

第 54 届国际物理奥林匹克竞赛理论试题 1 介绍与解答

蒋 硕 安 宇 郭旭波 张留碗 阮 东

(清华大学物理系, 北京 100084)

摘 要 本文介绍第 54 届国际物理奥林匹克竞赛理论考试的第一题。该题以温室效应全球变暖为背景, 考查黑体辐射和热传导中的能量平衡。题目分成两部分, 第一部分关注黑体辐射的辐射能分布; 第二部分关注反射吸收下, 能量的平衡。题目涉及近代物理(黑体辐射); 热学中的能量传输, 以及类似光学中多光束干涉时的法布里-珀罗效应。

关键词 国际物理奥林匹克竞赛; 黑体辐射; 维恩位移定律; 斯蒂芬-玻尔兹曼定律; Manabe 气候模型; 温室效应

INTRODUCTION AND SOLUTION TO QUESTION 1 OF THE THEORETICAL EXAMINATION OF THE 54TH INTERNATIONAL PHYSICS OLYMPIAD

JIANG Shuo AN Yu GUO Xubo ZHANG Liuwan RUAN Dong

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract This paper introduces the first question of the theoretical examination of the 54th International Physics Olympiad. The question is set against the background of global warming due to the greenhouse effect, and it examines the energy balance in blackbody radiation and heat conduction. The question is divided into two parts: the first part focuses on the distribution of radiant energy in blackbody radiation; the second part addresses the balance of energy under reflection and absorption. The question involves modern physics (blackbody radiation), energy transfer in thermodynamics, and the Fabry-Perot effect similar to that seen in multi-beam interference in optics.

Key words International Physics Olympiad; blackbody radiation; Wien's displacement law; Stefan-Boltzmann law; Manabe climate model; greenhouse effect

第 54 届国际物理奥林匹克竞赛(International Physics Olympiad, IPhO)于 2024 年 7 月 21 日至 28 日在伊朗伊斯法罕举行, 由伊朗伊斯法罕理工大学(Isfahan University of Technology)承办。清华大学物理系率中国队参加, 代表中国参赛的 5 名中学生, 全部获得金牌, 并赢得了个人总成绩第

一名, 个人理论成绩第一名, 个人实验成绩第一名和女生总成绩第一名全部个人奖项, 取得了优异成绩^[1]。

本次竞赛有 3 道理论试题, 总体而言难度平均, 中规中矩, 所涉及模型学生都比较熟悉。队员每题平均得分都在 9 分以上。第一题是以全球变

收稿日期: 2024-10-14

作者简介: 安宇, 清华大学物理系教授; 郭旭波, 清华大学物理系高级工程师; 张留碗, 清华大学物理系教授; 阮东, 清华大学物理系教授。

通信作者: 蒋硕, 清华大学物理系副教授, shuojiang@mail. tsinghua. edu. cn。

引文格式: 蒋硕, 安宇, 郭旭波, 等. 第 54 届国际物理奥林匹克竞赛理论试题 1 介绍与解答[J]. 物理与工程, 2024, 34(6): 13-18.

Cite this article: JIANG S, AN Y, GUO X B, et al. Introduction and solution to question 1 of the theoretical examination of the 54th International Physics Olympiad[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(6): 13-18. (in Chinese)

暖温室效应为背景,利用黑体辐射和辐射能量平衡进行一系列计算,内容与瑞士 2022 IPhO 第二题有部分相似,但相对简单。第二题主要是以离子囚禁的 Paul Trap 为背景,利用高频交变电场对离子施加一个有效的束缚势能,这个模型也出现在 2023 全国中学生物理竞赛的一道题中。第三题名称虽是黑寡妇脉冲星,本质上是一道经典的中心力场问题。在本文中对第一题做详细介绍,其他两题在后文中再讨论。

1 理论第一题的试题部分

温室效应

2021 年,真锅修九郎(Syukuro Manabe)和克劳斯-哈塞尔曼(Klaus Hasselmann)因建立地球气候模型并准确预测人类工业活动导致的全球变暖而获得了一半诺贝尔物理学奖^[2]。在该题中,我们将研究温室效应导致全球变暖的一个简单模型。温室气体改变了地球大气层发射或吸收地球红外辐射的光学特性,导致地球平均温度上升^[3]。

所有物体在不同温度下都会发出热辐射。物理量 $u(\lambda, T)d\lambda$ 表示物体在温度 T 、波长 λ 和 $\lambda + d\lambda$ 之间、单位面积的热辐射功率。根据普朗克的黑体辐射理论,我们可以得出

$$u(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (1)$$

其中, $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$, $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ 。 $u(\lambda, T)$ 最大值对应的波长可由 $\lambda_{\max} T = b$ (维恩位移定律)求得。实际上,由式(1)可以得到 $b = \frac{hc}{x_m k_B}$, 其中无量纲量 x_m 是形式为 $f(x) = 0$ 的方程的非平凡根;下面某个题目的任务是求出函数 $f(x)$ 的形式。根据斯蒂芬-玻尔兹曼定律,黑体表面单位面积所有波长的总辐射功率为 $U(T) = \sigma T^4$, 其中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ 。此外,根据基尔霍夫辐射定律,在热平衡状态下,若一个物体对某一波长的入射辐射有一个给定的吸收率,则它在该波长的辐射是以相同比率的黑体辐射。

在本题中,假设太阳是黑体,其平均表面温度为 $T = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$ 。太阳的半径为 $R_s = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, 地球与太阳的平均距离为 $d = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

我们用 $\bar{u}_s(\lambda)$ 表示辐射到地球时与辐射方向垂直的单位面积上的太阳光谱密度功率。这个量在所有波长上的积分,即 $S_0 = \int \bar{u}_s(\lambda) d\lambda$ 称为太阳常数。

在本题中,假设地球处于热平衡状态,其表面各点的温度相同。在题目的所有部分,用已知物理量的参数形式表示所求的量,然后再代入数据算出其保留 3 位有效数字的数值。所需的单位已在答题纸上标明。

A 作为黑体的地球

在这一部分,将地球表面视为黑体,忽略地球大气层。

A.1 求太阳常数, S_0 。(0.6 分)

A.2 求地球的温度, T_E 。(0.6 分)

A.3 求函数 $f(x)$ 。(0.4 分)

A.4 求 x_m 的数值,并用 x_m 的值求 b 的数值。(0.4 分)

A.5 求太阳和地球的 $\lambda_{\max}$ 。(0.2 分)

图 1 是 $\gamma \bar{u}_s(\lambda)$ 和 $u(\lambda, T_E)$ 与 λ 的函数关系图,其中 γ 是无量纲系数,它重新标度 $\bar{u}_s(\lambda)$, 使 $\gamma \bar{u}_s(\lambda)$ 和 $u(\lambda, T_E)$ 的两个峰值相同。

A.6 求 γ 。(0.8 分)

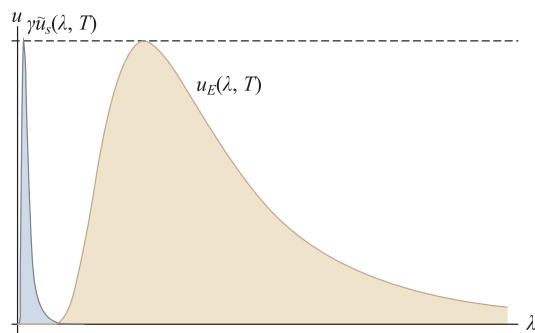


图 1 $u(\lambda, T_E)$ (浅色)和 $\gamma \bar{u}_s(\lambda)$ (深色)与 λ 的关系

B 温室效应

在这一部分,我们介绍一个简单的模型,在这个模型中,地球大气层被建模为地球表面上方一小段距离上的一个薄层,这样就可以忽略大气层面积与地球表面面积之间的差异(见图 2)。在本题中,假设来自地球和太阳的热辐射的绝大部分

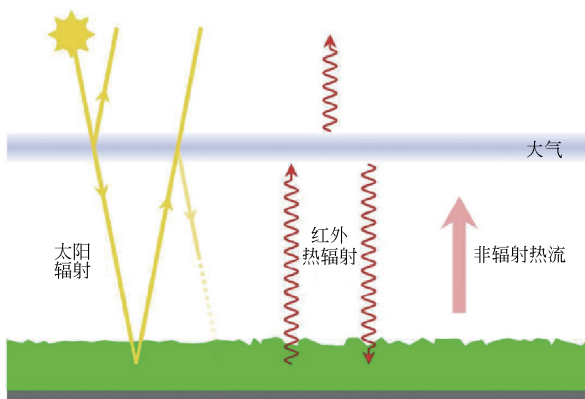


图2 地球与大气之间的热流

分布在各自的 $\lambda_{\max}$ 附近。再假设“大气层”会以反射率 $r_A = 0.255$ 反射一部分从上方或下方入射的可见光-紫外线辐射,并完全透射其余部分。假设“大气层”不反射红外辐射,但会吸收一部分(比例为 ϵ)红外辐射,并透射其余部分。这种行为被称为温室效应,会改变地球的平均温度。另一方面,地球表面会反射一部分(反射率为 r_E)可见光-紫外线辐射,然后吸收这个波段的其余部分和所有红外线辐射。

B.1 假设 $\epsilon = 1$ 和 $r_E = 0$, 计算地球温度 T_E 和大气温度 T_A 。(1.0 分)

现在假设 $r_E \neq 0$, 在这种情况下,“地球+大气”的组合系统会反射不同比例的太阳辐射,称为“反照率”,记为 α 。

B.2 给出反照率 α , 用 r_E 和 r_A 表示。然后计算其数值,假设 $r_E = 0.102$ (且 $r_A = 0.255$)。(1.6 分)

B.3

a) 将地球温度用 σ, α, S_0 和 ϵ 表示。

b) 利用已知数据和计算得到的反照率,求出 ϵ 的数值,该数值导致地球目前的平均温度为 $T_E = 288\text{K}$ 。(1.0 分)

B.4 求 $\frac{dT_E}{d\epsilon}$, 并计算如果 ϵ 增加 1%, 地球温度升高多少。(0.8 分)

假设 $T_A = 245\text{K}$, $T_E = 288\text{K}$ 。这些数值来自真实数据,可能与你在前面任务中计算所得的结果不同。现在假设在地球和大气之间存在一个非辐射热流(对流) $J_{NR} = k(T_E - T_A)$, 其中 k 是一个常数。这个物理量 J_{NR} 是单位面积的传输功率

B.5 计算 ϵ 和 k , 用 T_E, T_A, σ, α 和 S_0 来表

示。(1.6 分)

B.6 利用这些方程计算当 ϵ 增加 1%, 地球温度升高多少。(1.0 分)

2 理论第一题的解答与分析

A 部分相对简单,这里太阳和地球都当作绝对黑体,太阳的辐射都被地球表面所吸收,不考虑大气层,因而只考虑地球吸收和辐射之间的能量平衡。

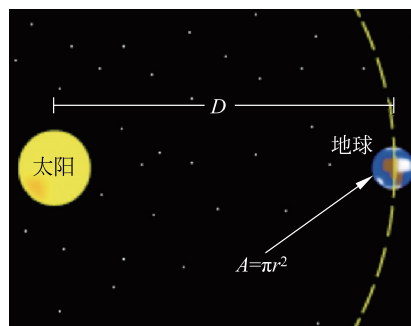


图3 太阳辐射被距离为 D 的地球表面吸收
有效地球吸收表面为 πr^2 , r 为地球半径

A.1 太阳常数 S_0 的计算。(题目中距离用的是 d , 而地球的半径用的是大写 R_E)

太阳单位表面积所有波长辐射功率由斯蒂芬-玻尔兹曼定律给出 $U(T) = \sigma T^4$, 总辐射(所有表面)功率: $4\pi R_s^2 \sigma T^4$, $T = 5.77 \times 10^3\text{K}$ 为太阳表面温度; $R_s = 6.96 \times 10^8\text{m}$ 为太阳半径(题目给出)。这些能量传到地球,分布在 $4\pi d^2$ 的球面上,依题意 S_0 为该球面上单位面积接收所有波长的辐射功率,则

$$4\pi R_s^2 \sigma T^4 = 4\pi d^2 S_0 \rightarrow S_0 = \frac{R_s^2 \sigma T^4}{d^2} \\ = 1.35 \times 10^3 \text{Wm}^{-2}$$

注意:这里依照题目所给数据,保留 3 位有效数字,有效数字过多或过少会扣 0.1 分,以下类似。

A.2 求地球温度。

地球表面接受太阳辐射,同时自身黑体辐射,依照能量平衡,易得地球热平衡时温度 T_E 。这里要注意的是计算太阳照射地表的辐射功率,地表只有半个球面被照射,有效接收面积就是 πR_E^2 的圆盘, R_E 为地球半径(其数值不必要,会被消掉)。

$$\pi R_E^2 S_0 = 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 \rightarrow T_E = \left(\frac{S_0}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 278\text{K}$$

A.3 求函数 $f(x)$ 。

本问是近代物理讨论黑体辐射的一个典型例题。依照维恩定律,辐射谱密度功率 $u(\lambda, T)$ 在一定温度下,在特定波长达到最大值,有

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$$

依据式(1)给出的 $u(\lambda, T)$

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \left[-5 + \frac{hc}{\lambda k_B T} \frac{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \right]$$

按题目要求,设 $x_m \equiv \frac{hc}{\lambda_m k_B T}$; 由 $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$ 得到

$$-5 + x_m \frac{e^{x_m}}{e^{x_m} - 1} = 0 \rightarrow 5(1 - e^{-x_m}) = x_m \quad (2)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow f(x) = 5(1 - e^{-x}) - x$$

A.4 求 x_m 的数值,并用 x_m 的值求 b 的数值。

方程(2)是超越方程,竞赛中只能逼近猜测求解(实际中利用软件 Mathematica 可方便求数值解)。 x_m 按定义为正,不会超过 5。第一个尝试解 $x_m^{(1)} = 5$ 代入等式左边,可得

$$x_m^{(2)} = 5(1 - e^{-5}) = 4.97; x_m^{(3)} = 5(1 - e^{-4.97}) = 4.97 \text{ (略小于 } 4.97, \text{ 保留 3 位有效数字)}$$

进一步迭代,不会再有变化,因而 x_m 数值在 4.96 和 4.97 间(两值都算正确):

$$x_m = [4.96, 4.97]$$

由维恩定律: $\lambda_m T = b$ 可得

$$\lambda_m T = \frac{hc}{x_m k_B} = b \rightarrow b = [2.89, 2.90] \times 10^6 \text{ nm} \cdot \text{K}$$

A.5 求太阳和地球的 $\lambda_{\max}$ 。

从上面求出的维恩常数 b , 以及题目给出的太阳温度 $T = 5.77 \times 10^3 \text{ K}$ 和 A.2 中计算的地球温度 $T_E = 278 \text{ K}$, 可得各自辐射谱密度功率最大时的波长

$$\lambda_{\max}^{\text{sun}} = \frac{b}{T} = [5.01, 5.02] \times 10^2 \text{ nm}$$

$$\lambda_{\max}^{\text{earth}} = \frac{b}{T_E} = 1.04 \times 10^4 \text{ nm}$$

可见太阳辐射最大时在可见光波段(绿光), 地球则在远红外波段。

A.6 求 γ 。

$\bar{u}_s(\lambda)$ 表示辐射到地球时与辐射方向垂直的

单位面积上的太阳光谱密度功率, 它与太阳的谱密度功率 $u(\lambda, T)$ 之间, 有

$$\bar{u}_s(\lambda) = \frac{R_s^2}{d^2} u(\lambda, T)$$

在谱密度功率最大时的波长处

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(\lambda_{\max}^{\text{sun}}) &= \frac{R_s^2}{d^2} \frac{2\pi hc^2}{(\lambda_{\max}^{\text{sun}})^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max}^{\text{sun}} k_B T}\right) - 1} \\ &= \frac{R_s^2}{d^2} \frac{2\pi hc^2}{(\lambda_{\max}^{\text{sun}})^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{b k_B}\right) - 1} \end{aligned}$$

地球辐射谱密度功率在它的最大波长处

$$u(\lambda_{\max}^{\text{earth}}, T_E) = \frac{2\pi hc^2}{(\lambda_{\max}^{\text{earth}})^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{b k_B}\right) - 1}$$

从题目定义的 $\gamma \bar{u}_s(\lambda_{\max}^{\text{sun}}) = u(\lambda_{\max}^{\text{earth}})$:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{u(\lambda_{\max}^{\text{earth}}, T_E)}{\bar{u}_s(\lambda_{\max}^{\text{sun}})} = \frac{d^2}{R_s^2} \left(\frac{\lambda_{\max}^{\text{sun}}}{\lambda_{\max}^{\text{earth}}}\right)^5 = \frac{d^2}{R_s^2} \left(\frac{T_E}{T}\right)^5 \\ &= [1.20, 1.21] \times 10^{-2} \end{aligned}$$

B.1 假设 $\epsilon = 1$ 和 $r_E = 0$, 计算地球温度 T_E 和大气温度 T_A 。

这里大气层完全吸收红外辐射, 地球不反射可见-紫外辐射, 全部吸收。从 A-5 和题目模型, 只考虑太阳在 $\lambda_{\max}^{\text{sun}}$ 的辐射, 即太阳辐射为可见光辐射; 地球辐射在其 $\lambda_{\max}^{\text{earth}}$, 为红外辐射。

考虑大气层(A)和地球(E)的吸收-辐射能量平衡, 对于大气层反射透射太阳的可见光辐射; 吸收地球的红外辐射, 且大气层与地球半径相当

$$4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 = 2(4\pi R_E^2 \sigma T_A^4)$$

其中, T_E, T_A 为平衡时地球和大气层的温度。注意大气层内外表面都会辐射。

对于地球有

$$4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 = \pi R_E^2 (1 - r_A) S_0 + 4\pi R_E^2 \sigma T_A^4$$

从上面两方程容易解得

$$T_A = \left[\frac{(1 - r_A) S_0}{\sigma} \frac{1}{4} \right]^{\frac{1}{4}}$$

代入题目给出的 $r_A = 0.255$ 和 A.1 求出的 $S_0 = 1.35 \times 10^3 \text{ Wm}^{-2}$ 可得

$$T_A = 258 \text{ K}, \quad T_E = (2)^{\frac{1}{4}} T_A = 307 \text{ K}$$

B.2 给出反照率 α , 用 r_E 和 r_A 表示。然后计算其数值, 假设 $r_E = 0.102$ (且 $r_A = 0.255$)。

如图 4 所示,这里的反照率是指太阳入射的可见光被大气和地球表面多次反射后的总反射能流密度和入射能流密 S_0 的比值。

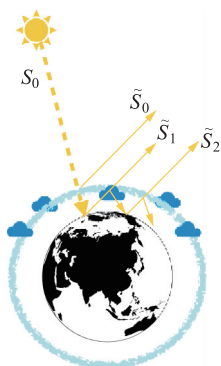


图 4 反照率计算示意图

图 4 中 S_0 是入射太阳能流密度(即 A. 1 计算的太阳常数); $\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_{i-1}$ 分别表示第一次大气反射,第一次(因为有地球反射)大气透射,直至 $i-1$ 次透射。这部分计算与光学中多光束法布里-珀罗干涉完全类似。从题给论述对于太阳可见光,只考虑反射与透射

$$\tilde{S}_0 = r_A S_0, \quad \tilde{S}_1 = (1 - r_A)^2 r_E S_0,$$

$$\tilde{S}_2 = (1 - r_A)^2 r_A r_E^2 S_0$$

可以看出,除了 $\tilde{S}_0$ 形式不同, $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ 之间多了比例系数 $r_A r_E$,确实第二次透射 $\tilde{S}_2$ 与第一次 $\tilde{S}_1$ 相比,多出一次大气反射和一次地表反射。后续也有 $\frac{\tilde{S}_n}{\tilde{S}_{n-1}} = r_A r_E$ 。

总的大气反照的能流密度为

$$\tilde{S}_{tot} = \tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \dots$$

$$\tilde{S}_{tot} = r_A S_0 +$$

$$(1 - r_A)^2 r_E S_0 (1 + r_A r_E + (r_A r_E)^2 + \dots)$$

$$= \left[r_A + \frac{(1 - r_A)^2 r_E}{1 - r_A r_E} \right] S_0$$

依据反照度定义

$$\alpha = \frac{\tilde{S}_{tot}}{S_0} = r_A + \frac{(1 - r_A)^2 r_E}{1 - r_A r_E} = 3.13 \times 10^{-1}$$

B. 3

a) 将地球温度用 σ, α, S_0 和 ϵ 表示。

b) 利用已知数据和计算得到的反照率,求出 ϵ 的数值,该数值导致地球目前的平均温度为 $T_E = 288\text{K}$ 。

由 B. 2 结果可知,太阳入射被地面吸收的能量与 B. 1 相比,做一个修正: $1 - \alpha$ 的太阳能被吸收,且大气层不一定是绝对黑体,即 $\epsilon \neq 1$ 。考虑上述因素,写出以下能量平衡关系。

对于地球表面(参数在 B. 1 中已作说明)有

$$4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 = \pi R_E^2 (1 - \alpha) S_0 + \epsilon 4\pi R_E^2 \sigma T_A^4$$

对于大气层有

$$\epsilon 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 = 2 \times \epsilon 4\pi R_E^2 \sigma T_A^4$$

从上面方程可解出

$$T_E = \left[\frac{1 - \alpha}{2\sigma(2 - \epsilon)} S_0 \right]^{\frac{1}{4}}; \quad T_E = (2)^{\frac{1}{4}} T_A \quad (3)$$

题目中给出 $T_E = 288\text{K}, \sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4$ 以及前面计算得出的

$$\alpha = 3.13 \times 10^{-1}, \quad S_0 = 1.35 \times 10^3 \text{Wm}^{-2},$$

$$\epsilon = 2 \frac{[\sigma T_E^4 - \frac{(1 - \alpha)}{4} S_0]}{\sigma T_E^4} = 8.08 \times 10^{-1}$$

(ϵ 数值在 $[8.07, 8.11] \times 10^{-1}$ 区间都算正确)

B. 4 求 $\frac{dT_E}{d\epsilon}$, 并计算如果 ϵ 增加 1%, 地球

温度升高多少。

对式(3)中 $T_E(\epsilon)$ 关系求导

$$\frac{dT_E}{d\epsilon} = \frac{1}{4} \left[\frac{(1 - \alpha) S_0}{2\sigma(2 - \epsilon)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(2 - \epsilon)}$$

$$dT_E = \frac{dT_E}{d\epsilon} d\epsilon = \frac{dT_E}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{dT_E}{d\epsilon} \epsilon \times 0.01$$

$$= 0.488\text{K}$$

(0.487K 和 0.492K 之间都算正确)

B. 5 计算 ϵ 和 k , 用 T_E, T_A, σ, α 和 S_0 来表示。

参见图 2 和 B. 5 题干,地表与大气之间多出个非辐射热流密度(对流) $J_{NR} = k(T_E - T_A)$, 该能流密度从地球到大气,部分被大气吸收(由于在红外区间,大气不反射该能流)。考虑这部分能流, B. 3 部分能量平衡变为

$$4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 + 4\pi R_E^2 k(T_E - T_A) \quad (\text{地球表面})$$

$$= \pi R_E^2 (1 - \alpha) S_0 + \epsilon 4\pi R_E^2 \sigma T_A^4$$

$$\epsilon 4\pi R_E^2 \sigma T_E^4 + 4\pi R_E^2 k(T_E - T_A) = 2 \times \epsilon 4\pi R_E^2 \sigma T_A^4 \quad (\text{大气层})$$

将 ϵ 和对流常数 k 作为未知,由上面两个方程解出:

$$\epsilon = \frac{\sigma T_E^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4}}{\sigma(T_E^4 - T_A^4)} = 0.848 \quad (4)$$

(ϵ 数值在 0.847, 0.852 区间都算正确)

$$k = \frac{\epsilon \sigma (2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A}$$

$$= \frac{\sigma T_E^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4}}{(T_E^4 - T_A^4)} \frac{(2T_A^4 - T_E^4)}{T_E - T_A}$$

$$= 3.65 \times 10^{-1} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \quad (5)$$

(k 的数值在 $[3.57, 3.66] \times 10^{-1}$ 区间都算正确)

B.6 利用这些方程计算当 ϵ 增加 1%, 地球温度升高多少?

本问是一个较为繁复的计算。式(4)对 ϵ 进行微分会有 $\frac{dT_E}{d\epsilon}$ 和 $\frac{dT_A}{d\epsilon}$; 式(5)对 ϵ 进行微分 ($\frac{dk}{d\epsilon} = 0$) 又会有 $\frac{dT_E}{d\epsilon}$ 和 $\frac{dT_A}{d\epsilon}$, 消去 $\frac{dT_A}{d\epsilon}$ 就会得到 $\frac{dT_E}{d\epsilon}$ 关系。具体解法大致如下。

对式(4)、式(5)取对数再求导, 计算更方便

$$\ln \epsilon = \ln \left[\sigma T_E^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4} \right] - \ln \sigma - \ln (T_E^4 - T_A^4)$$

$$\ln k = \ln \epsilon + \ln \sigma + \ln (2T_A^4 - T_E^4) - \ln (T_E - T_A)$$

上面两式分别对 ϵ 进行求导

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{4\sigma T_E^3 \frac{dT_E}{d\epsilon}}{\sigma T_E^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4}} - \frac{4T_E^3 \frac{dT_E}{d\epsilon} - 4T_A^3 \frac{dT_A}{d\epsilon}}{(T_E^4 - T_A^4)}$$

$$\frac{d(\ln k)}{d\epsilon} = 0$$

$$= \frac{1}{\epsilon} + \frac{8T_A^3 \frac{dT_A}{d\epsilon} - 4T_E^3 \frac{dT_E}{d\epsilon}}{2T_A^4 - T_E^4} -$$

$$\frac{\frac{dT_E}{d\epsilon} - \frac{dT_A}{d\epsilon}}{T_E - T_A}$$

消去 $\frac{dT_A}{d\epsilon}$ 可得

$$\frac{dT_E}{d\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\left[1 + \left(\frac{T_E^4 - T_A^4}{4T_A^3} \right) \left(\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right) \right]}{\left[\frac{1}{T_E - T_A} + \frac{4T_E^3}{2T_A^4 - T_E^4} \right] - \left[\frac{\sigma T_A^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4}}{\sigma T_E^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4}} \right] \left(\frac{T_E}{T_A} \right)^3 \left(\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right)}$$

当 ϵ 变化 1%, 即 $d\epsilon/\epsilon = 0.01$ 时

$$dT_E = \epsilon \frac{dT_E}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{\left[1 + \left(\frac{T_E^4 - T_A^4}{4T_A^3} \right) \left(\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right) \right]}{\left[\frac{1}{T_E - T_A} + \frac{4T_E^3}{2T_A^4 - T_E^4} \right] - \left[\frac{\sigma T_A^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4}}{\sigma T_E^4 - (1-\alpha) \frac{S_0}{4}} \right] \left(\frac{T_E}{T_A} \right)^3 \left(\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right)} \frac{d\epsilon}{\epsilon}$$

代入数值可求出 $dT_E \sim 0.523\text{K}$ (数值在 0.521K, 0.528K 区间都算正确)。

3 结语

第 54 届 IPhO 理论第一题的第一部分相对简单, 第二部分的模型稍微复杂, 但同学们熟悉法布里-珀罗模型, 这部分也全部正确。出现错误失分集中在最后两问的繁复计算中。本题的平均得分是 9.54 分。

参 考 文 献

- [1] 54th IPhO official site[EB/OL]. <https://www.ipho2024.ir/>. [2024-10-02].
- [2] The Nobel Prize in Physics 2021[EB/OL]. <https://www.nobelprize.org/>. [2024-10-02].
- [3] KNOX, ROBERT S. Physical aspects of the green house effect and global warming[J]. American Journal of Physics, 1999, 67(12): 1227-1238.