

量子世纪年

量子力学中的角动量守恒

范乐乐 王 锋 曾天海

(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

摘 要 最近发表的两篇文章(*Int. J. Theor. Phys.*, 2020, 59:229;《物理与工程》, 2024, 第四期: 5)先后给出了物理量严格守恒和统计守恒的提法和更确切的表述, 与量子力学中守恒量的表述有所不同。本文讨论的系统的哈密顿量算符不含时间, 因而与总角动量自身、分量及平方算符都是对易的, 这些量就都是守恒量。在孤立复合系统中, 总角动量分量中有一个满足严格守恒, 而子系统的只能统计守恒, 这两种守恒都可以用本征值和本征函数来表达。角动量自身一般没有本征值和本征函数, 不能用这些概念表达其严格守恒; 虽然有角动量平方的本征值和本征函数, 但也不能表达严格守恒; 只能表达它们统计守恒。

关键词 严格守恒; 统计守恒; 纠缠态; 直积态; 角动量自身

CONSERVATION OF ANGULAR MOMENTUM IN
QUANTUM MECHANICS

FAN Lele WANG Feng ZENG Tianhai

(School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract The recent two papers have successively proposed the concepts and more precise expressions of strict conservation or statistical conservation of physical quantities, which are different from the expression of a conserved quantity in quantum mechanics. The Hamiltonian operator of the system discussed in this paper are independent of time, so it is commutative with the operators of an angular momentum itself, its component and its square, so that all these quantities are conserved quantities. In an isolated composite system, one of the angular momentum components of the total system are strictly conserved, while the angular momentum components of the subsystems can only be conserved statistically, both of which can be expressed in terms of eigenvalues and eigenfunctions. Generally, angular momentum itself does not have eigenvalues and eigenfunctions, so it cannot be expressed as strict conservation in terms of these concepts. Although there are eigenvalues and eigenfunctions for the square of angular momentum, they cannot express strict conservation either. And they can only be expressed as statistical conservation.

Key words strict conservation; statistical conservation; entangled state; product state; angular momentum itself

1 研究背景

Bohr 等人于 1924 年提出的观点, 微观过程

中能量和动量守恒是统计的守恒^[1, 2], 被 Bothe 和他的合作者们断断续续所做的大量的 Compton 散射实验所否定^[3, 4], 后者验证了能量和动量守恒的严格有效^[5]。我们称“守恒的严格有效”为严格

收稿日期: 2024-01-03

基金项目: 国家自然科学基金(11875086); 北京市自然科学基金(1242026)。

通信作者: 曾天海, 北京理工大学物理学院副教授, zengtianhai@bit.edu.cn。

引文格式: 范乐乐, 王锋, 曾天海. 量子力学中的角动量守恒[J]. 物理与工程, 2024, 34(5): 127-131.

Cite this article: FAN L L, WANG F, ZENG T H. Conservation of angular momentum in quantum mechanics[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 127-131. (in Chinese)

守恒,而前面的为统计守恒。

查阅众多量子力学书籍,还没有物理量严格守恒的提法。在文献中查到一篇文章,关于“strict conservation of momentum, orbital angular momentum, and energy ……”^[6],但与我们所表述的含义^[7,8]不同。最近,在本文通信作者与合作者的文章^[7]中,用了物理量 strict conservation(严格守恒)和 statistical conservation(统计守恒)的提法,加上纠缠态和本征值等概念,提供了孤立复合系统的总动量严格守恒和子系统的动量统计守恒的表述方式。我们最近发表的文章,给出了量子系统物理量严格守恒和统计守恒的更确切的表述,尝试了用量子力学概念表述 Compton 散射的能量和动量守恒^[8]。

我们对物理量严格守恒和统计守恒的更确切的表述为^[8]，“对大量相同的哈密顿量 H 不含时间的互相独立的复合系统(系综),分别不同时(同一初态演化到不同时间)测量同一个物理量(子系统的或由子系统的合成的复合系统的物理量),如果得到的结果都相同,称这个物理量严格守恒。特别对于复合系统,子系统的测量值会有所不同,但所有子系统的测量值的合成(代数和,或矢量和,或乘积,例如宇称)为复合系统的同一个本征值。如果得到不同的结果,但是每一个结果以一定概率出现,概率分布和算出的统计平均值不随时间变化,则称这个物理量统计守恒”。满足严格守恒的物理量、统计守恒的物理量与守恒量的关系,可以用图 1 表示。

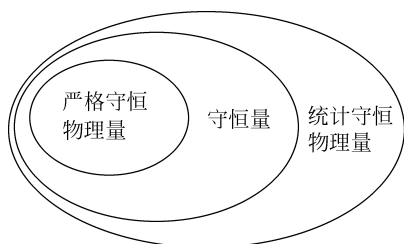


图 1 严格守恒、统计守恒的物理量与守恒量的关系

严格守恒的物理量一定是守恒量,也一定满足统计守恒。反之不然。守恒量都满足统计守恒;还有些非守恒量也满足统计守恒,例如,孤立的复合系统中有相互作用的子系统的动量都不是守恒量(文中第 3 部分说明),但它们各自满足统计守恒。

Dirac 的著作中^[9]提到,孤立系统的 H 在任意旋转下都是不变的,即 H 算符和系统的角动量

算符对易,由此得到角动量守恒。孤立复合系统的总角动量涉及两个或多个角动量的耦合,有自旋-自旋耦合、自旋-轨道耦合、子系统总角动量-子系统总角动量耦合^[10-19]。其中自旋-轨道耦合是一个粒子的两种角动量的耦合。Walter 的书上^[10]推导了由 N 个粒子组成的系统的轨道角动量对时间的微商,等于作用于系统的外力矩;对于孤立系统,外力矩为 0,总角动量守恒。这些是对角动量为守恒量的描述,是三个角动量分量各自平均值的矢量和 $\langle \Psi | (I_x + I_y + I_z) | \Psi \rangle$,并且各分量的取值概率确定。

在许多量子力学书上都得到了两个角动量耦合的磁量子数关系式: $m = m_1 + m_2$,乘以 $\hbar$ 得:

$$m\hbar = m_1\hbar + m_2\hbar \quad (1)$$

即为系统总角动量分量本征值 $m\hbar$ 与子系统角动量分量的本征值 $m_1\hbar$ 和 $m_2\hbar$ 的关系。与动量严格守恒^[7]类似,若系统处于总角动量分量的本征态,式(1)就表示系统总角动量分量满足严格守恒,即子系统的各个角动量分量的本征值可以取不同值,但加起来得到的系统总角动量分量保持不变。文献^[9-19]中,只有在 Walter^[10]和刘觉平^[18]的著作中,把式(1)解释为总角动量分量守恒,其余的作者们没有将其与守恒联系起来。

有些文献讨论的角动量守恒实际是角动量分量的守恒。例如, Alois Mair 等^[20]通过 LG 光实验得到了两个光子的轨道角动量守恒。Walborn 等^[21]在理论上运用了在自发参数下转换过程中两个光子的轨道角动量守恒关系式。Zhu 等^[22]提出了声子携带轨道角动量的假设,从理论上推导了可控的轨道角动量在声子-光子之间交换的表达式,并从实验上验证了该交换。上述文献中讨论的都是近轴近似下的角动量,此时两个光子(或光子和声子)的轨道角动量可以认为是一个方向,他们所讨论的其实还是轨道角动量分量。

本文第 2 部分讨论两粒子系统总角动量分量 J_z 的严格守恒。第 3 部分讨论子系统角动量分量 J_{iz} 的统计守恒。第 4 部分讨论角动量自身 J 及其平方 J^2 的守恒。最后是结论。

2 两粒子系统总角动量分量的严格守恒

这里我们先简单介绍书中如何得到式(1)。在两个粒子的角量子数 j_1, j_2 固定的前提下,系统总角动量平方 J^2 和分量 J_z 的共同本征态可用

耦合表象的基矢 $|j_1 j_2 j m\rangle$ 表示 (其中 $-j \leq m \leq j$, $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$)^[11], 本文用 $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ 表示无耦合表象的基矢。若系统处于一个本征态 $|j_1 j_2 j m\rangle$, 可以用 $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ 展开:

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \quad (2)$$

利用 $J_z = j_{1z} + j_{2z}$ 对式(2)两边运算得:

$$\sum_{m_1 m_2} (m - m_1 - m_2) \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = 0 \quad (3)$$

由于 $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ 是 $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 个相互独立的正交基矢, 因此式(3)中所有系数必为 0, 则

$$m - m_1 - m_2 = 0 \quad (4)$$

乘以 $\hbar$ 得式(1), 即系统总角动量分量严格守恒或子系统角动量分量求和的严格守恒。

下面我们采取具体简化的例子, 考虑一个孤立的无自旋的氢原子系统, 得到式(1)。氢原子的电子与原子核的运动可分为质心运动和相对运动, 相对运动等效为约化质量的单体在中心力场中的运动。由于把氢原子看成孤立系统, 所以可把质心看作静止或作匀速直线运动。取坐标原点在此直线上, 则质心的角动量为零, 就只需考虑相对运动的角动量。求解氢原子的电子与原子核的相对运动的波函数, 再把电子与原子核的坐标代入这个波函数, 得到明显的纠缠态形式。由于径向和角部分波函数可以分离, 并且径向部分对角动量的贡献为 0, 所以我们只考虑相对运动的角部分波函数。

在质心坐标系中, 用球坐标将氢原子的相对运动角部分本征函数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, $-l \leq m \leq l$, 在电子 $Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \varphi_1)$ 和原子核 $Y_{l_2 m_2}(\theta_2, \varphi_2)$ 所组成的角动量分量直积空间中进行展开:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{l_1 l_2} a_{l_1 l_2}^{m_1 m_2} \times Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \varphi_1) Y_{l_2 m_2}(\theta_2, \varphi_2) \quad (5)$$

展开系数:

$$a_{l_1 l_2}^{m_1 m_2} = \frac{1}{(N_{l_1}^{m_1})^2 (N_{l_2}^{m_2})^2} \iiint d\theta_1 d\varphi_1 d\theta_2 d\varphi_2 \times Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l_1 m_1}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{l_2 m_2}^*(\theta_2, \varphi_2) \sin\theta_1 \sin\theta_2 \quad (6)$$

$$N_{l_i}^{m_i} = \iint |Y_{l_i m_i}(\theta_i, \varphi_i)|^2 d\theta_i d\varphi_i \quad (7)$$

这里没有要求 l_1 和 l_2 固定, 其中 (θ_1, φ_1) 和 $(\theta_2,$

$\varphi_2)$ 分别是电子和原子核的角坐标, $N_{l_i}^{m_i}$ 为归一化系数。

电子、原子核及质心总是在一条直线上, 可以取 $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$, 此时存在关系 (图 2 显示了三个极角之间的关系, θ_2 为 op 与 oz 的夹角, 三个方位角 φ, φ_1 和 φ_2 之间的关系与之类似):

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 = \pi - \theta_2, \\ \varphi &= \varphi_1 = \varphi_2 - \pi \end{aligned} \quad (8)$$

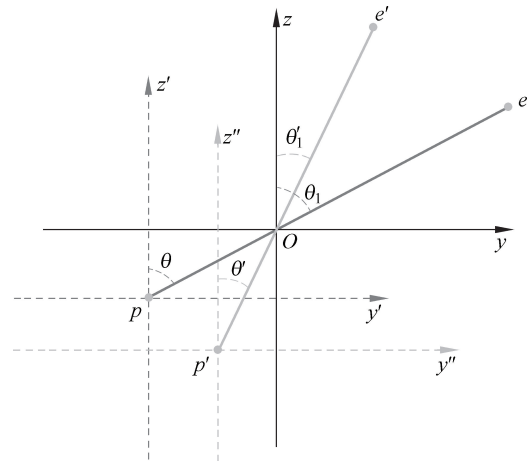


图 2 质心、电子与原子核的角度关系

设 t_0 时刻, 电子在位置 e 的极角坐标为 θ_1, t_1 时刻, 电子在位置 e' 的极角坐标为 θ'_1 。分别以原子核位置 p, p' 为原点, t_0 时刻电子相对原子核位置 p 的极角坐标 $\theta = \theta_1, t_1$ 时刻电子相对原子核位置 p' 的极角坐标 $\theta' = \theta'_1$ 。

当 $\theta_1 \neq \pi - \theta_2$ 或 $\varphi_1 \neq \varphi_2 - \pi$ 时, 所有的 $Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \varphi_1) Y_{l_2 m_2}(\theta_2, \varphi_2) = 0$, 所以, 可在式(6)中添加 $\delta(\pi - \theta_2 - \theta_1) \times \delta(\varphi_2 - \pi - \varphi_1)$, 则:

$$a_{l_1 l_2}^{m_1 m_2} = \frac{1}{(N_{l_1}^{m_1})^2 (N_{l_2}^{m_2})^2} \iint d\theta_1 d\varphi_1 \times P_l^m(\cos\theta) P_{l_1}^{m_1}(\cos\theta_1) P_{l_2}^{m_2}(-\cos\theta_1) \times e^{im\varphi} e^{-im_1\varphi_1} e^{-im_2(\varphi_1+\pi)} \sin\theta_1 \sin(\pi - \theta_1) \quad (9)$$

考虑 $\theta = \theta_1, \varphi = \varphi_1$, 再令 $\cos\theta = x$, 则上式变为

$$a_{l_1 l_2}^{m_1 m_2} = \frac{-1}{(N_{l_1}^{m_1})^2 (N_{l_2}^{m_2})^2} \iint dx d\varphi P_l^m(x) P_{l_1}^{m_1}(x) P_{l_2}^{m_2}(-x) e^{-im_2\pi} \times e^{i(m-m_1-m_2)\varphi} \sqrt{1-x^2} \quad (10)$$

不为 0 的 $a_{l_1 l_2}^{m_1 m_2}$, 须满足

$$m - m_1 - m_2 = 0 \quad (11)$$

选择核与电子连线的方向时, 各个角动量分量都

为0。除此之外,式(11)只对总角动量分量为本征态(本征值为 $m\hbar$)的这个方向上的角动量分量成立。子系统之间的关系可以用纠缠态表示,纠缠态中的每一项都是子系统的直积态,它们的角动量分量之和都等于 $m\hbar$ 。所以,式(11)乘以 $\hbar$ 即为式(1),就表达了系统总角动量分量和全部子系统角动量分量之间的严格守恒关系。第4节会说明,量子力学中的角动量自身一般没有本征值或确定值,其方向也不确定,这与经典力学中的角动量不同。若按经典力学考虑氢原子,其中的原子核 p 与电子 e 和质心共线; p 与 e 的吸引力过质心,相对质心的力矩为零, p 与 e 的总角动量保持不变。但在量子力学中,由角动量在一个方向上的分量的严格守恒式(1),可以说 p 与 e 的角动量分量之间有交换,但每时每刻二者之和都是一个确定值,即复合系统的总角动量分量的本征值。

3 子系统角动量分量的统计守恒

若复合系统中存在相互作用势能,它属于整个系统,并不单独属于哪个子系统,所以,不能定义子系统的能量和 H 算符。按照量子力学,对于子系统物理量,也用其算符与复合系统的 H 算符是否对易,来判断其是否守恒量。若对易,则可以判断它为守恒量,满足统计守恒;反之,若不对易,则它不是守恒量。例如,两粒子孤立系统,对粒子1(子系统)的动量, $[p_1, V(r_1, r_2)] \neq 0$, $[p_1, H] \neq 0$, p_1 就不是守恒量, p_2 也不是。但 p_1 或 p_2 在这个孤立复合系统的任意状态下的平均值和取值的概率分布都不随时间变化,也满足统计守恒^[8]。

与子系统动量有所不同,两粒子孤立系统的相互作用力一般通过质心,一个粒子的角动量分量是守恒量,因 $[j_{iz}, V(r_1, r_2)] = 0$, $i=1,2$, 所以, $[j_{iz}, H] = 0$ 。两粒子孤立系统在某一方向上的总角动量分量的本征态的展开式可简化为:

$$|m\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} a_{m_1 m_2} |m_1\rangle |m_2\rangle \quad (12)$$

$|m\rangle$ 表示系统的总角动量分量本征态,与子系统的本征态 $|m_1\rangle$ 和 $|m_2\rangle$ 做区别,本征值分别为 $m\hbar$ 、 $m_1\hbar$ 、 $m_2\hbar$ 。式(12)右边为纠缠态,两个子系统各自的角动量分量只能统计守恒。

假设子系统1为微观粒子,子系统2是一个大物体。对于子系统1来说,它的角动量分量的不同本征值或本征态是可区分的,但对于子系统2

来说,它的角动量分量的不同本征值或本征态在其变化范围内近似不变,难以区分。例如,取子系统的 $l_1=l_2=5$,若系统的最大磁量子数取值为 $m=5=l$,略去展开系数,则:

$$|5\rangle = |0\rangle |5\rangle + |1\rangle |4\rangle + |2\rangle |3\rangle + |3\rangle |2\rangle + |4\rangle |1\rangle + |5\rangle |0\rangle \quad (13)$$

对于微观粒子1,角动量分量改变 $\hbar$ 是可区分的;但一个大物体的角动量分量改变 $5\hbar$ 难以区分,或者说状态近似不变。此时我们就可以近似地把子系统2(大物体)的角动量部分从纠缠态中提取出来,得到

$$|5\rangle \approx (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle + |5\rangle) |m_2\rangle \quad (14)$$

(14)中的 $|m_2\rangle$ 可以用 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle$ 任意一个来近似表示。对于任意一个 m ,就有近似的直积态:

$$|m\rangle \approx \left(\sum_{m_1} a_{m_1} |m_1\rangle \right) |m_2\rangle \quad (15)$$

这样,粒子1的状态与大物体2的状态近似无关,前者处于近似的角动量分量叠加纯态:

$$\sum_{m_1} a_{m_1} |m_1\rangle \quad (16)$$

因此,单粒子处于这种叠加态,其角动量分量只能统计守恒。式(12)右边为纠缠态,两个粒子分别处于混合态,与式(16)表示的单粒子处于近似叠加纯态不同。

4 角动量自身及其平方的守恒

在经典力学中,若系统所受的合外力矩为零,则角动量守恒。这是系统总角动量的严格守恒,即各个子系统之间因相互作用而发生角动量交换,各自的角动量都会发生变化,但每时每刻的总角动量(所有子系统的角动量的矢量和)是守恒的。

在量子力学中,有角动量矢量 $\mathbf{l}$ 的分量 l_z 和平方 $\mathbf{l}^2$ 的本征值和本征函数,但一般角动量 $\mathbf{l}$ 自身没有本征值和本征函数(除角量子数 $l=0$, $\mathbf{l}$ 的本征值可看作零),这在许多量子力学书中都没有写明^[9-19]。这是由于角动量的三个分量算符 l_x 、 l_y 和 l_z 互不对易,因而没有共同本征态,这使得实验上无法同时测量到它们的本征值,因而无法测量到 $\mathbf{l}$ 的本征值,这导致不能表达 $\mathbf{l}$ 的本征值和本征函数。与普通矢量不同的是,角动量平方的本征值的开方 $\sqrt{l(l+1)}\hbar \neq l\hbar$ (角动量分量的

最大本征值),这说明假设角动量有本征值,也无法表达其大小。

本文讨论的孤立复合系统哈密顿量 H 不含时间,总角动量算符与 H 算符对易,则总角动量自身是守恒量。由于它没有本征值和本征函数,就不能表达严格守恒,只能表达统计守恒。同样,子系统的角动量自身也只满足统计守恒。

设角动量平方的本征值用 λ 表示,两粒子系统的 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$,两边平方得 $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_1$ 。 J^2 算符与 H 算符对易,前者也是守恒量。当用上式对式(2)两边进行运算时,由于交叉项 $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$ 和 $\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{J}_1$ 的存在,使得 $\lambda \neq \lambda_1 + \lambda_2$ 。这样,系统总角动量平方不能严格守恒,只能表达为统计守恒。子系统的角动量平方 J_1^2 和 J_2^2 也只满足统计守恒。

5 结论

相互作用的两粒子孤立系统处于纠缠态。在角动量分量表象下,若系统处于总角动量的一个分量的本征态,则纠缠态中每一项的两粒子角动量分量之和都等于总角动量这个分量本征值,即严格守恒。在这种严格守恒的两粒子纠缠态中,子系统都处于混合态,它们的角动量分量一般是守恒量,满足统计守恒。这可以推广到多粒子的情形。若两粒子之一为大物体,其状态近似不变,纠缠态近似为直积态,则其中微观粒子处于近似的叠加纯态,此时微观粒子的角动量分量统计守恒。系统总角动量自身及其平方是守恒量,前者没有本征值和本征函数,都只满足统计守恒。子系统的角动量自身及其平方都只满足统计守恒。

致谢: 作者感谢中山大学梁世东教授和北京理工大学邵彬教授的有益讨论和评论!感谢北京理工大学李军刚教授给予的资助!

参 考 文 献

- [1] BOHR N, KRAMERS H A, SLATER J C. Über die quantentheorie der strahlung[J]. Zeitschrift für Physik, 1924, 24: 69-87.
- [2] BOHR N. Conservation laws in quantum theory[J]. Nature, 1936, 138: 25-26.
- [3] BOTHE W, GEIGER H, FRANZ H, et al. Zuschriften und vorläufige mitteilungen [J]. Naturwissenschaften, 1925, 13: 440-443.
- [4] BOTHE W, GEIGER H. Über das Wesen des Comptoneffekts; ein experimenteller beitrage zur theorie der strahlung [J]. Zeitschrift für Physik, 1925, 32(1): 639-663.
- [5] 郭奕玲, 沈慧君. 诺贝尔物理学奖 1901—2010[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [6] GILLIS E J. Interaction-induced wave function collapse respects conservation laws[J]. arXiv: 1803.02687, 2018.
- [7] ZENG T H, SUN Z Z, SHAO B. Statistical and strict momentum conservation[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2020, 59(1): 229-235.
- [8] 范乐乐, 王锋, 曾天海. 尝试用量子力学概念表述 Compton 散射的能量和动量守恒. 物理与工程, 2024, 第四期: 5.
- [9] DIRAC P A M. The principle of quantum mechanics[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 115.
- [10] WALTER G. 量子力学: 导论[M]. 3 版 王德民, 汪厚基, 译. 北京: 北京大学出版社, 2001: 295-300.
- [11] 喀兴林. 高等量子力学[M]. 2 版 北京: 高等教育出版社, 2001: 81.
- [12] GRIFFITHS D J. Introduction to quantum mechanics [M]. 2nd ed. Pearson Education Press 2005: 160-185.
- [13] 李有泉. Lectures on Quantum[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2010: 177-181.
- [14] SAKURAI J J, Jim Napolitano. Modern quantum mechanics[M]. Pearson Education Asia Ltd Press AND Beijing World Publishing Corporation, 2011: 157-246.
- [15] 曾谨言. 量子力学[M]. 5 版 北京: 科学出版社, 2013: 294-303.
- [16] 钱伯初. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 217-222, 241-243, 249-257.
- [17] 张永德. 量子力学[M]. 4 版 北京: 科学出版社, 2017: 183-186, 188-193, 264-267.
- [18] 刘觉平. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 140-150.
- [19] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. 量子力学(非相对论理论)[M]. 6 版 北京: 高等教育出版社, 2014: 91-94, 392-410.
- [20] MAIR A, VAZIRI A, WEIHS G, et al. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons[J]. Nature, 2001, 412(6844): 313-316.
- [21] WALBORN S P, DE OLIVEIRA A N, THEBALDI R S, et al. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion [J]. Physical Review A, 2004, 69(2): 023811.
- [22] ZHU Z, GAO W, MU C, et al. Reversible orbital angular momentum photon-phonon conversion[J]. Optica, 2016, 3(2): 212-217.