

平方反比力场中的隐藏对称性

靳晓静 刘波扬

(北京工业大学物理与光电工程学院理论物理研究所, 北京 100124)

摘要 平方反比力场问题中存在一个隐藏的 $SO(4)$ 对称性, 该对称性在经典开普勒问题里体现为一个守恒量——拉普拉斯-隆格-楞次矢量, 在量子力学问题中体现为氢原子能级的超出三维旋转对称性的简并度。本文通过几何图像的方式更加直观地展示了该隐藏对称性, 此外也详细推导了量子力学中与该对称性相对应的升降算符的相关公式。

关键词 平方反比力场; 拉普拉斯-隆格-楞次矢量; $SO(4)$ 对称性; 氢原子能级简并度

THE HIDDEN SYMMETRY IN THE PROBLEM OF INVERSE-SQUARE LAW

JIN Xiaojing LIU Boyang

(Institute of theoretical physics, School of Physics and Optoelectronic Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124)

Abstract In the problem of inverse-square force, there exists a hidden $SO(4)$ symmetry, which is manifested as a conserved quantity the Laplace-Runge-Lenz vector in the classical Kepler problem, and as the degeneracy of hydrogen atom energy levels beyond the three-dimensional rotational symmetry in quantum mechanics. This paper presents a more intuitive representation of this hidden symmetry through geometric imagery. Additionally, the paper derives in detail the relevant formulas for the raising and lowering operators corresponding to this symmetry in quantum mechanics.

Key words inverse-square force field; Laplace-Runge-Lenz vector; $SO(4)$ symmetry; degeneracy of hydrogen atom energy levels

平方反比中心力场问题是一个非常有趣的问题, 在经典力学中, 它也被称为开普勒问题——两个物体以有心力相互作用; 力的大小与距离 r 的平方成反比, 比如求解天体运行轨道。这个问题之所以有趣不仅仅是因为它涵盖了两个非常重要的物理体系——万有引力和库伦力场体系, 还因为平方反比中心力场问题中存在一个隐藏 $SO(4)$ 对称性。这个对称性和开普勒问题中的轨道闭合

性相关, 也和量子力学中氢原子能级的简并度相关。

隐藏对称性的发现和该体系中的一个著名的守恒量有关, 即拉普拉斯-隆格-楞次 (Laplace-Runge-Lenz) 矢量。在平方反比中心力场体系中, 除了我们所熟知的守恒量, 如体系的总能量

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (k > 0) \quad (1)$$

收稿日期: 2024-03-01

作者简介: 刘波扬, 北京工业大学物理与光电工程学院理论物理研究所副教授, byliu@bjut.edu.cn。

引文格式: 靳晓静, 刘波扬. 平方反比力场中的隐藏对称性[J]. 物理与工程, 2024, 34(5): 94-98.

Cite this article: JIN X J, LIU B Y. The hidden symmetry in the problem of inverse-square law[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 94-98. (in Chinese)

角动量 $\mathbf{L}$, 还有一个守恒量叫作拉普拉斯-隆格-楞次矢量, 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}} \quad (2)$$

这个矢量在历史上曾多次被独立发现。最早可以追溯到 1799 年, 拉普拉斯 (P. S. de Laplace) 在他的著作中提出了这个矢量并且推导了它和能量以及角动量的关系^[1], 后来这个矢量又出现于隆格 (C. Runge) 关于矢量分析的著作中^[2]。1924 年, 楞次在利用这个矢量计算旧量子理论中的开普勒问题时提及这个矢量还处于“少有人知”的状态^[3], 并引用了隆格的著作, 所以这个矢量后来被称为隆格-楞次矢量。之后经戈德斯坦 (H. Goldstein) 考证^[4,5], 拉普拉斯更早发现这个矢量, 所以人们也称它为拉普拉斯-隆格-楞次矢量, 本文中沿用这一说法。

1933 年 Hulthén 和 Klein 发现开普勒问题的六个守恒量^[6], 即角动量 L 和拉普拉斯-隆格-楞次矢量 $\mathbf{A}$ 的所有分量, 同构于 $SO(4)$ 群的李代数。之后不久, Fock 在论文中展示了量子开普勒问题中的波函数存在 $SO(4)$ 简并^[7]。至此开普勒问题中的隐藏对称性比较清晰了。

在本文中, 我们将利用几何的方法更加直观地把平方反比力场问题中的隐藏对称性展示出来。此外, 我们也将详细地讨论氢原子能级简并度问题, 氢原子的能级简并度要大于三维旋转对称性所带来的简并度, 这一额外的简并度来源于隐藏对称性, 我们将推导该额外简并度对应的升降算符以及相关运算公式。

1 隐藏对称性

三维空间中开普勒问题的哈密顿量表示为

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (3)$$

对于能量 $E < 0$ 的情况, M. Bander 和 C. Itzykson 发现它的隐藏对称性可以通过一个动量空间的映射展现出来^[8]

$$\mathbf{P} = \frac{2p_0\mathbf{p}}{p_0^2 + p^2}, \quad P_4 = \frac{p^2 - p_0^2}{p_0^2 + p^2} \quad (4)$$

其中, $p_0 = \sqrt{-2mE}$ 。可以证明 $\mathbf{P}$ 以及 P_4 满足如下关系

$$P^2 + P_4^2 = 1 \quad (5)$$

由此可见, 通过引入一个第四维 P_4 , 三维空间的动量就映射到一个四维的单位球面上。式 (4) 中的映射其实是一个球极投影, 在图 1 中我们以二维空间为例来演示球极投影。假设二维平面正好穿过三维球的赤道, 对于二维平面上的任何一个点 $\mathbf{p}$, 可以从单位球的北极点引一条直线到 $\mathbf{p}$ 点, 假设直线和单位球面相交于 $\mathbf{u}$, 这样平面上任意点都和单位球上的点存在一个一一对应关系。

$$\mathbf{u} = \frac{2p_0\mathbf{p}}{p_0^2 + p^2} + \frac{p^2 - p_0^2}{p_0^2 + p^2}\mathbf{n} \quad (6)$$

单位球外的平面上的点映射到上半球, 单位球内的平面映射到下半球, 无穷远点对应北极点。

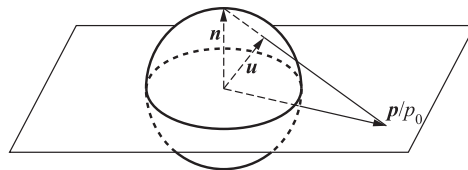


图 1 任意一个矢量 $\mathbf{p}$ 可以通过球极投影投射为单位球面上的一个矢量 $\mathbf{u}$

坐标也可以用类似于动量引入第四维度重新定义如下一个四维坐标

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{mk}\mathbf{p}, \quad R_4 = \frac{p_0}{mk}\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \quad (7)$$

可以证明这四个坐标符合条件

$$R^2 + R_4^2 = 1 \quad (8)$$

所以三维的坐标也映射为一个四维球面。

此外, 可证明四维动量和坐标还存在一个正交关系

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + R_4 P_4 = 0 \quad (9)$$

如果我们把真实的坐标和动量反解出来

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -\frac{k}{2E} [(1 - P_4)\mathbf{R} + R_4\mathbf{P}] \\ p &= \sqrt{-2mE} \frac{\mathbf{P}}{1 - P_4} \end{aligned} \quad (10)$$

并代入 $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$, 可得 $H = E$ 。由此可知, 在平方反比力场中如果总能量为定值, 则该物体的运行坐标和动量符合式 (5) 和式 (8) 的关系, 即开普勒问题的解必然在式 (5) 和式 (8) 所定义的球面上。比如天体运行的椭圆轨道总是可以通过式 (7) 映射为球面上的一条闭合曲线。对于三维

开普勒问题,这个球面是镶嵌在四维空间中的三维球面,所以它具有 $SO(4)$ 对称性,这就是三维开普勒问题中的隐藏对称性。此外,我们必须强调,这是平方反比力场——也即 $1/r$ 势——特有的对称性,比如万有引力势和库伦势都具有这个对称性,对于其他的势场,无法保证式(8)的成立,也就不具有这个 $SO(4)$ 对称性。

式(5)和式(8)中的映射可以推广到 n 维的情况,一个 n 维空间的开普勒问题可以映射到 $n+1$ 维空间中的单位球面上。下面我们以二维开普勒问题为例利用几何图形更为形象地演示这一映射。在极坐标下,运动轨道可以表示为

$$r = \frac{L^2}{mk} \frac{1}{1 + B \cos(\theta - \theta_0)} \quad (11)$$

其中,参数 $B \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$,角动量方向为 $\hat{z}$ 轴方向(此文中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 分别代表 x, y, z 方向的单位矢量),取值范围为 $0 < |L| \ll \sqrt{\frac{mk^2}{2|E|}}$ 。这是一个椭圆轨道,如图 2(a) 中所示。

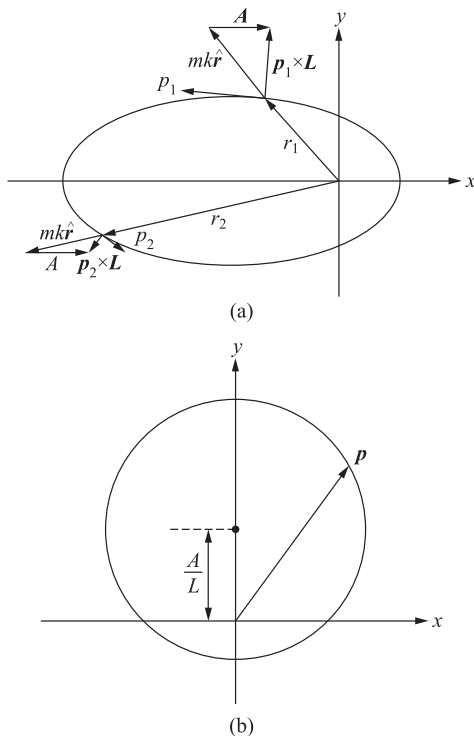


图2 二维开普勒问题中坐标矢量和动量矢量的轨迹
(a) 在椭圆轨道上任意两点的拉普拉斯-隆格-楞次矢量; (b) 椭圆轨道上的动量 $\mathbf{p}$ 的轨迹是一个圆心在 $\frac{mk}{L}\hat{y}$, 半径为 $\frac{mk}{L}$ 的一个圆

通过轨迹式(11)可以计算动量为

$$\mathbf{p} = \frac{mk}{L} B \sin(\theta - \theta_0) \hat{\mathbf{r}} + \frac{mk}{L} (1 + B \cos(\theta - \theta_0)) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (12)$$

不失一般性,我们可以考虑 $\theta_0 = 0$ 的情况,如果改写到直角坐标空间,动量表示为 $\mathbf{p} = \frac{mk}{L} [-\sin\theta \hat{\mathbf{x}} + (B + \cos\theta) \hat{\mathbf{y}}]$ 。如图 2(b) 所示,动量矢量的轨迹正好是一个中心在 $\frac{mk}{L} B \hat{\mathbf{y}}$, 半径为 $\frac{mk}{L}$ 的一个圆周。

简单的计算可以推导出轨道上任意一点的拉普拉斯-隆格-楞次矢量为

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk\hat{\mathbf{r}} = mkB(\cos\theta_0 \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta_0 \hat{\mathbf{y}}) \quad (13)$$

所以对于一个确定的能量 E 和角动量 L ,拉普拉斯-隆格-楞次矢量是一个守恒量,大小为 mkB ,方向由 θ_0 决定。在图 1 中我们展示了 $\theta_0 = 0$ 的情况, $\mathbf{A} = mkB\hat{\mathbf{x}}$,在轨道上取任意两点,拉普拉斯-隆格-楞次矢量都是一个指向 $\hat{\mathbf{x}}$ 的恒矢量。

二维开普勒问题中,如果体系的总能量 E 是定值,角动量 L 的取值范围为 $0 < |L| \ll \sqrt{\frac{mk^2}{2|E|}}$,对于不同的角动量,轨道为一系列椭圆或者圆形,如图 3(a) 所示。所有的轨道都可以通过变换式(7)映射为三维单位球面上一系列大圆,如图 3(b) 所示。在图中我们选了五个特定角动量($L = \pm 0.3, 0.6, \pm 1/\sqrt{2}$)的情况进行了展示,图 3(a) 中平面上的五个轨道(正负角动量的轨道是重合的)映射为图 3(b) 上的五个大圆。如果对角动量取值范围内的所有轨道进行式(7)的映射操作,则这所有的轨道映射为一个完整的单位球面。

二维开普勒问题中除了角动量外还有另外一个自由参数——拉普拉斯-隆格-楞次矢量 $\mathbf{A}$ 的方向,由 θ_0 的值来决定,当 E 和 L 取确定值的时候,拉普拉斯-隆格-楞次矢量 $\mathbf{A}$ 的大小是确定的,只剩方向这一个自由参数。 θ_0 改变时,椭圆轨道长轴的方向会在 xy 平面内转动,然而当 E 和 L 确定时,无论 θ_0 怎么变,该轨道都映射为球面上的同一个大圆,唯一不同的是,对于不同的 θ_0 值,轨道的起始点对应大圆上不同的点。所以对于球面上的任意一个点,我们总可以通过连续变换 L 的大小以及 $\mathbf{A}$ 的方向把它变换到球面上的另一个点。这体现了二维开普勒问题的 $SO(3)$ 对称性。

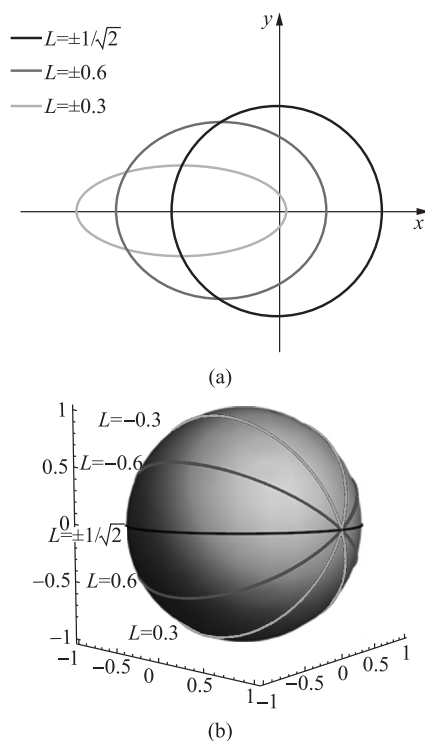


图3 二维开普勒问题中运动轨道到三维单位球的映射
(a) 二维开普勒问题中不同的角动量对应的轨道；(b) 不同的角动量对应的轨道都可以映射到一个三维球面上的大圆

2 SO(4)群李代数与氢原子能级简并度

在量子力学中,角动量的对易关系为

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (14)$$

这一关系正是三维转动群,即SO(3)的李代数,角动量 L_i 对应于三维转动群的三个生成元。现在我们基于拉普拉斯-隆格-楞次矢量的定义在量子力学中引入一个新的算符

$$\mathbf{D} = \sqrt{-\frac{mk}{2E}} \left[\frac{1}{2mk} (\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \quad (15)$$

$\mathbf{D}$ 是一个正比于拉普拉斯-隆格-楞次矢量 $\mathbf{A}$ 的矢量,上式中圆括号内第二项是为了在量子力学中保证算符的厄米性而引入的。利用量子力学的基本对易关系计算可得

$$[L_i, D_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} D_k \quad (16)$$

$$[D_i, D_j] = \frac{H}{E} i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (17)$$

由式(14),式(15)和式(16)可知算符 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{D}$ 的几个分量之间的对易关系不封闭,因为在式(17)中

包含了一个另外的算符 H 。然而如果只考虑某一特定能级对应的子空间,则 H 可以用能量 E 来代替, $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{D}$ 的6个分量构成一个封闭的李代数,这正是SO(4)群的李代数。

氢原子具有三维空间旋转不变性,但是在学习氢原子解的过程中非常让人疑惑的一点是氢原子能级的简并度要高于三维旋转对称性产生的简并度,其实这正是上述SO(4)对称性的体现。一个一般的中心势体系,如球方势阱,能级是由径向量子数 n_r 和角动量量子数 l 决定的,由于 m 的取值范围是 $-l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$,所以能级简并度为 $2l+1$,简并可以通过SO(3)群的生成元 L_i 来产生,既构造一个升降算符, $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$,它作用在某一本征态上可以产生另一个简并态, $L_{\pm} |n_r, l, m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |n_r, l, (m \pm 1)\rangle$ 。

氢原子的本征态表示为 $|n, l, m\rangle$,其中主量子数 $n = n_r + l + 1$ 。氢原子能级为 $E_n = -\frac{mk^2}{2\hbar^2 n^2}$,

只依赖于主量子数 n 。当 m 变化时带来的简并度为 $2l+1$,这很好理解,因为氢原子是一个三维旋转对称的体系。但是主量子数 n 是由径向量子数 n_r 和角动量量子数 l 组合而成,这也会产生额外的简并度。对于每一个能级, l 可取0到 $l-1$ 的任意整数,这是一个 l 级简并。所以总体上氢原子能级的简并度为

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2。$$

l 变化时产生的简并可以通过算符 D_i 来产生。简单可证

$$[D_i, H] = 0 \quad (18)$$

所以除了轨道角动量 L_i 外, D_i 也是守恒量。我们可以基于算符 D_i 构造两个升降算符

$$D_{\pm} = D_x \pm iD_y \quad (19)$$

可证

$$D_{\pm} |n, l, \pm l\rangle = C_{\pm} |n, l+1, \pm(l+1)\rangle \quad (20)$$

其中

$$C_{\pm} = \sqrt{\frac{2l+2}{2l+3}} \sqrt{n^2 - (l+1)^2} \hbar \quad (21)$$

详细计算过程请见附录。当 $D_{\pm}$ 作用到本征态 $|n, l, \pm l\rangle$ 会产生总角动量 l 不同的简并态。所以氢原子的能级的简并度是高于三维旋转对称群SO(3)产生的简并度的,实际上是一个隐藏的SO(4)对称性,它的六个生成元正是 L_i 和 D_i ($i=x, y, z$)。

3 结语

一般的教学中平方反比力场中的隐藏对称性常常通过一个守恒量拉普拉斯-隆格-楞次矢量来体现,这样的展示更加代数,更加抽象,不够直观,学生常感到困惑;此外,与此相关的量子力学中氢原子的能级简并度也常是学生的一个疑问点。本文通过几何图形的方式更加直观地展示了平方反比力场中的隐藏对称性,有利于学生建立清晰的物理图像,另外本文也更加详细地展示了氢原子能级中超出三维旋转对称性的简并度的来源。

附录

根据拉普拉斯-隆格-楞次矢量的定义式(15)可证

$$D^2 = -(L^2 + \hbar^2) - \frac{mk^2}{2E}, \quad (A1)$$

由上式以及对易关系式(16)和式(17)可证

$$[L^2, D_i] = 2i\hbar\epsilon_{ijk}D_jL_k + 2\hbar^2D_i \quad (A2)$$

已知: $D_{\pm} = D_x \pm iD_y$,利用式(A2)可证

$$[L^2, D_+] = 2\hbar(D_+L_z - D_zL_+) + 2\hbar^2D_+ \quad (A3)$$

$$[L_z, D_+] = \hbar D_+ \quad (A4)$$

把式(A3)和式(A4)作用到态 $|n, l, l\rangle$ 上可得

$$L^2D_+|n, l, l\rangle = (l+1)(l+2)\hbar^2D_+|n, l, l\rangle \quad (A5)$$

$$L_zD_+|n, l, l\rangle = (l+1)D_+|n, l, l\rangle \quad (A6)$$

由以上两式可得如下结论

$$D_+|n, l, l\rangle = C_+|n, (l+1), (l+1)\rangle |n, l, l\rangle \quad (A7)$$

C_+ 为待定系数。同理可得

$$\begin{aligned} D_-|n, l, -l\rangle \\ = C_-|n, (l+1), -(l+1)\rangle |n, l, -l\rangle \end{aligned} \quad (A8)$$

此外可证(证明过程中会用到正交关系 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{L} = 0$)

$$[L^2, D_z] = 2\hbar(D_-L_+ + D_zL_z) + 2\hbar^2D_z \quad (A9)$$

利用上式和 $[L_z, D_z] = 0$ 可知

$$D_z|n, l, l\rangle = C_z|n, (l+1), l\rangle \quad (A10)$$

同理可得

$$D_z|n, l, -l\rangle = C'_z|n, (l+1), -l\rangle \quad (A11)$$

C_z 和 C'_z 均为待定系数。下面我们来求解系数 $C_{\pm}$ 、 C_z 和 C'_z 。首先,计算 $D_-D_+ + D_z^2 = -L^2 - \hbar^2 - \frac{mk^2}{2E} - \hbar L_z$ 的 $\langle n, l, l | \cdot | n, l, l \rangle$ 矩阵元可得

$$C_+^2 + C_z^2 = -\frac{mk^2}{2E} - (l+1)^2\hbar^2 \quad (A12)$$

$$\text{已知 } E = E_n = -\frac{mk^2}{2\hbar^2n^2}$$

$$\therefore C_+^2 + C_z^2 = (n^2 - (l+1)^2)\hbar^2 \quad (A13)$$

计算 $[L_+, D_z] = -\hbar D_+$ 的 $\langle n, l+1, l+1 | \cdot | n, l, l \rangle$ 矩阵元可得,

$$\sqrt{2(l+1)}C_z = -C_+ \quad (A14)$$

由(A12)和(A13)两式可求得

$$C_+ = \sqrt{\frac{2l+2}{2l+3}}\sqrt{n^2 - (l+1)^2}\hbar \quad (A15)$$

$$C_z = -\sqrt{\frac{1}{2l+3}}\sqrt{n^2 - (l+1)^2}\hbar \quad (A16)$$

同理可以计算

$$C_- = \sqrt{\frac{2l+2}{2l+3}}\sqrt{n^2 - (l+1)^2}\hbar \quad (A17)$$

$$C'_z = \sqrt{\frac{1}{2l+3}}\sqrt{n^2 - (l+1)^2}\hbar \quad (A18)$$

参 考 文 献

- [1] MARQUIS de LAPLACE P. S. Traité de mécanique céleste [M]. Paris, 1798.
- [2] RUNGE C. Vektoranalysis[C]. Hirzel, Leipzig, 1919: Vol. 1.
- [3] LENZ W. Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung[J]. Zeitschrift für Physik, 1924, 24(1): 197-207.
- [4] GOLDSTEIN H. Prehistory of the "Runge-Lenz" vector [J]. American Journal of Physics, 1975, 43(8): 737-738.
- [5] GOLDSTEIN H. More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector[J]. Am. J. Phys, 1976, 44(11): 1123-1124.
- [6] HULTHÉN L. Über die quantenmechanische Herleitung der Balmerterme[J]. Zeitschrift für Physik, 1933, 86(1-2): 21-23.
- [7] FOCK V. Zur theorie des wasserstoffatoms[J]. Zeitschrift für Physik, 1935, 98(3-4): 145-154.
- [8] BANDER M, ITZYKSON C. Group theory and the hydrogen atom (I)[J]. Reviews of modern Physics, 1966, 38(2): 330.