

数理方程的微分积分形式

——一道欧洲奥林匹克物理竞赛实验试题的思考

胡瀚文 王 瑾 刘丽飒 董 校

(南开大学物理科学学院, 天津 300071)

摘 要 数学物理方程是一系列描述客观物理规律的偏微分方程。2021 年欧洲奥林匹克物理竞赛(2021EuPhO)中有一道“细杆导热”计算细杆相关参数的实验试题与数学物理方程结合极其紧密。原试题的解答中,命题人利用了 Simpson 方法,在细杆上平均取五个温度采样点并计算温度的平均值从而近似获得了细杆整体温度随时间的变化。而此题目刚好和数学物理方法中的热扩散问题非常相近,因此我们基于数理方程中的热扩散问题对此题目进行梳理,以此题目为契机,分析数理方程的积分形式、微分形式以及 Simpson 积分方法的适用性问题。

关键词 2021 EuPhO; “细杆导热”; 一维有界抛物型数学物理方程; 数值方法; 计算物理

THE INTEGRAL AND DIFFERENTIAL FORM OF MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS

—REFLECTIONS ON A EUROPEAN OLYMPIAD IN PHYSICS COMPETITION EXPERIMENTAL PROBLEM

HU Hanwen WANG Jin LIU Lisa DONG Xiao

(School of Physical Sciences, Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract Mathematical physical equations are a series of partial differential equations that describe objective physical laws. In the 2021 European Olympic Physics Competition (2021EuPhO), there was an experimental question of “heat conduction in a thin rod” which required calculating the relevant parameters of the rod and was closely related to mathematical physics equations. In the original solution to the problem, the proposer used Simpson method to take an average of five temperature sampling points on the thin rod and calculating the average temperature to approximate the overall temperature change of the rod over time. This question is very similar to the thermal diffusion problem in Mathematical Physics Methods, so we sort out this topic based on the thermal diffusion problem in mathematical equations. Taking this question as an opportunity, we analyze the integral form, differential form of mathematical equations and the applicability of Simpson integration method.

Key words 2021 EuPhO; “heat conduction in a thin rod”; one-dimensional bounded parabolic mathematical physics equations; numerical method; computational physics

收稿日期: 2022-11-06

基金项目: 2020 高等学校教学研究项目(DJZW202010hb)。

通信作者: 董校,南开大学物理科学学院副教授, xiao.dong@nankai.edu.cn。

引文格式: 胡瀚文,王瑾,刘丽飒,等. 数理方程的微分积分形式——一道欧洲奥林匹克物理竞赛实验试题的思考[J]. 物理与工程, 2024, 34(5): 16-22.

Cite this article: HU H W, WANG J, LIU L S, et al. The integral and differential form of mathematical physics equations—Reflections on a European Olympiad in Physics Competition experimental problem[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 16-22. (in Chinese)

1 背景和题目介绍

数学物理方程(数理方程)指的是一系列能够描述客观物理规律的偏微分方程,其一般用于描述一个物理量在时间和空间中的分布情况,因此往往同时含有对时间和对空间的偏导数。梁昆森先生在《数学物理方法》^[1]上研究了线性数理方程在不同坐标系下的微分形式和解法,是此门课程的教学重点。但实际情况下,一方面现实中的数理方程往往包含非线性项,使得数理方程的直接解析求解变得困难和几乎不可能;另一方面,我们在很多时候并不要求解物理量在全空间的局部分布,而只需要得到一定范围内的物理量的积分即可,即可以利用空间积分将一部分空间划分为一个独立个体,分析这个个体所受的整体作用。求解空间中物理量的分布和个体所受的整体作用,实际上对应于数理方程的空间微分和积分形式。数理方程微分形式和积分形式的最重要应用即为麦克斯韦方程的积分和微分形式^[2]。

在数理方程的积分形式下,将物理量在一定空间中进行积分。如何在有限的数据情况下,尽可能得到准确的积分值,是计算物理和数理方程领域中的一个重要课题。如图 1 所示,常用的数值积分方法有矩形法,梯形法和 Simpson 方法^[3]。

以被积区间的左右端点 a, b ; 区间的中点 $c = \frac{a+b}{2}$ 为节点,构造二次插值多项式曲线下方面积

$$S = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)]$$

称为 Simpson 求积公式。Simpson 方法的截断误差与数据数量的四次方成反比,其收敛速度远快于梯形法和矩形法,因此得到广泛应用。特别地,对于均匀相隔的 5 个数据 a, b, c, d, e 的体系, Simpson 方法表现为

$$S = \frac{e-a}{12} \cdot [f(a) + 4f(b) + 2f(c) + 4f(d) + f(e)]$$

2 题目和原答案简述

欧洲奥林匹克物理竞赛(以下简称“欧赛”)是自 2017 年起开始举行,欧洲区最盛大的中学生物

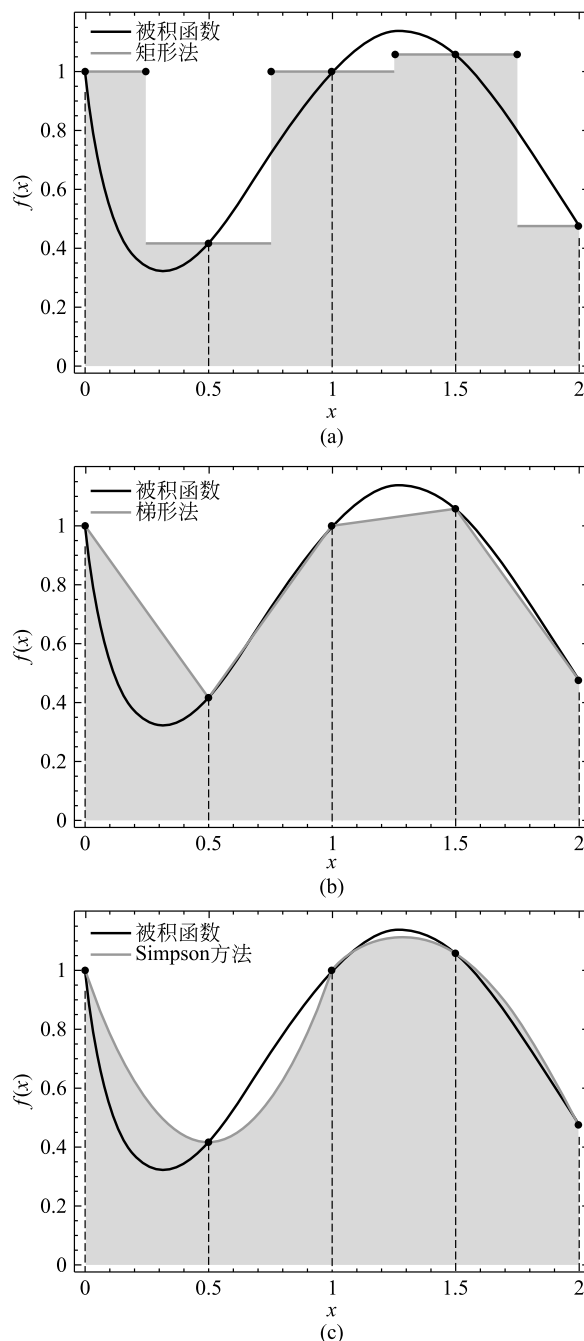


图 1 三种数值积分方法的对比
(a) 矩形法; (b) 梯形法; (c) Simpson 方法

理奥林匹克赛事之一。近年来,受疫情影响,欧洲和国际奥林匹克竞赛变为线上举行,其中实验部分改变了采用模拟实验方式进行。

21 世纪以来,计算模拟已经被认为是继理论和实验之后,第三种物理学研究方法。随着计算机技术的发展,人们可以通过理论建立模型→模型数字化→计算机模拟→结果分析这样的一整套手段来实现基于基本原理的计算模拟工作。现如

今,计算模拟已经成为凝聚态物理,粒子物理等物理学科分支的主要研究方法之一。

在欧赛中,模拟实验往往采用如下模式:题目先给一个物理场景,基于物理场景在程序内部建立一个计算方程或者模型,然后基于该方程或模型,通过一系列输入变量的值给出模拟的定量结果,基于模拟的结果求解场景中的一些物理参数或这些参数的数学关系。这种思路实际上与物理科研中的数值模拟思想相一致。主要考察对物理过程的认识,实验数值分析技巧及其中的物理思想和物理量间的联系。

如附录 A 中所示,2021 年欧赛第二题主要描述了一个杆在一端固定功率加热情况下的温度变化。实际上相近问题在《数学物理方法》教学中是一个典型的例题^[1]。但欧赛试题在此技术上考虑了斯特藩-玻尔兹曼定律 (Stefan-Boltzmann law),因此将课本中的一个线性方程变成了非线性方程,因而不能够通过解析方式求解。题目中通过模拟方法(推测为有限时域差分算法),计算了棒上的温度随时间的演化,并要求答题者求出比热容 C ,热导率 κ ,热传导系数 α 和热辐射系数 β 。同时为了增加题目难度,题目限定每次测量只能给出 5 个点的数值,导致单次测量无法得到整个杆上的详细温度分布。另外需要注意的是,加热器既可以加热也可以停止,即我们既可以探索升温过程中的温度分布也可以探索自然散热降温过程的温度分布。

如附件所示,官方给的题目答案主要采用了积分方法研究了降温过程中的温度平均值变化过程,即将整个杆视为一个整体,温度定义为五个点温度的平均值,散热中的热辐射部分也定义为五个点对应热辐射的平均值。但因为杆上的温度和热辐射空间分布,并不是一个线性趋势,而题目要求每次测量只能测 5 个点,数据量非常有限,因此答案中采用了 Simpson 方法,即若 5 个点的温度测量的数据为 u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 则 $\bar{u} = u_1 + 4u_2 + 2u_3 + 4u_4 + u_5$,同时在答案和评分标准中多次强调了 Simpson 方法的必要性。这个过程看起来是合理的,使用 5 个点的数据推断整个空间内的温度积分,用 Simpson 方法来提高计算精度,而不用考虑更复杂的温度分布问题。但这实际上相当于忽略了原有方程的特点及其表现出的物理规律,脱离了原有题目背景,将题目变成了机械式的数据处理。而且我们后面也会看到,在考虑了温度

分布情况和在适当近似下对方程进行求解之后, Simpson 方法实际上并没有表现出应有的优势。

3 题目解答

由《数学物理方法》教材可知,两端自由散热的情况下,一维无界细杆热传导问题的温度空间分布是若干余弦函数叠加的形式^[1]。因此我们尝试基于一维抛物型数理方程,尽可能准确地计算出细杆的比热、散热常数、辐射率与传导系数。下面开始导出该体系的泛定方程。忽略了圆柱侧面与空气的热传导与热辐射的情况下,由能量守恒知一维考虑热辐射有限长杆的热传导方程满足如下形式

$$\begin{aligned} & C\rho u_t \pi r^2 dx \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) \pi r^2 dx - (2\pi r dx) \alpha (u - u_0) - \\ & (2\pi r dx) \beta \sigma (u^4 - u_0^4) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $C, \rho, r, \kappa, \alpha, \beta$ 依次为细杆的比热容,密度,半径,热导率,空气散热系数与热辐射系数; u, u_0 分别为细杆与环境的热力学温度, σ 为斯特藩-玻尔兹曼常数,进一步化简得

$$C\rho r u_t = r\kappa u_{xx} - 2\alpha(u - u_0) - 2\beta\sigma(u^4 - u_0^4) \quad (2)$$

令

$$a = \frac{\kappa}{C\rho}, \quad b = \frac{2\alpha}{C\rho r}, \quad c = \frac{2\beta\sigma}{C\rho r} \quad (3)$$

热传导方程式(2)化简为

$$u_t = au_{xx} - b(u - u_0) - c(u^4 - u_0^4) \quad (4)$$

考虑到程序给出的模拟数据本身有 0.1K 量级的误差,基于程序数据直接求二阶导数会带来极大误差,因此不能采用直接求二阶导数的做法。题目允许升温(使用电阻丝加热)和降温(自由散热)两种物理过程。解题过程中需要灵活应用升温 and 降温过程,具体解法为通过升温过程求解热传导系数 κ ,比热容 C ,通过降温过程求解空气散热系数 α 和热辐射系数 β 。

3.1 升温过程

升温过程的定解条件为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0 \\ u_x|_{x=l} = 0, u_x|_{x=0} = -\frac{P_0}{\kappa\pi r^2} \end{cases} \quad (5)$$

其中, u_0 为初始温度。根据式(5),可以在加热过程中得到体系的热传导系数 κ 。这里,我们选择加热

过程为 3600s, 即全程加热, 采样间隔为 5s, 选择测量位置为 2cm、3cm、4cm、5cm、6cm (加热电阻丝位置为 0~3cm), 取其中导数 u_x 的最大值。加热功率为 20W、30W、40W、50W、60W 共 5 组数据进行多次测量取平均。注意为了减小误差, 提高精度, 我们求导数 u_x 的时候, 采用 $u_x = \frac{u(x+\Delta h) - u(x-\Delta h)}{2\Delta h}$ 的方法, 这也恰恰是题目答案中要求的。

当加热功率为 20W、30W、40W、50W、60W 时, 得到的热传导系数分别为 395.25W/m·K、430.32W/m·K、398.75W/m·K、351.95W/m·K、424.27W/m·K, 平均值为 400.11W/m·K, 标准答案为 408.00W/m·K, 与我们的结果是非常接近的。

对方程(4)两边进行空间积分, 即

$$\frac{1}{l} \int_0^l u_t dx = a u_x \Big|_0^l - b \left(\frac{1}{l} \int_0^l u dx - u_0 \right) - c \left(\frac{1}{l} \int_0^l u^4 dx - u_0^4 \right)$$

令 $\bar{u} = \frac{1}{l} \int_0^l u dx$, $\bar{u}^4 = \frac{1}{l} \int_0^l u^4 dx$, 则上式转化为

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = a \frac{P_0}{\kappa \pi r^2} - b(\bar{u} - u_0) - c(\bar{u}^4 - u_0^4) \quad (6)$$

这恰恰是原答案的物理基础, 我们将在下一节详细讨论。对于加热的开始阶段, $\bar{u} \approx u_0$, 因此 $\frac{d\bar{u}}{dt} \approx a^2 \frac{P_0}{\kappa \pi r^2}$, 考虑到后续过程 $\bar{u}$ 一定大于 u_0 , 因此为了最大限度减小数值波动带来的误差, 我们求开始一段时间内 $\frac{d\bar{u}}{dt}$ 的最大值, 而后通过对不同功率的 $\frac{d\bar{u}}{dt}$ 进行拟合, 从而得到 a , 进而求出比热容 C 。

我们设置加热过程为 1800s, 采样间隔为 5s; 选择测量位置为 3cm、9cm、15cm、21cm、27cm, 加热功率为 100W、150W、200W、250W、300W, 共获得 5 组数据 (实际上这 5 组数据即为后面 3.2 节降温过程之前的加热数据), 这里我们采用算数平均方法计算 $\bar{u}$, 其所对应的 $\frac{d\bar{u}}{dt}$ 的最大值为 5.77, 4.94, 3.87, 2.92 和 1.95K/s, 拟合得到比热容为 112.52J/(K·kg)。同样我们也可以采用 Simpson

son 方法计算 $\bar{u}$, 其拟合得到的比热容为 115.11J/(K·kg)。相对于 113.00J/(K·kg) 来说, Simpson 方法不仅没有提高精度, 反而精度更差了, 这种现象我们将在后面进行讨论。

3.2 降温过程

题目中除了可以使用加热器升温外, 也可使用降温。我们仍然设置前半时间 1800s 加热, 后半时间 1800s 散热, 即可得到降温过程的温度变化数据。与升温过程不同, 降温散热过程的边界条件为

$$\begin{cases} u|_{t=t_0} = u_i(x) \\ u_x|_{x=l} = 0, u_x|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中, $u_i(x)$ 为加热 1800s 时的温度分布, 我们令 $v = u(x) - u_0$, 则泛定方程式(4)可以化为

$$v_t = a v_{xx} - b v - 4u_0^3 c v \left[1 + \frac{3v}{2u_0} + \left(\frac{v}{u_0} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{v}{u_0} \right)^3 \right] \quad (8)$$

边界条件(7)转化为

$$\begin{cases} v|_{t=t_0} = u_i(x) - u_0 = v_0(x) \\ v_x|_{x=l} = 0, v_x|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

当 $v \ll u_0$ 时, 式(8)可近似为

$$v_t - a v_{xx} + (b + 4cu_0^3)v = 0 \quad (10)$$

此时原有的非线性方程(4)已经转化为线性方程, 根据参考文献[4], 使用分离变量法进行求解得到方程(10)的解为

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \exp \left[- \left(\frac{k^2 \pi^2 a}{l^2} + b + 4cu_0^3 \right) t \right] \cos \frac{k\pi}{l} x \quad (11)$$

考虑题目中一次测量只有 5 个点, 因此我们可以将式(11)给出的级数解展开前 5 阶, 即 1, $\cos \frac{\pi}{l} x$, $\cos \frac{2\pi}{l} x$, $\cos \frac{3\pi}{l} x$ 和 $\cos \frac{4\pi}{l} x$, 5 项, 这种展开是合理的, 因为 $k > 4$ 时, $\frac{k^2 \pi^2 a}{l^2} \gg b + 4cu_0^3$, 高阶项随时间的衰减远大于低阶项, 因此在极短的时间后, 高阶项已经可以忽略 (实际上就算是第二阶 $\cos \frac{\pi}{l} x$ 项, 其衰减实际上也十分迅速, 这种现象对提高计算精度具有重要意义)。因此, 散热过程中解的含时部分可以直接写成

$$v \approx E_0(t) + E_1(t) \cos \frac{\pi}{l} x + E_2(t) \cos \frac{2\pi}{l} x + E_3(t) \cos \frac{3\pi}{l} x + E_4(t) \cos \frac{4\pi}{l} x \quad (12)$$

其中 $E_k(t) (k=0,1,2,3,4)$ 仅为时间的函数,且在 $v \ll u_0$ 的条件下

$$E_k(t) = D_k \exp \left[- \left(\frac{k^2 \pi^2 a}{l^2} + b + 4cu_0^3 \right) t \right]$$

(13)

对于加热 1800s 后,细杆的降温过程,仍取采样间隔为 5s,选择测量位置为 3cm、9cm、15cm、21cm、27cm,加热功率为 300W,求得 $\ln E_k(t)$ 如图 2 所示。其中 $\ln E_0$ 在 500s 之前有一些弯曲,其来源是非线性效应和温度的空间分布,同时也是我们求解非线性项 c 的重要来源。

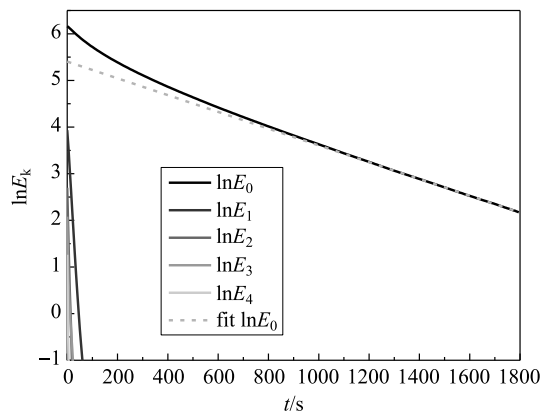


图 2 $\ln E_k$ 关于时间的变化曲线

由图 2 可知,即使在最大加热功率 300W 并包含非线性作用的情况下, $E_1(t) \sim E_4(t)$ 的衰减实际上十分迅速,100s 之后,基本上只剩下 E_0 项,即常数项,换句话说,整个体系的温度在极短的一段时间散热之后,会演变为不随空间变化的一个常数。基于此,可以调整我们的计算方法,进一步优化算法提高精度。

在 $\frac{\pi^2 a}{l^2} \gg b + 4cu_0^3$ (实际上根据题目数据, $\frac{\pi^2 a}{l^2} \approx 46(b + 4cu_0^3)$) 的情况下,散热开始一段时间后,整个体系的温度分布趋于定值,不再随空间变化,即

$u \approx E_0, u_{xx} \approx 0$, 因此式(4)转化为

$$\frac{dE_0}{dt} = -bE_0 - c[(E_0 + u_0)^4 - u_0^4]$$

(14)

我们选择加热过程为 1800s,采样间隔为 5s,选择测量位置为 3cm、9cm、15cm、21cm、27cm,加热功率为 100W、150W、200W、250W、300W 共 5 组数据,对于每组数据的应用式(11)进行分解,求出 E_k ,然后取 500s 之后的数据,利用 13 式进行拟合,得到 b 和 c 的数据,进而求得 α 和 β 。

根据表 1 的计算结果,我们发现当除去最开始降温阶段的数据后, Simpson 实际上并不比上述三角级数法更有效,两者的误差非常接近,几乎没有区别。

4 解法和标准答案的讨论

回到式(6)给出的积分形式,对于升温过程

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = a \frac{P_0}{\kappa \pi r^2} - b(\bar{u} - u_0) - c(\bar{u}^4 - u_0^4)$$

(15)

降温过程,即 $P_0 = 0$ 时,有

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -b(\bar{u} - u_0) - c(\bar{u}^4 - u_0^4)$$

(16)

式(6)与式(16)这两个积分形式的方程实际上就是答案中 Simpson 方法的基础,基于这两个积分方程,我们只需要确定 $\bar{u}$ 与 $\bar{u}^4$ 即可给出整个过程中细杆的温度变化行为,进而求得 a, b, c 三个参数。从这种意义上来说, Simpson 方法取平均值的加权系数方法并没有考虑整个物理体系的温度分布特征,而是机械式地将温度分布视为随机数据,强行取得积分和平均数值,缺少物理上的合理性。

实际上,当我们回顾整个参数的求解过程就

表 1 通过拟合得到的 α 和 β 值

功率	100W	150W	200W	250W	300W	平均值	标准值
$\alpha [W/(m^2 \cdot K)]$ 三角级数法	2.87	2.83	2.91	2.88	2.95	2.89	2.78
$\alpha [W/(m^2 \cdot K)]$ Simpson 方法	2.85	2.80	2.89	2.92	2.94	2.88	满分范围[2.53, 3.03]
β 三角级数法	0.317	0.322	0.312	0.315	0.307	0.315	0.300
β Simpson 方法	0.319	0.325	0.314	0.312	0.308	0.316	满分范围[0.28, 0.32]

注:表中分别采用了式(12)的余弦三角级数展开做法和 Simpson 平均值的做法对比。表中最后一列给出了答案中的标准值及评分标准中要求的取值范围。表中所有数据,取自加热停止 500s 之后。

会发现,无论是初始升温过程求解 a 即比热容,还是后续降温过程求解 b, c , 即棒-空气热扩散系数 α 和热辐射系数 β , 为了保证尽可能的误差最小化,我们选取的时间范围内,数据的空间分布基本已经忽略不计,比如在计算 b, c 时,我们选取散热开始一段时间后的杆上温度分布,此时杆两端和内部的温度已经很接近。在这种数据要求下,无论是 Simpson 方法还是直接求平均的方法,两者的数据结果变得非常相近,甚至有时 Simpson 方法会放大数值误差波动,造成更大的结果偏差。

此题的核心难度实际上是要求在一个不确定性很大的测量体系里面,得到一些有意义的参数数值。尽管题目说明中声称温度的误差值仅为 0.1K,但因为辐射项带来的非线性效应,这个误差在模拟过程中会被进一步放大。两次相同参数的模拟,同一时间同一位置的温度差距最大可以达到数十开尔文。糟糕的数据质量和极大的数据波动性,对我们得到有效的参数数值造成了极大困难,也极大地限制了可以采用的解题方法。比如我们也可以通过式(13)来得到 a , 但是因为 E_1 衰减得过快,约 50s 即衰减到 $1/e$ 以下,导致有效的 E_1 数据过少,得到的 $\ln E_1$ 的斜率存在近 30% 的误差,所以不能作为有效数据进行采信。因此这要求我们尽可能地使用积分方法和大量数据拟合,来消除随机误差,得到相对准确有效的结果。

5 题目的拓展和总结

无独有偶,含线性项的一维有界细杆导热模型不仅仅出现在欧赛中,2021 年 IYPT 青年物理学家的试题中,也存在类似的情形,原试题如附录 B 所示,该题考虑了一根通电保险丝的加热过程,这与参考文献[1]中习题 8.2 节课后习题 7 的模型如出一辙。只不过该题与前文所着重讨论的欧赛试题一样,在线性泛定方程的基础之上增加了非线性项。若假设“保险丝”两端均是第二类齐次边界条件,最终的定解问题可以被表示为

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} + b(u - u_0) + c(u^4 - u_0^4) = \frac{1}{C\rho} I^2 R \\ u_x|_{x=0} = 0 \quad u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (17)$$

其中, u, u_0 分别表示保险丝与环境的热力学温

度, a 是一个与保险丝热传导相关的常数, b 是一个与牛顿冷却系数相关的常数, c 是一个与热辐射系数相关的常数, I 和 R 分别为通过保险丝的电流与保险丝的电阻。该定解问题已经进行了参数的简化。

对于该非齐次非线性定解问题,我们可以首先考虑对应泛定方程的齐次方程,利用之前的分离稳态解以及将方程线性化的方式,近似求得齐次非线性方程的近似解。并最终将泛定方程右边的非齐次项进行三角级数展开的方式来最终保险丝内温度的分布 $u(x, t)$ 。

6 结语

综上所述,我们基于数学物理方程的微分形式和积分形式重点讨论了 2021 年欧赛实验第二题“细杆导热”问题,分析了其中的物理过程,以及如何通过仅有 5 个点的温度测量,得到体系的各个有效物理参数。此题难点是在一个误差极大的体系中得到有效的物理参数,需要我们采用多种积分和多数数据拟合方法进行优化。特别地,此题答案中采用 Simpson 积分法来提高计算精度,但是经过我们的研究发现, Simpson 方法的引入并不能提高计算效率和结果的准确性。而且我们认为相对于忽视其中的物理过程,机械式地使用 Simpson 方法得到参数,基于数理方程思想更有效地分析温度在时间和空间的演化趋势,进而选取合适的取样空间同样重要。

附录

A 2021 年欧赛第二题原题翻译

原试题翻译如下:一个圆柱形均匀的金属棒长 $L=30\text{cm}$, 半径 $r=1\text{cm}$ 。我们并不知道是什么材质的金属。现在将其保持在室温 $T_0=26.9^\circ\text{C}\approx 300\text{K}$ 。这个金属棒质量是 $m=460\text{g}$ 。我们的任务就是测量这个金属棒的导热性质。在金属棒上沿着长度方向不同的位置,我们可以测量温度。在金属棒的左端,有加热装置。如图 3 所示,加热装置从 $x=0$ 到 $x=L_h=3\text{cm}$ 的这一段用程序确定的功率对金属棒进行加热。具体一次加热的时间也可以通过模拟程序来进行控制。最多可以在金属棒上设置 5 个测量温度的点。测量

频率、开始测量的时刻,结束测量的时刻,都可以在模拟程序中设置。模拟程序会把温度读数显示出来。

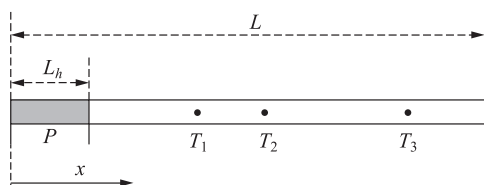


图3 金属圆棒示意图

假设加热器产生的全部热量都会进入金属棒。金属棒对周围空气进行热传导散热以及黑体辐射散热。金属棒对空气的热传导满足规律:单位时间,单位表面积散热和温度差成正比,也就是

$$\frac{dQ}{dSdt} = \alpha(T - T_0) \quad (18)$$

其中, α 是散热常数,整个金属棒表面是同一个 α ,是一个和金属温度无关的常数。黑体辐射部分满足规律

$$\frac{dQ}{dSdt} = \beta\sigma(T^4 - T_0^4) \quad (19)$$

其中, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$, β 是辐射率。也是一个和温度无关的常数。我们还需要进一步分析金属棒内部的热性质。金属棒本身有热容 C 以及热

传导系数 κ 。也就是在金属棒内部的沿着长度方向热流可以写成

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{-\kappa dT}{dx} \quad (20)$$

本实验的任务就是测量金属的热容 C ,单位 $\frac{J}{K \cdot kg}$;热传导系数 κ ,单位 $\frac{W}{m \cdot K}$;还有散热系数 α ,单位 $\frac{W}{m^2 \cdot K}$;辐射率 β 无量纲。要求把误差控制在10%以内。

B IYPT2021 第八题原题

A short length of wire can act as an electrical fuse. Determine how various parameters affect the time taken for the fuse to “blow”.

一根短电线可以充当保险丝。试确定各参数是如何影响保险丝“熔断”所需时间的。

参 考 文 献

- [1] 梁昆淼. 数学物理方法[M]. 4版. 北京:高等教育出版社, 2010.
- [2] 刘觉平. 电动力学[M]. 北京:高等教育出版社, 2004.
- [3] 刘金远. 计算物理学[M]. 北京:科学出版社, 2012.
- [4] 苗明川. 数学物理方法全程导学及习题全解[M]. 4版. 北京:中国时代经济出版社, 2011.
- [4] 徐劳立, 刘宇星, 王越. 航班飞行中的物理问题[J]. 物理与工程, 2019, 29(3): 90-93, 96.
XU L L, LIU X Y, WANG Y. Physical problems in flight [J]. Physics and Engineering, 2019, 29(3): 90-93, 96. (in Chinese)
- [5] 贺宣庆, 崔砚生. 科里奥利力在流量测量中的应用[J]. 物理与工程, 2005, 15(5): 30-36.
HE X Q, CUI Y S. Application for Coriolis forces in flow measurement[J]. Physics and Engineering, 2005, 15(5): 30-36. (in Chinese)
- [6] 马淑红, 侯振, 焦照勇, 等. 基于Python的科里奥利力对物体运动影响的可视化模拟[J]. 物理与工程, 2023, 33(2): 81-87.
MA S H, HOU Z, JIAO Z Y, et al. Visualizing the Coriolis effect on moving objects by numerical simulation based on Python[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(2): 81-87. (in Chinese)
- [7] 项林川, 朱佑新, 王章金, 等. 大学物理[M]. 北京:高等教育出版社, 2021:27-28.
- [8] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 4版. 北京:高等教育出版社, 2018:175-179.
- [9] REGODIĆ D, SPALEVIĆ P, MILIĆ D. Application integration method for the calculation of flight projectile[J]. J. Astronaut. Sci., 2020, 67: 1189-1205.