t_s(k_x) = \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) + e^{i b_r - c_r} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i - a_r k_0) \quad (15)$$

当 $\Phi_r(x)$ 为常数 $e^{i b_r - c_r}$ 时,式(14)与式(15)变换为

$$\begin{cases} r_s(k_x) = e^{i b_r - c_r} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \\ t_s(k_x) = (1 + e^{i b_r - c_r}) \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \end{cases} \quad (16)$$

此时

$$\begin{cases} \frac{E_{yr}(x,0)}{E_{yi}(x,0)} = e^{i b_r - c_r} \\ \frac{E_{yt}(x,0)}{E_{yi}(x,0)} = 1 + e^{i b_r - c_r} \end{cases} \quad (17)$$

此时同时考虑分界面两侧的切向磁场连续,应有 $H_{xi}(x,0) + H_{xr}(x,0) = H_{xt}(x,0)$,结合式(1)~式(3)与式(10)可得

$$\frac{\delta(0) - r_s(n_i k_0 \sin\theta_i)}{t_s(n_i k_0 \sin\theta_i)} = \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i} \quad (18)$$

将式(16)代入式(18)可得

$$e^{i b_r - c_r} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \quad (19)$$

此时式(17)等价于

$$\begin{cases} \frac{E_{yr}(x,0)}{E_{yi}(x,0)} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \\ \frac{E_{yt}(x,0)}{E_{yi}(x,0)} = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \end{cases} \quad (20)$$

式(20)为现行高校物理类光学教材中 s 波入射下的菲涅尔反/透射系数(狭义)。

类似的,可以讨论当式(13)仅第二式成立时,代入式(7)第二式有

$$t_s(k_x) = e^{i b_t - c_t} \delta(k_x - a_t k_0 + n_i k_0 \sin\theta_i) \quad (21)$$

将式(21)代入式(12)可得

$$r_s(k_x) = -\delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) + e^{i b_t - c_t} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i - a_t k_0) \quad (22)$$

当 $\Phi_t(x)$ 为常数 $e^{i b_t - c_t}$ 时,式(21)与式(22)变换为

$$\begin{cases} r_s(k_x) = (e^{i b_t - c_t} - 1) \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \\ t_s(k_x) = e^{i b_t - c_t} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \end{cases} \quad (23)$$

此时

$$\begin{cases} \frac{E_{yr}(x,0)}{E_{yi}(x,0)} = e^{i b_t - c_t} - 1 \\ \frac{E_{yt}(x,0)}{E_{yi}(x,0)} = e^{i b_t - c_t} \end{cases} \quad (24)$$

此时同时考虑分界面两侧的切向磁场连续,将式(23)代入式(18)可得

$$e^{i b_t - c_t} = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} \quad (25)$$

此时式(24)同样等价于式(20),为现行高校物理类光学教材中 s 波入射下的菲涅尔反/透射系数(狭义)。

1.1.3 s 波入射下非周期性分界面上反射率与透射率

反射效率 η_r 与透射效率 η_t 分别为

$$\begin{cases} \eta_r = \frac{\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{yr}(x,z) H_{xr}^*(x,z) dx \right]}{-\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{yi}(x,z) H_{xi}^*(x,z) dx \right]} \\ \eta_t = \frac{\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{yt}(x,z) H_{xt}^*(x,z) dx \right]}{\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{yi}(x,z) H_{xi}^*(x,z) dx \right]} \end{cases}$$

将式(1)~式(3)代入得

$$\begin{cases} \eta_r = \frac{\text{Re} \left[\int_{-n_i k_0}^{+n_i k_0} \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} |r_s(k_x)|^2 dk_x \right]}{n_i k_0 \delta(0) \cos\theta_i} \\ \eta_t = \frac{\text{Re} \left[\int_{-n_i k_0}^{+n_i k_0} \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} |t_s(k_x)|^2 dk_x \right]}{n_i k_0 \delta(0) \cos\theta_i} \end{cases} \quad (26)$$

当式(13)仅第一式成立时,将式(14)与式(15)代

入式(26)得

$$\begin{cases} \eta_r = \frac{e^{-2c_r} \operatorname{Re} [\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + a_r)^2}]}{n_i \cos \theta_i} \\ \eta_t = \frac{e^{-2c_r} \operatorname{Re} [\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + a_r)^2}]}{n_i \cos \theta_i} + \\ \frac{\operatorname{Re} [\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i)^2}]}{n_i \cos \theta_i} \left[1 + 2e^{-c_r} \frac{\delta(a_r k_0)}{\delta(0)} \cos b_r \right] \end{cases} \quad (27)$$

当 $\Phi_r(x)$ 为常数 $e^{ib_r - c_r}$ 时, 式(27)变换为

$$\begin{cases} \eta_r = e^{-2c_r} \\ \eta_t = \frac{\operatorname{Re} [\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i)^2}]}{n_i \cos \theta_i} (1 + e^{-2c_r} + 2e^{-c_r} \cos b_r) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \eta_r = \left(\frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \right)^2 \\ \eta_t = \frac{n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \right)^2 \end{cases} \quad (28)$$

结合式(10)与式(19)可得

$$\frac{e^{-2c_r} \sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + a_r)^2}}{n_i \cos \theta_i} = 1.$$

类似地, 可以讨论当式(13)仅第二式成立时, 将式(21)与式(22)代入式(26)得反射与透射效率分别为

$$\begin{cases} \eta_r = 1 - 2e^{-c_t} \frac{\delta(a_t k_0)}{\delta(0)} \cos b_t + \\ \frac{e^{-2c_t} \operatorname{Re} [\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + a_t)^2}]}{n_i \cos \theta_i} \\ \eta_t = \frac{e^{-2c_t} \operatorname{Re} [\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + a_t)^2}]}{n_i \cos \theta_i} \end{cases} \quad (29)$$

当 $\Phi_t(x)$ 为常数 $e^{ib_t - c_t}$ 时, 式(29)变换为

$$\begin{cases} \eta_r = 1 + e^{-2c_t} - 2e^{-c_t} \cos b_t \\ \eta_t = \frac{e^{-2c_t} \operatorname{Re} [\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i)^2}]}{n_i \cos \theta_i} \end{cases},$$

结合式(10)与式(25)同样可得式(28), 为现行高校物理类光学教材中 s 波入射下的反/透射率(狭义)。

当 $a_t \neq 0$ 时, 在 $\eta_r + \eta_t \leq 1$ 的条件下, 仅存在

$\eta_r = 1$ 。此时 $c_t = +\infty$ 或 $|n_i \sin \theta_i + a_t| \geq n_i, n_t$ 。即, 即使存在完美的透射梯度相位也无法实现异常折射, 相反会形成全反射。

1.1.4 s 波入射下周期性分界面上广义菲涅尔反/透射系数

上述讨论皆在式(13)中某一式成立, 即反射或透射的相位突变为完美线性函数的条件下进行。若仅仅假设 $\Phi_r(x)$ 与 $\Phi_t(x)$ 皆为周期为 L 的函数, 即 $\begin{cases} \Phi_r(x+L) = \Phi_r(x) \\ \Phi_t(x+L) = \Phi_t(x) \end{cases}$, 则反射场与透射场

可以记为

$$\begin{cases} H_{xr}(x, z) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2}}{Z_0} \\ r_s(N) e^{i x (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})} e^{-i z \sqrt{n_i^2 k_0^2 - \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)^2}} \\ E_{yr}(x, z) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} r_s(N) e^{i x (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})} \\ e^{-i z \sqrt{n_i^2 k_0^2 - \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)^2}} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} H_{xt}(x, z) = - \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n_t^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2}}{Z_0} \\ t_s(N) e^{i x (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})} e^{i z \sqrt{n_t^2 k_0^2 - \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)^2}} \\ E_{yt}(x, z) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} t_s(N) e^{i x (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})} \\ e^{i z \sqrt{n_t^2 k_0^2 - \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)^2}} \end{cases} \quad (31)$$

这里同样是将反射场与透射场表示为无数沿不同方向传播的平面波的加权之和, 由于这里相位突变为周期函数, 这些平面波沿 x 方向的波矢分量为分立值 $n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}$, 其中 N 为整数, 表示这些平面波所对应的衍射级次。 $r_s(N)$ 与 $t_s(N)$ 则分别和反射场与透射场中这些平面波的权重相关。

结合式(1)、式(4)、式(30)、式(31)可得

$$\begin{cases} r_s(N) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{i(\Phi_r(x) - N \frac{2\pi}{L} x)} dx \\ t_s(N) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{i(\Phi_t(x) - N \frac{2\pi}{L} x)} dx \end{cases} \quad (32)$$

结合式(11)与式(32)可得

$$t_s(N) - r_s(N) = \begin{cases} 1 & (N=0) \\ 0 & (N \neq 0) \end{cases} \quad (33)$$

1.1.5 s 波入射下周期性分界面上反射率与透射率

反射效率 η_r 与透射效率 η_t 分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_r &= \frac{\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{yr}(x, z) H_{xr}^*(x, z) dx \right]}{-\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{yi}(x, z) H_{xi}^*(x, z) dx \right]} \\ \eta_t &= \frac{\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{yt}(x, z) H_{xt}^*(x, z) dx \right]}{\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{yi}(x, z) H_{xi}^*(x, z) dx \right]} \end{aligned} \right.$$

将式(1)、式(30)、式(31)代入得

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_r &= \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \eta_{sr}(N) \\ &= \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \left[\sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L} \right)^2} \right] |r_s(N)|^2}{n_i \cos \theta_i} \\ \eta_t &= \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \eta_{st}(N) \\ &= \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \left[\sqrt{n_t^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L} \right)^2} \right] |t_s(N)|^2}{n_i \cos \theta_i} \end{aligned} \right. \quad (34)$$

其中, $\eta_{sr}(N)$ 与 $\eta_{st}(N)$ 即分别为第 N 级反射与透射衍射级次的效率。同样在 $\eta_r + \eta_t \leq 1$ 的条件下, 若有且仅有一个非零值 $N = N_r$ 满足 $n_i > \left| n_i \sin \theta_i + N_r \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 且使得 $\eta_{sr}(N_r) = 1$, 结合式(33)可知, 应有 $n_t < \left| n_i \sin \theta_i + N_r \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 。同时注意到此时 $r_s(0) = 0, t_s(0) = 1$, 因此还需满足 $n_t < n_i \sin \theta_i$ 。

若有且仅有一个非零值 $N = N_t$ 满足 $n_t > \left| n_i \sin \theta_i + N_t \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 且使得 $\eta_{st}(N_t) = 1$, 结合式(33)可知, 应有 $n_i < \left| n_i \sin \theta_i + N_t \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 。注意到此时 $t_s(0) = 0, r_s(0) = -1, \eta_r = 1$, 与 $\eta_r + \eta_t \leq 1$ 的条件矛盾, 即无法实现完美的异常折射。

1.2 p 波入射

类似的, 对于 p 波的反射与透射, 如图 2 所示, 此情形下的电磁场分量只含有 E_x, H_y, E_z 。

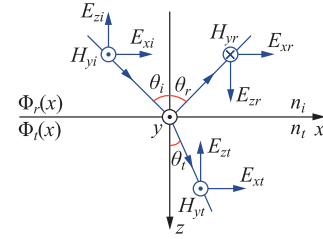


图 2 p 波入射至非均匀分界面上的透射与反射

在分界面两侧的磁导率 $\mu \approx \mu_0$ 的条件下, 我们可以写出入射、反射、透射场的切向电磁场分量表达式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} E_{xi}(x, z) &= \frac{Z_0 \cos \theta_i}{n_i} e^{in_i k_0 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \\ H_{yi}(x, z) &= e^{in_i k_0 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \end{aligned} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} E_{xr}(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0 \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}}{n_i^2 k_0} r_p(k_x) e^{ik_x x - i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \\ H_{yr}(x, z) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} r_p(k_x) e^{ik_x x - i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \end{aligned} \right. \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{aligned} E_{xt}(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0 \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}}{n_i^2 k_0} t_p(k_x) e^{ik_x x + i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \\ H_{yt}(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t_p(k_x) e^{ik_x x + i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} z} dk_x \end{aligned} \right. \quad (37)$$

式(35)~式(37)分别描述了入射、反射与透射场。 $r_p(k_x)$ 与 $t_p(k_x)$ 分别和反射场与透射场中沿不同方向传播的平面波的权重相关。此时我们将引文^[1]中分界面上的相位突变翻译为如下关系

$$\left\{ \begin{aligned} E_{xi}(x, 0) e^{i\Phi_r(x)} &= E_{xr}(x, 0) \\ E_{xi}(x, 0) e^{i\Phi_t(x)} &= E_{xt}(x, 0) \end{aligned} \right. \quad (38)$$

则

$$\left\{ \begin{aligned} r_p(k_x) &= \frac{n_i k_0 \cos \theta_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(n_i k_0 x \sin \theta_i + \Phi_r(x) - k_x x)} dx}{2\pi \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \\ t_p(k_x) &= \frac{n_i^2 k_0 \cos \theta_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(n_i k_0 x \sin \theta_i + \Phi_t(x) - k_x x)} dx}{2\pi n_i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \end{aligned} \right. \quad (39)$$

1.2.1 p 波入射下广义斯涅尔定律的推导

当 $\Phi_r(x)$ 或 $\Phi_t(x)$ 满足式(6)中的第一式或第二式时, 将式(6)代入式(39)可得反射系数 $r_p(k_x)$ 或透射系数 $t_p(k_x)$ 为下式中的第一式或第二式

$$\left\{ \begin{aligned} r_p(k_x) &= \frac{n_i k_0 e^{i\Phi_r(0)} \cos\theta_i}{\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \\ &\quad \delta\left(k_x - \frac{d\Phi_r(x)}{dx} + n_i k_0 \sin\theta_i\right) \\ t_p(k_x) &= \frac{n_i^2 k_0 e^{i\Phi_t(0)} \cos\theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \\ &\quad \delta\left(k_x - \frac{d\Phi_t(x)}{dx} + n_i k_0 \sin\theta_i\right) \end{aligned} \right. \quad (40)$$

由式(40)同样可推导出式(8),广义斯涅尔定律。当 $\Phi_r(x)$ 与 $\Phi_t(x)$ 分别为常数 $\Phi_r(0)$ 与 $\Phi_t(0)$ 时,则同样可推导出式(10),现行高校物理类光学教材中的斯涅尔折反射定律(狭义)。

1.2.2 p 波入射下非周期性分界面上广义菲涅尔反/透射系数

下面针对广义菲涅尔反/折射系数进行进一步的讨论。考虑分界面两侧的切向电场强度连续,同样可得到式(11),将式(39)代入式(11)可得

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}}{n_i^2 k_0} t_p(k_x) - \frac{\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}}{n_i^2 k_0} r_p(k_x) \\ &= \frac{\cos\theta_i}{n_i} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \end{aligned} \quad (41)$$

当式(13)仅第一式成立时,代入式(39)第一式有

$$\begin{aligned} r_p(k_x) &= \frac{e^{ib_r - c_r} n_i k_0 \cos\theta_i}{\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \\ &\quad \delta(k_x - a_r k_0 - n_i k_0 \sin\theta_i) \end{aligned} \quad (42)$$

将式(42)代入式(41)可得

$$\begin{aligned} t_p(k_x) &= \frac{e^{ib_r - c_r} n_i^2 \cos\theta_i \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i - a_r k_0)}{n_i \sqrt{n_i^2 - (n_i \sin\theta_i + a_r)^2}} + \\ &\quad \frac{n_i^2 \cos\theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \end{aligned} \quad (43)$$

当 $\Phi_r(x)$ 为常数 $e^{ib_r - c_r}$ 时,式(42)与式(43)变换为

$$\left\{ \begin{aligned} r_p(k_x) &= \frac{e^{ib_r - c_r} n_i k_0 \cos\theta_i}{\sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \\ &\quad \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \\ t_p(k_x) &= \frac{(1 + e^{ib_r - c_r}) n_i^2 \cos\theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}} \\ &\quad \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \end{aligned} \right. \quad (44)$$

此时

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-H_{yr}(x, 0)}{H_{yi}(x, 0)} &= e^{ib_r - c_r} \\ \frac{n_i H_{xt}(x, 0)}{n_t H_{xi}(x, 0)} &= \frac{(1 + e^{ib_r - c_r}) n_t \cos\theta_i}{\sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}} \end{aligned} \right. \quad (45)$$

此时同时考虑分界面两侧的切向磁场连续,应有 $H_{yi}(x, 0) + H_{yr}(x, 0) = H_{yt}(x, 0)$,结合式(35)~式(37)可得

$$\delta(0) - r_p(n_i k_0 \sin\theta_i) = t_p(n_i k_0 \sin\theta_i) \quad (46)$$

结合式(10)、式(44)与式(46)可得

$$e^{ib_r - c_r} = \frac{n_i \cos\theta_t - n_t \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i} \quad (47)$$

此时式(45)等价于

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-H_{yr}(x, 0)}{H_{yi}(x, 0)} &= \frac{n_i \cos\theta_t - n_t \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i} \\ \frac{n_i H_{xt}(x, 0)}{n_t H_{xi}(x, 0)} &= \frac{2n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_t + n_t \cos\theta_i} \end{aligned} \right. \quad (48)$$

式(48)中第一式与第二式分别为现行高校物理类光学教材中 p 波入射下的菲涅尔反/透射系数(狭义)。

类似的可以讨论当式(13)仅第二式成立时,代入式(39)第二式有

$$\begin{aligned} t_p(k_x) &= \frac{e^{ib_t - c_t} n_i^2 k_0 \cos\theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \\ &\quad \delta(k_x - a_t k_0 + n_i k_0 \sin\theta_i) \end{aligned} \quad (49)$$

将式(49)代入式(41)可得

$$\begin{aligned} r_p(k_x) &= -\delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) + \\ &\quad \frac{e^{ib_t - c_t} n_i \cos\theta_i \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i - a_t k_0)}{\sqrt{n_i^2 - (n_i \sin\theta_i + a_t)^2}} \end{aligned} \quad (50)$$

当 $\Phi_t(x)$ 为常数 $e^{ib_t - c_t}$ 时,式(49)与式(50)变换为

$$\left\{ \begin{aligned} r_p(k_x) &= (e^{ib_t - c_t} - 1) \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \\ t_p(k_x) &= \frac{e^{ib_t - c_t} n_i^2 k_0 \cos\theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2}} \delta(k_x - n_i k_0 \sin\theta_i) \end{aligned} \right. \quad (51)$$

此时

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{-H_{yr}(x, 0)}{H_{yi}(x, 0)} &= e^{ib_t - c_t} - 1 \\ \frac{n_i H_{xt}(x, 0)}{n_t H_{xi}(x, 0)} &= \frac{e^{ib_t - c_t} n_i \cos\theta_i}{\sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}} \end{aligned} \right. \quad (52)$$

结合式(10)、式(46)与式(51)可得

$$e^{ib_t - c_t} = \frac{2n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \quad (53)$$

此时式(52)同样等价于式(48),得到现行高校物理类光学教材中 p 波入射下的菲涅尔反/透射系数(狭义)。

1.2.3 p 波入射下非周期性分界面上反射率与透射率

反射效率 η_r 与透射效率 η_t 分别为

$$\begin{cases} \eta_r = \frac{-\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{xr}(x, z) H_{yr}^*(x, z) dx \right]}{\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{xi}(x, z) H_{yi}^*(x, z) dx \right]} \\ \eta_t = \frac{\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{xt}(x, z) H_{yt}^*(x, z) dx \right]}{\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E_{xi}(x, z) H_{yi}^*(x, z) dx \right]} \end{cases},$$

将式(35)~式(37)代入得

$$\begin{cases} \eta_r = \frac{\operatorname{Re} \left[\int_{-n_t k_0}^{+n_i k_0} \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} |r_p(k_x)|^2 dk_x \right]}{n_i k_0 \delta(0) \cos \theta_i} \\ \eta_t = \frac{\operatorname{Re} \left[\int_{-n_t k_0}^{+n_i k_0} n_i \sqrt{n_i^2 k_0^2 - k_x^2} |t_p(k_x)|^2 dk_x \right]}{n_t^2 k_0 \delta(0) \cos \theta_i} \end{cases} \quad (54)$$

当式(13)仅第一式成立时,将式(42)与式(43)代入式(54)得

$$\begin{cases} \eta_r = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-2c_r} \cos \theta_i}{\sqrt{1 - (\sin \theta_i + a_r/n_i)^2}} \right] \\ \eta_t = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-2c_r} n_i^2 \cos \theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + a_r)^2}} \right] + \operatorname{Re} \left[\frac{n_i^2 \cos \theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}} \right] \\ \left[1 + 2e^{-c_r} \frac{\delta(a_r k_0)}{\delta(0)} \cos b_r \right] \end{cases} \quad (55)$$

当 $\Phi_r(x)$ 为常数 $e^{ib_r - c_r}$ 时,式(55)变换为

$$\begin{cases} \eta_r = e^{-2c_r} \\ \eta_t = \frac{n_i^2 \left[1 + e^{-2c_r} + 2e^{-c_r} \frac{\delta(a_r k_0)}{\delta(0)} \cos b_r \right] \cos \theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 - n_i^2 \sin^2 \theta_i}} \end{cases}$$

结合式(10)与式(47)可得

$$\begin{cases} \eta_r = \left(\frac{n_i \cos \theta_t - n_t \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \right)^2 \\ \eta_t = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \right)^2 \end{cases} \quad (56)$$

式(56)中第一式与第二式分别为现行高校物理类光学教材中 p 波入射下的菲涅尔反/透射率(狭义)。

当 $a_r \neq 0$ 时,在 $\eta_r + \eta_t \leq 1$ 的条件下,若 $\eta_r = 1$,则应有 $n_i > |n_i \sin \theta_i + a_r| > n_t, n_t < |n_i \sin \theta_i|$, $e^{-2c_r} \cos \theta_i = \sqrt{1 - (\sin \theta_i + a_r/n_i)^2}$ 。

类似地,可以讨论当式(13)仅第二式成立时,将式(49)与式(50)代入式(54)可得反射与透射效率分别为

$$\begin{cases} \eta_r = 1 - 2e^{-c_t} \cos b_t + \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-2c_t} \cos \theta_i}{\sqrt{1 - (\sin \theta_i + a_t/n_i)^2}} \right] \\ \eta_t = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-2c_t} n_i^2 \cos \theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + a_r)^2}} \right] \end{cases} \quad (57)$$

当 $\Phi_t(x)$ 为常数 $e^{ib_t - c_t}$ 时,式(57)变换为

$$\begin{cases} \eta_r = 1 + e^{-2c_t} - 2e^{-c_t} \cos b_t \\ \eta_t = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-2c_t} n_i^2 \cos \theta_i}{n_i \sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i)^2}} \right] \end{cases}, \text{结合式(10)与}$$

式(53)同样可得式(56),得到现行高校物理类光学教材中 p 波入射下的菲涅尔反/透射率(狭义)。

当 $a_t \neq 0$ 时,在 $\eta_r + \eta_t \leq 1$ 的条件下,仅存在 $\eta_r = 1$ 。 $c_t = +\infty$ 或 $|n_i \sin \theta_i + a_t| \geq n_i, n_t$ 。即,即使存在完美的透射梯度相位也无法实现异常折射,相反会形成全反射。

1.2.4 p 波入射下周期性分界面上广义菲涅尔反/折射系数

上述讨论皆在式(13)中某一式成立,即反射或透射的相位突变为完美线性函数的条件下进行。若仅仅假设 $\Phi_r(x)$ 与 $\Phi_t(x)$ 皆为周期 L 的函数,即 $\begin{cases} \Phi_r(x+L) = \Phi_r(x) \\ \Phi_t(x+L) = \Phi_t(x) \end{cases}$ 。则反射场与透射场可以记为

$$\begin{cases} E_{xr}(x, z) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0 \sqrt{n_i^2 - (n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L})^2}}{n_i^2} \\ r_p(N) e^{i x (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})} e^{-i z \sqrt{n_i^2 k_0^2 - (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})^2}} \\ H_{yr}(x, z) = - \sum_{N=-\infty}^{+\infty} r_p(N) e^{i x (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})} \\ e^{-i z \sqrt{n_i^2 k_0^2 - (n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L})^2}} \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} E_{xt}(x, z) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{Z_0 \sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2}}{n_i^2} \\ t_p(N) e^{i x \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)} e^{i z \sqrt{n_i^2 k_0^2 - \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)^2}} \\ H_{yt}(x, z) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} t_p(N) e^{i x \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)} \\ e^{i z \sqrt{n_i^2 k_0^2 - \left(n_i k_0 \sin \theta_i + N \frac{2\pi}{L}\right)^2}} \end{cases} \quad (59)$$

其中, $r_p(N)$ 与 $t_p(N)$ 分别和反射场与透射场中沿不同方向传播的平面波的权重相关。

结合式(35)、式(38)、式(58)、式(59)可得

$$\begin{cases} r_p(N) = \frac{n_i \cos \theta_i \int_{-L/2}^{+L/2} e^{i(\Phi_r(x) - N \frac{2\pi}{L}x)} dx}{L \sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2}} \\ t_p(N) = \frac{n_i^2 \cos \theta_i \int_{-L/2}^{+L/2} e^{i(\Phi_t(x) - N \frac{2\pi}{L}x)} dx}{L n_i \sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2}} \end{cases} \quad (60)$$

结合式(11)与式(60)可得

$$\begin{aligned} & \frac{n_i \sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2}}{n_i^2 \cos \theta_i} t_p(N) - \\ & \frac{\sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2}}{n_i \cos \theta_i} r_p(N) \\ & = \begin{cases} 1 & (N=0) \\ 0 & (N \neq 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (61)$$

1.2.5 p 波入射下周期性分界面上反射率与透射率

反射效率 η_r 与透射效率 η_t 分别为

$$\begin{cases} \eta_r = \frac{-\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{xr}(x, z) H_{yr}^*(x, z) dx \right]}{\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{xi}(x, z) H_{yi}^*(x, z) dx \right]} \\ \eta_t = \frac{\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{xt}(x, z) H_{yt}^*(x, z) dx \right]}{\operatorname{Re} \left[\int_{-L/2}^{+L/2} E_{xi}(x, z) H_{yi}^*(x, z) dx \right]} \end{cases}$$

将式(35)、式(58)、式(59)代入得

$$\begin{cases} \eta_r = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \eta_{pr}(N) \\ = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \left[\sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2} \right] |r_p(N)|^2}{n_i \cos \theta_i} \\ \eta_t = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \eta_{pt}(N) \\ = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \frac{n_i \operatorname{Re} \left[\sqrt{n_i^2 - \left(n_i \sin \theta_i + N \frac{\lambda_0}{L}\right)^2} \right] |t_p(N)|^2}{n_i^2 \cos \theta_i} \end{cases} \quad (62)$$

其中, $\eta_{pr}(N)$ 与 $\eta_{pt}(N)$ 即分别为第 N 级反射与透射衍射级次的效率。同样在 $\eta_r + \eta_t \leq 1$ 的条件下, 若有且仅有一个非零值 $N = N_r$ 满足 $n_i > \left| n_i \sin \theta_i + N_r \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 且使得 $\eta_{pr}(N_r) = 1$, 结合式(61)可知应有 $n_i < \left| n_i \sin \theta_i + N_r \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 。同时注意到此时 $r_p(0) = 0, t_p(0) \neq 1$, 因此还需满足 $n_i < n_i \sin \theta_i$ 。

若有且仅有一个非零值 $N = N_t$ 满足 $n_i > \left| n_i \sin \theta_i + N_t \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 且使得 $\eta_{pt}(N_t) = 1$, 结合式(61)可知, 应有 $n_i < \left| n_i \sin \theta_i + N_t \frac{\lambda_0}{L} \right|$ 。同时注意到此时 $t_p(0) = 0, r_p(0) = -1, \eta_r = 1$, 与 $\eta_r + \eta_t \leq 1$ 矛盾, 即无法实现完美的异常折射。

1.3 仿真结果验证推导公式

我们现在基于有限时域差分 Finite Difference Time Domain 对一周期性结构进行仿真。该周期性结构的周期 L 为 3120nm, $x \in [-1560\text{nm}, 1560\text{nm}]$ 这一周期中, 中心位置为 $\pm(40M - 20)\text{nm}$ 处设置有宽度为 $M\text{nm}$ 的金属结构, 其中 M 属于 $[1, 39]$ 且为整数。这些金属结构沿 y 方向无限延伸, 沿 z 方向的厚度为 20nm, 这些金属结构材料为金, 且放置于半无限的氧化硅衬底上, 材料参数皆来源于固体光学常数手册^[11]。 p 波平面光从另一侧空气正入射至该结构, 我们从仿真结果中提取 $e^{i\Phi_r(x)}$ 与 $e^{i\Phi_t(x)}$ 。然后, 首先基于式(60)得出反射与透射系数 $r_p(N)$ 与 $t_p(N)$, 再根据式(62)计算出反射率 η_r 与透射率 η_t , 以及数个级次的效率 $\eta_{pr}(0), \eta_{pr}(-1), \eta_{pr}(-2), \eta_{pt}(0), \eta_{pt}(-1), \eta_{pt}(-2)$, 并将它们与仿真数据进行对比, 结果如图 3 所示, 计算结果与仿真结果吻合很好, 说明我

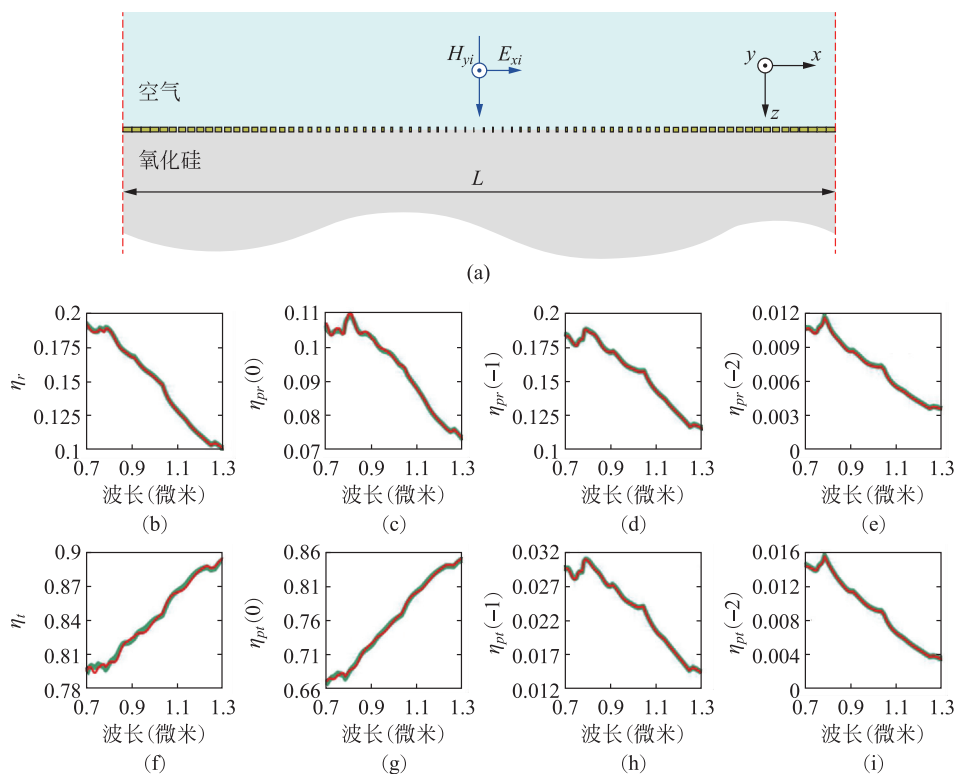


图3 p 波正入射下仿真值与计算值对比结果

(a) p 波正入射至周期性金属结构上的示意图; (b) 反射率 η_r ; (c) 0 级反射级次效率 $\eta_{pr}(0)$; (d) -1 级反射级次效率 $\eta_{pr}(-1)$; (e) -2 级反射级次效率 $\eta_{pr}(-2)$; (f) 透射率 η_t ; (g) 0 级透射级次效率 $\eta_{pt}(0)$; (h) -1 级透射级次效率 $\eta_{pt}(-1)$; (i) -2 级透射级次效率 $\eta_{pt}(-2)$

注:图中浅蓝色线为计算值,深蓝色线为仿真值

们的推导公式在已知 $\Phi_r(x)$ 与 $\Phi_t(x)$ 的条件下可以有效计算相关结果。

2 结语

光学基础前沿与变革性技术不断涌现,迫切需要高校物理类光学教材适应新形势的要求不断发展。本文以光学教学重要内容斯涅耳折射定律和菲涅耳公式为例,结合麦克斯韦方程和边界条件,推导出广义斯涅耳定律和菲涅耳公式,不仅适用于传统光学教学中均匀界面的情形,也适用于现代光学需要处理光在非均匀界面的折射反射问题。本文的创新思路,不仅可以改进斯涅耳定律和菲涅耳公式教学方法,也可以为其他教学内容的创新提供一定的借鉴。

参考文献

[1] YU N, GENEVET P, KATS M A, et al. Light propagation with phase discontinuities: Generalized laws of reflection and refraction[J]. Science, 2011, 334(6054): 333-337.

[2] SUN S, HE Q, XIAO S, et al. Gradient-index meta-surfaces as a bridge linking propagating waves and surface waves[J]. Nature materials, 2012, 11(5): 426-431.

[3] 李勇峰,张介秋,屈绍波,等. 二维宽带相位梯度超表面设计及实验验证[J]. 物理学报, 2015, 64(9): 094101.

LI Y F, ZHANG J Q, QU S B, et al. Design and verification of a two-dimensional wide band phase-gradient meta-surface[J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(9): 094101. (in Chinese)

[4] 杨帅,吴群,张狂,等. 基于异常反射型超表面的天线反射面设计[J]. 电波科学学报, 2018, 33(3): 337-342.

YANG S, WU Q, ZHANG K, et al. Design of antenna reflector based on abnormal reflective metasurface[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2018, 33(3): 337-342. (in Chinese)

[5] 刘丽想,董丽娟,刘艳红,等. 特异表面的异常折射特性研究[J]. 山西大同大学学报(自然科学版), 2015, 31(1): 10-12.

LIU L X, DONG L J, LIU Y H, et al. Study of the reflection properties of metasurface[J]. Journal of Shanxi Datong University (Natural Science), 2015, 31(1): 10-12. (in Chinese)

[6] 李奥凌,段辉高,贾红辉,等. 中红外波段超构透镜研究进展[J]. 光学精密工程, 2022, 30(19): 2313-2331.

(下转第 50 页)

参 考 文 献

- [1] 钟登华. 新工科建设的内涵与行动[J]. 高等工程教育研究, 2017, (3): 1-6.
ZHONG D H. Connotation and action of emerging engineering education[J]. Research in Higher Education of Engineering, 2017, (3): 1-6. (in Chinese)
- [2] 张千清, 郭磊, 向阳辉. 新工科双创人才培养的实践教学范式[J]. 高教探索, 2018, (8): 55-60.
ZHANG G Q, GUO L, XIANG Y H. Practice teaching paradigm for the cultivation of innovative talents in new engineering[J]. Higher Education Exploration, 2018, (8): 55-60. (in Chinese)
- [3] 王小力. 大学物理课程思政研究与实践[J]. 中国大学教学, 2020, (10): 54-57.
WANG X L. Ideological and political research and practice of university physics curriculum [J]. China University Teaching, 2020, (10): 54-57.
- [4] 沈文舒, 邱丹, 李冰, 等. 新工科背景下的应用型高校大学物理课程改革[J]. 长春工程学院学报(社会科学版), 2022, 23(2): 33-35. (in Chinese)
SHEN W S, QIU D, LI B, et al. College physics curriculum reform in applied universities under the background of new engineering [J]. Journal of Changchun Institute of Technology (Social Sciences Edition), 2022, 23(2): 33-35. (in Chinese)
- [5] 吴海平, 钱彦, 阚二军. 新工科背景下大学物理课程改革探索[J]. 高教学刊, 2022, (22): 128-131.
- WU H P, QIAN Y, KAN E J. Exploration of college physics curriculum reform under the background of new engineering[J]. Journal of Higher Education, 2022, (22): 128-131. (in Chinese)
- [6] 周雪, 杨旭. “新工科”背景下“大学物理”教学改革探索与实践[J]. 现代盐化工, 2022, (4): 121-124.
ZHOU X, YANG X. Exploration and practice of “University Physics” teaching reform under the background of “new engineering” [J]. Modern Salt and Chemical Industry, 2022, (4): 121-124. (in Chinese)
- [7] 贾瑜, 王伟. 2023 版《理工科类大学物理课程教学基本要求》内容细化修订解读[J]. 物理与工程, 2024, 34(1): 3-10.
JIA Y, WANG W. The interpretation of the 2023 edition of the basic requirements for teaching physics courses in science and engineering universities[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(1): 3-10. (in Chinese)
- [8] HUNT J G, da SILVA F C, MAURICIO C L. The validation of Voxel phantoms and Monte Carlo methods applied to external irradiations[J]. Radiation protection and Dosimetry, 2004, 108, (1): 85-89.
- [9] 林辉, 孟大敏, 刘成岳, 等. 基于注意力曲线的近代物理专题智慧课堂的设计[J]. 物理通报, 2022, (2): 25-29.
LIN H, MENG D M, LIU C Y, et al. Design on wisdom classroom of special topics in modern physics based on attention curve[J]. Physics Bulletin, 2022, (2): 25-29. (in Chinese)
- (上接第 41 页)
- LI A L, DUAN H G, JIA H H, et al. Research progress of metalenses in mid-infrared band[J]. Optics and Precision Engineering, 2022, 30(19): 2313-2331. (in Chinese)
- [7] 曹鑫蕊, 刘卫国, 周顺, 等. 大口径微纳结构平面光学元件的优化[J]. 光学精密工程, 2022, 30(15): 1828-1835.
CAO X R, LIU W G, ZHOU S, et al. Optimization of large-aperture micro-nano structure planar optical element [J]. Optics and Precision Engineering, 2022, 30(15): 1828-1835. (in Chinese)
- [8] 庞方皓, 程庆庆. 双层硅基级联太赫兹消色差超构透镜[J]. 光学仪器, 2021, 43(4): 39-46.
PANG F H, CHENG Q Q. Cascaded silicon-based terahertz achromatic metalens[J]. Optical Instruments, 2021, 43(4): 39-46. (in Chinese)
- [9] 石立华, 冉峪舟, 王建宝. 基于吸散一体隐身超构表面的透射型涡旋电磁波产生器设计[J]. 陆军工程大学学报, 2022, 1(1): 30-37.
SHI L H, RAN Y Z, WANG J B. Design of transmission vortex beam generator based on absorption-diffusion integrated stealth metasurface[J]. Journal of Army Engineering University of PLA, 2022, 1(1): 30-37. (in Chinese)
- [10] 李墨馨, 王丹燕, 张诚. 超构表面结构色的原理及应用[J]. 中国光学, 2021, 14(4): 900-926.
LI M X, WANG D Y, ZHANG C. Metasurface-based structural color: Fundamentals and applications[J]. Chinese Optics, 2021, 14(4): 900-926. (in Chinese)
- [11] PALIK E D. Handbook of optical constants of solids[M]. London: Academic Press, 1985.