

存在可去型奇点包含正余弦函数的无穷积分的新算法

文 军¹ 冯丹丹¹ 杨 阳² 文 政²

(¹ 四川民族学院数理与统计学院, 四川 甘孜 626001; ² 陆军边海防学院基础部, 陕西 西安 710108)

摘 要 受到《数学物理方法》教材上计算含有三角函数无穷积分计算公式的启发, 本文主要讨论该类积分的被积函数在实轴上存在可去型奇点的情况。尽管这类问题可以使用围道积分方法完成, 但比较烦琐, 因此我们对这类问题的被积函数进行处理, 从形式上使被积函数实轴上的奇点消失, 使用教材上的公式先完成积分, 再根据特定情况下极限与积分计算顺序可交换理论得到被积函数存在可去型奇点这类积分的值。理论与实际示例证明了我们方法的正确性。

关键词 留数; 围道积分; 三角函数; 奇点

THE NEW ALGORITHMS FOR THE INFINITE INTEGRATION OF THE FUNCTIONS WHO HAVE REMOVABLE SINGULAR POINTS AND CONTAIN SINE AND COSINE FUNCTIONS

WEN Jun¹ FENG Dandan¹ YANG Yang² WEN Zheng²

(¹ School of Mathematics, Physics and Statistics, Sichuan Minzu college, Ganzi Sichuan 626001;

² Department of Basic Courses, Army Academy of Border and Coastal Defence, Xi'an, Shaanxi 710108)

Abstract Inspired by the calculation formulas for infinite integrals containing trigonometric functions in the textbook “Mathematical Physics Methods”, this paper mainly discusses the case where the integrand of such integrals has removable singularities on the real axis. Although this kind of problems can be solved using the integral contour, the method is quite complicated. Therefore, we replace the function integrated by another one which has no singular points on the real axis formally, and we use the formulas which results from the textbook to solve the integration whose function integrated has no singular points on the real axis formally, and then, according to the theory that the order can be exchanged for the integration and limitation under the certain conditions, we can obtain the results of the integration whose function integrated has removable singular points. Finally, the correctness of our method is proven through theoretical and practical examples.

Key words residue; contour integral; trigonometric function; singularity

收稿日期: 2024-04-21

基金项目: 四川民族学院自办科研项目(考虑退激发能情况下超新星爆炸所需 56-Ni 质量的估算, XYZB2310ZB)。

作者简介: 文军, 四川民族学院讲师。

通信作者: 文政, 陆军边海防学院讲师, ZhengWen927566@163.com。

引文格式: 文军, 冯丹丹, 杨阳, 等. 存在可去型奇点包含正余弦函数的无穷积分的新算法[J]. 物理与工程, 2024, 34(5): 23-26, 33.

Cite this article: WEN J, FENG DD, YANG Y, et al. The new algorithms for the infinite integration of the functions who have removable singular points and contain sine and cosine functions[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 23-26, 33. (in Chinese)

“数学物理方法”是物理专业本科生的必修课程,留数定理与围道积分是这门课程的重点内容之一。从教科书上的内容可以看出^[1]:留数定理与围道积分不仅可以计算复数积分,而且可以用于计算一些难以通过牛顿—莱布尼兹定理计算的实数积分^[2]。实际上,留数定理与围道积分的重要性远超过上文所描述的那样,所以吸引了不少教学、科研工作者的研究兴趣。2010年,张毅老师通过围道积分方法表示出 $\int_0^{+\infty} f(x)(\ln x)^n dx$ 这类积分的值,并且以示例展示了公式的用法^[3];同年,北京大学吴崇试教授以大圆引理、留数定理和Jordan引理为基础给出了含三角函数无穷积分的新方法,并且提出了一条新引理^[4];2013年,林琼桂教授研究了被积函数在实数轴上存在本性奇点、包含三角函数的这类积分,并且给出了这类积分的研究方法和计算结果^[2];两年之后,林教授深刻研究了 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x) \sin(qx) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x) \cos(qx) dx$ 的收敛情况,并且给出了收敛条件下的积分值,具有实用价值^[5];2015年,周运清等研究人员利用留数定理计算无穷级数,示范该方法的用法,并且通过示例验证方法的正确性^[6];2019年,王春老师把留数定理用于计算包含无穷多个孤立奇点的函数积分中,用它解决Laplace逆变换问题^[7];邱为钢老师把留数定理用于无穷级数求和的问题之中,用该定理解决某些用高等数学中的方法难以甚至不能计算的级数求和问题^[8];2022年, $\int_0^{+\infty} 1/(1+x^n) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} 1/(1-x^n) dx$ 受到了深入研究,作者给出了这两个积分在 $n \geq 2$ 的整数条件下的结果^[9];2023年,更为复杂的函数的积分 $I_{\pm} = \int_0^{+\infty} x^{a-1}/(1 \pm x^n) dx$ 的算法被巧妙的围道法解决,这篇论文为我们展现了应对多值被积复数函数的积分方法^[10]。不难发现,留数定理与围道积分不仅应用十分广泛,而且往往涉及意义重要的问题。

《数学物理方法》教材上已经给出了积分 $\int_0^{+\infty} f(x) \sin(qx) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} f(x) \cos(qx) dx$ 的计算方法,但是其中有一个重要的条件是 $f(x)$ 在实数轴上处处解析^[1,11]。然而,我们有时候在解决一些问题时可能遇到下面的情况: $f(x)$ 在实数轴上有孤立奇点,但是如果当我们把函数

$f(x)p[\sin(q^1x), \cos(q^2x)]$ 作为一个整体对待时,它在实轴上只有可去型奇点,这样的情况导致我们不可能直接使用教材上的结论,不得不考虑围道积分方法。尽管围道积分法可以解决此类问题,但是选择合理的被积复函数是问题的关键,寻找有效的围道更是核心问题,讨论积分在围道上的值往往比较烦琐。本文之中,我们对这类问题进行研究讨论,对这类问题进行一个变换,把教材上的计算方法延展到对这类问题的计算之中,不但降低了问题的计算难度,而且提高了计算效率。

1 理论推导

1.1 基本定理的介绍

《数学物理方法》教材上给出含三角函数的无穷积分的计算方法^[1,11],它的内容为若 $\int_0^{+\infty} F(x) \cos(qx) dx$ 和 $\int_0^{+\infty} G(x) \sin(qx) dx$ 积分区间为 $[0, +\infty]$;偶函数 $F(x)$ 和奇函数 $G(x)$ 在实轴上没有奇点, $F(z)$ 和 $G(z)$ 在上半复平面只有有限个(n)孤立奇点,除此之外处处解析,当 z 在上半平面和实轴上趋向于 ∞ 时, $F(z)$ 和 $G(z)$ 均一致趋于0,那么则有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F(x) \cos(qx) dx &= i\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [F(b_k) e^{iqb_k}]_{\operatorname{Im}(b_k) > 0} \\ \int_0^{+\infty} G(x) \sin(qx) dx &= \pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [G(b'_k) e^{iqb'_k}]_{\operatorname{Im}(b'_k) > 0} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, b_k 和 b'_k 分别表示 $F(z)$ 和 $G(z)$ 的奇点, $q > 0$, n 表示上半复平面上留数的总个数。

这个定理为我们计算含有正余弦函数的无穷积分提供了极大的便利,但是要求也比较苛刻。因此,我们将对这个定理进行一个延展,使其能够计算更多的模型。

1.2 延展后的模型

我们假定 $f(x)p[\sin(q^1x), \cos(q^2x)]$ 作为一个整体在实数轴上存在有限多个可去型奇点,除此之外处处解析;但是 $f(x)$ 在实轴上存在 N 个孤立奇点,除此之外处处解析,且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p[\sin(q^1x), \cos(q^2x)] dx$ 存在。若存在一个函数 $F(x, c_1, c_2, \dots, c_N)$ (为了方便,表示

为 $F(x, \{c_k\}), k=1, 2, \dots, N$ 和 $p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 满足以下条件

(1)

$$\lim_{\{c_k\} \rightarrow \{a_k\}} F(x, \{c_k\}) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)] = f(x) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)] \quad (2)$$

(2) $F(x, \{c_k\})$ 为单值奇函数或者偶函数, 且除 $\{c_k\} \rightarrow \{a_k\}$ 之外在实轴上没有奇点处处解析; 当 z 在上半平面和实轴上趋向于 ∞ 时, $F(z, \{c_k\})$ 一致趋于 0, 其中 $\{c_k\}, \{a_k\}$ 均为两个实数组。

(3) 实函数 $p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 可以展开成

$$p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)] = d_0 + \sum_l d_l \sin(q_l^1 x) + d'_l \cos(q_l^2 x) \quad (3)$$

且 $d_0, d_l, d'_l, q_l^1, q_l^2$ 均为实数且与 x 无关, q_l^1, q_l^2 均为正数, 那么则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)] dx = \lim_{\{c_k\} \rightarrow \{a_k\}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \{c_k\}) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)] dx \quad (4)$$

对于 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \{c_k\}) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)] dx$ 的计算, 我们须借助留数定理、含三角函数的无穷积分的计算方法、 $p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 的展开式(3)。根据式(4)中的 $F(x, \{c_k\})$ 和 $f(x)$ 满足的条件可以判定, 式(4)中的极限可以与积分交换计算顺序^[12]。

此时, 仍然有三个问题需要我们详细讨论, 同时作为对这个方法的补充说明, 它们关系到这个方法的适用范围。

1) 可去型奇点的定义值不一定就是极限值, 若是所定义出的函数值不等于极限值, 该怎么处理? 回答是: 只要定义出的函数值有限, 上面的计算方法仍然成立。

这种情况的确存在, 例如函数 $\sin x/x$ 在 $x=0$ 处是函数的可去型奇点, 若是补充函数值为 1, 奇点消失; 但是若是重新定义此处函数值为一个有限值 A , 会不会影响最终积分值? 实际上只要 A 为有限值而无论它的具体值等于什么, 均不影响积分值。我们假设一个函数 $r(x)$ 在整个实轴上可积, $x=b_1$ 时是函数的可去型奇点, 重新定义它的函数值为 $r(b_1)=A_1 \neq \lim_{x \rightarrow b_1} r(x)$, 可以证明积

分结果与 A_1 无关。证明如下

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(x) dx = \int_{-\infty}^{b_1-\epsilon} r(x) dx + \int_{b_1+\epsilon}^{+\infty} r(x) dx + \int_{b_1+\epsilon}^{+\infty} r(x) dx$$

其中, ϵ 为一个正数无穷小量, 根据积分的定义^[13]可知

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{b_1-\epsilon}^{b_1+\epsilon} r(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon A_1 = 0$$

因为 A_1 为有限值, 它与无穷小之积的极限为零。在这个证明过程之中, 我们可以看到 A_1 的具体取值并不会干扰积分之值。所以式(2)中的 $F(x, \{c_k\}) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 在 $\{c_k\} \rightarrow \{a_k\}$ 处的极限值只要等于函数 $f(x) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 在可去型奇点处的极限值即可, 而不一定等于函数值, 也没有必要要求 $f(x) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 在可去型奇点处一定是个连续函数, 但是间断点必须是第一类可去型间断点且函数值为有限。这个结论也是对式(4)的一个拓展。

2) 实轴上的可去型奇点必须是有限个。

尽管 $F(x, \{c_k\}) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 已经在实轴上解析无奇点, 对于本文的问题而言, 留数定理只是要求在上半复平面上只有有限个孤立奇点即可, 但是问题的关键在于 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon A_1 = 0$ 并不等同于 $2\epsilon A_1 = 0$ 。有限个无穷小的极限为零^[13], 但无穷个无穷小的极限并不一定为零, 积分就是一个很好的例证。当可去型奇点个数为无穷个时, 不同奇点处每个 A_1 的具体取值必定影响最终的结果。所以, 有限个可去型奇点的这一要求并不是因为留数定理。

3) 我们强调的是 $f(x)$ 在实数轴上只有孤立奇点。

$F(x, \{c_k\}) p[\sin(q^1 x), \cos(q^2 x)]$ 在实轴上解析无奇点, 这就要求 $f(x)$ 在实轴上的奇点为孤立奇点。非孤立奇点($x=0$ 就是函数 $1/\sin(1/x)$ 的非孤立奇点)往往十分复杂, 会导致修复困难甚至不可能, 所以这样的 $F(x, \{c_k\})$ 很有可能不存在, 这会导致我们计算方法的失效。

我们需要明确一个问题: 实轴上存在一阶极点的问题已经在《数学物理方法》教科书^[1,11]上提到过, 且有计算方法。我们问题与教科书上问题的不同之处在于我们并不要求 $f(x)$ 极点的阶数。

1.3 例题示范

例 1 $I = \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{2}x) \sin(x) / [x(x^2 + 1)] dx$
 设

$$\begin{aligned} I(c) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(\sqrt{2}x) \sin(x)}{(x^2 + c^2)(x^2 + 1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin[(1 + \sqrt{2})x]}{(x^2 + c^2)(x^2 + 1)} dx - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin[(\sqrt{2} - 1)x]}{(x^2 + c^2)(x^2 + 1)} dx \\ &= \frac{e^{-(1+\sqrt{2})c} - e^{-(1+\sqrt{2})}}{2(1-c^2)} \pi - \frac{e^{-(\sqrt{2}-1)c} - e^{-(\sqrt{2}-1)}}{2(1-c^2)} \pi \\ I &= \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow 0} I(c) = \frac{\pi}{4} [e^{1-\sqrt{2}} - e^{-(1+\sqrt{2})}] \end{aligned}$$

例 2 $I = \int_0^{+\infty} [\cos(x) - \cos(2x)] / [x^2(x^2 + 1)] dx$
 设

$$\begin{aligned} I(c) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{(x^2 + c^2)(x^2 + 1)} dx \\ \text{求出} \\ I(c) &= \frac{\pi e^{-c}}{c(1-c^2)} + \frac{\pi e^{-1}}{c^2-1} - \frac{\pi e^{-2c}}{c(1-c^2)} - \frac{\pi e^{-2}}{c^2-1} \\ I &= \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow 0} I(c) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e} + \frac{\pi}{2e^2} \end{aligned}$$

以上的例子均可以使用 Mathematica 软件进行验证。

我们的方法可以计算 $\int_0^{+\infty} [\sin(x)/x]^n dx$ 这类积分的值,但对这类问题并不建议大家使用本文的方法,因为这样可能导致较大的计算量。尤其对于比较大的 n 的情况而言,我们更愿意推荐使用吴崇试教授在文献[4]中给出的计算方法。实际上,这类积分可以通过分步积分法和三角函数的和(差)角公式转化成一列 $d_l \int_0^{+\infty} \sin(q_l x) / (q_l x) dq_l x$ 的代数,再根据 $\int_0^{+\infty} \sin(x)/x dx = \pi/2$ 给出最终结果。这种方法计算相对麻烦,但对大多数本科生而言难度更小。

2 结论

在本文中,我们把教材上计算包含三角函数无穷积分的定理进行了延展,给出了在实轴上存

在可去型奇点、包含正余弦函数的无穷积分的计算方法。我们通过对本文计算方法三个补充说明条件的讨论,进一步阐明了本文对被积分函数的诸多限制条件的原因,同时加深初学者对不同种类间断点、奇点的认识,辨别什么样的奇点与情况才会影响积分的值,体现了对奇点、间断点分类的必要性,补充了教科书上没有仔细论述的问题,对学习《高等数学》与《数学物理方法》均有益处。

尽管我们研究的某些问题已经被文献[5]中的模型所包含,但是我们的方法依然具有意义:(1)文献[5]中的计算过程烦琐,对本科学生来讲不太容易被扎实地掌握,不易记忆;(2)即使我们模型中的某些问题只是文献[5]中的某个参数取特值的情况,但是文献[5]中的计算结果涉及无穷级数求和问题,而且级数形式比较复杂,这很可能为化简带来较大的麻烦。尤其,当积分问题来源于物理实际情况,我们更希望结果的形式非常简单,因为这方便我们分析不同参数的作用。我们方法的优势在于容易被掌握,计算过程简洁,对学生以后的应用大有裨益。

参 考 文 献

- [1] 姚端正,梁家宝. 数学物理方法[M]. 北京:科学出版社, 2010.
- [2] 林琼桂. 积分区间内含被积函数本性奇点的若干无穷积分[J]. 大学物理, 2013, 32(4): 1-4.
 LIN Q G. Some infinite integrals involving essential singularities of the integrand[J]. College Physics, 2013, 32(4): 1-4. (in Chinese)
- [3] 张毅. 应用留数定理计算一类实积分[J]. 大学数学, 2010, 26(2): 191-193.
 ZHANG Y. Calculate a class real integrals by using residue theorem[J]. College Mathematics, 2010, 26(2): 191-193. (in Chinese)
- [4] 吴崇试. 计算含三角函数无穷积分的新方法[J]. 大学物理, 2010, 30(2): 53-57.
 WU C S. New approach to evaluate infinite integrals involving sine and cosine functions[J]. College Physics, 2010, 30(2): 53-57. (in Chinese)
- [5] 林琼桂. 含幂函数、有理分式与三角函数的无穷积分: 一个引理及其应用[J]. 大学物理, 2015, 34(5): 1-4.
 LIN Q G. Infinite integrals involving powers, rational functions and trigonometric functions: A lemma and its application[J]. College Physics, 2015, 34(5): 1-4. (in Chinese)
- [6] 周运清,黄文涛,周恺元. 留数定理计算无穷求和及其推广[J]. 大学物理, 2015, 35(4): 26-28.

(下转第 33 页)