教学研究

# 说说磁矩在外磁场中的受力之做功和势能

刘 纯[1,2]
([1] 中国科学院理论物理研究所,北京 100190;[2] 中国科学院大学物理科学学院,北京 100049)

**摘 要** 在经典电动力学,磁偶极子(电流环)在外磁场中的受力之做功和电磁感应相关,一般没有势能的概念;在量子力学里,磁偶极子(电子自旋)在外磁场中有势能。我们讨论经典和量子情形的微妙差别,试图给出二者关系的一种自然理解。

**关键词** 磁偶极矩;磁偶极矩在磁场中的能量

# A COMMENT ON THE WORK AND POTENTIAL ENERGY OF A MAGNETIC MOMENT IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

**LIU Chun**
([1] Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Science, Beijing 100190;
[2] School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

**Abstract** In classical electrodynamics, the work of a magnetic dipole (current loop) done by external magnetic field is related to electromagnetic induction, and there is generally no potential energy conceptionally. In quantum mechanics, a magnetic dipole (electron spin) does have potential energy in an external magnetic field. We discuss the subtle differences between classical and quantum situations, and try to understand their relation in a natural way.

**Key words** magnetic dipole; energy of a magnetic dipole in magnetic field

在经典电动力学中,有时会被问到如下问题。我们知道,纯粹磁场的洛伦兹力是不做功的,因为这个力总与带电粒子的速度垂直,那么如何理解两个磁矩(电流环)之间的相互吸引或排斥呢?在这种看似纯粹磁的相互作用下,磁矩的动能是可以有增加或减少的,也就是说这种相互作用力是做了功的,不是说好磁场的洛伦兹力不做功的吗?

对以上问题的简单回答是洛伦兹力不做功,而安培力会做功。但是这样的回答仍是不能让想探寻究竟的人满意,因为安培力并不是一个基本的概念,也有人用磁偶极矩在磁场中有势能来解释。可是既然洛伦兹力不做功,这个势能到底是怎么来的呢?

本文先从经典电动力学基本规律来分析和解释。其规律有两条:一是关于电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 的麦克斯方程组:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\qquad \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0,$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j}\tag{1}$$

其中,源 $\rho$ 和 $\boldsymbol{j}$ 分别为电荷密度和电流密度。

二是关于带电粒子 $q$ 在 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 场中的受力公式:

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{v}$ 是 $q$ 的速度。上式被称为(广义的)洛伦兹力公式,但本文为了简明,只把式(2)右端的第二项,即纯粹磁场 $\boldsymbol{B}$ 的力,叫洛伦兹力。

先分析我们的问题。磁矩可以用一个电流环来表示,其中电流为 $I$,半径为 $a$,厚度为 $h$,电流环所处的磁场由一个螺线管产生,如图 1 所示(当

收稿日期:2024-08-31
作者简介:刘纯,中国科学院理论物理研究所和中国科学院大学物理科学学院研究员,liuc@mail.itp.ac.cn。
引文格式:刘纯. 说说磁矩在外磁场中的受力之做功和势能[J]. 物理与工程,2024,34(5):5-8.
**Cite this article**: LIU C. A comment on the work and potential energy of a magnetic moment in an external magnetic field[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(5): 5-8. (in Chinese)

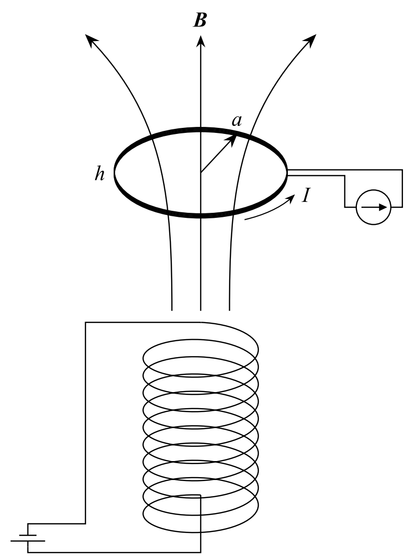


图1 电流环置于螺线管正上方

然螺线管也是一个磁矩)。考虑电流环就水平置于螺线管的正上方,整个系统是关于 $z$ 轴对称的。这样容易从洛伦兹力式(2)得出电流环的受力。首先,$z$ 方向的磁场 $B_z$ 对电流环的合力为0。电流环受非零的力是由于垂直于 $z$ 轴方向的(径向)磁场 $B_{\perp}$。磁场 $B_z$ 在远处会减弱,由式(1)中的第三个方程,

$$B_z(x,y,z+h)\pi a^2-B_z(x,y,z)\pi a^2+2\pi ahB_{\perp}=0$$

因此 $B_{\perp}$ 必须不为零,

$$B_{\perp}=-\frac{a}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}\tag{3}$$

所以整个电流环受到一个 $z$ 方向的力,

$$F_z=-2\pi aIB_{\perp}=m\frac{\partial B_z}{\partial z}\tag{4}$$

其中,$m\equiv I\pi a^2$ 为电流环的磁矩。这与电动力学中磁偶极子在一般磁场中的受力公式一致,即

$$F_i=m_j\partial_iB_j$$

其中,$i,j$ 代表空间三个方向。

我们看到熟知的:磁矩在非均匀磁场中会受力,这个受力来自洛伦兹力的一部分,这也就是所谓安培力。安培力就是在磁场中通电导线受到的力。

我们继续推导。假如 $\boldsymbol{m}$ 为常矢量,则我们可把 $\boldsymbol{m}$ 移入微分号内,

$$\boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})\tag{5}$$

这时我们可以引入一个"势能"$U$,

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U$$

其中

$$U=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}\tag{6}$$

需要强调的是,这个"势能"之所以带引号,是因为它并不一定是真的势能,真的势能有意义在于它来自保守力做功。这里的"势能"是有条件的,即 $\boldsymbol{m}$ 要保持为常矢量。唯有如此,"势能"$U$ 被用来求力时,它才和势能的作用一样。另外,我们知道,上面的"势能"$U$ 还可以用来求出一个大小固定的磁矩 $\boldsymbol{m}$ 在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中受到的转动力矩,

$$\tau=-\frac{\partial U}{\partial\theta}\tag{7}$$

其中 $\theta$ 是磁矩与磁场方向的夹角。

注意,在经典电动力学里,磁矩一般不会是常矢量。这一点非常不同于电偶极矩在外电场中的情形。电偶极矩的势能有意义在于它可以是刚性的,物理上是可以要求电偶极矩是不变的量,一个电偶极子两端的电荷不变化,其长度也可以是刚性固定的。但是磁偶极矩则不同,虽然电流环的面积可以固定,但是环的磁通量变化时,其中的电流会改变,这是因为电磁感应!

现在我们从能量的角度进一步看这个"势能"。如图1,考虑电流环静止不动,螺线管从无限远缓慢移动过来,环中必然产生新的涡旋电场,从而环中有感生电流。为了保持 $\boldsymbol{m}$ 不变,可以让与环连接的电源来调节电流。电流环获得了受磁场作用的"势能",其代价是要用电源对其额外做功 $E^{电源}$,以抵消环路中的因电磁感应产生的新涡旋电场所做之功,环静止且由于洛伦兹力不做功,所以

$$U+E^{电源}=0$$

也就是说,为了保持磁矩不变,这个磁矩在外场中的"势能"本质上是电源克服电磁感应做的功(这里假设无限远处的势能为零)。从公式(6)我们可以容易论证图1系统的总磁相互作用能是 $+\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$,并不是"势能"$U$,见费曼物理学讲义第二卷第15章[1]。我们在此只关心磁矩在外场中的"势能"。

我们再从电流环(磁矩)受力所做的功的角度来看此问题。如图1,在磁场中电流环沿 $z$ 方向平动 $\mathrm{d}z$ 时,$F_z$ 做的元功将为

$$F_z\mathrm{d}z=I\pi a^2\mathrm{d}B_z=-I\varepsilon\mathrm{d}t=-\mathrm{d}U\tag{8}$$

其中用到公式(1)中的第二个公式,$\varepsilon$ 为环中的动

生电动势，$I\varepsilon$ 就是此动生电动势的功率。我们再次看到，电流环受力所做的功，就是电源克服电磁感应做的功。这其实正是我们从高中物理就知道的安培力做负功等于动生电动势做正功，洛伦兹力总是不做功的。

对于图1的例子，从“势能”的角度和从做功的角度其实是物理上等同的，因为电磁学也有相对性原理。因此我们开始提到的所谓安培力做功或者有“势能”的两种解释是等价的，这里说的“势能”就是安培力做的负功，磁矩受的磁场力是洛伦兹力的一部分，而此安培力的做功，或者说磁矩在外磁场中的“势能”，却是和电磁感应相关。

对于任意的电流环在外磁场中受安培力做功的说法比“势能”更具有一般性，因为安培力一般不是保守力，即其做功一般是路径相关的。为了引入安培力的势能，要求磁矩 $\boldsymbol{m}$ 是不变的。但这时由于电磁感应，需要引入电源额外做功，整个系统“机械能”不守恒。

以上就是经典电动力学对于磁矩及其受力做功的知识。但这并不能让我们理解所有的磁现象，比如永磁铁的存在和其在磁场中之受力做功。完整理解物质磁现象还需要量子力学。

讲到这里，会自然出现一个问题。在前面讨论中电流环需要连接电源，以调节、修正电磁感应对磁矩的影响。可是如果是电子呢？电子等基本粒子的磁矩大小是固定的，量子力学告诉我们，电子的自旋1/2，原子的轨道磁矩也是固定的。其实这正是我们前面讨论中总要求磁矩不变的原因之一。把电子放入磁场中时，电磁感应现象也是存在的。电子的磁矩大小总是固定的，但是沿着磁场方向，它的自旋有两个方向，其自旋或磁矩在这两个方向上占据的几率振幅随时间变化，也即其磁矩的几率幅在磁场方向的分量会随时间变化，这就可以体现电磁感应。其实电子总磁矩固定且自旋有两个方向，正是理解物质磁性的关键。

我们也可以先用下面半经典的图像来理解，即把电子看成是一个自转的、角动量大小固定的带电小球。虽然电子的总磁矩的大小不会变化，电磁感应的效果是通过电子的进动来实现的。在均匀磁场中，我们前面的讨论已经说到，具有固定磁矩的带电粒子 $q$ 的转动势能仍由公式(6)给出。电子受到的力矩为 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}$，角动量 $\boldsymbol{J}$ 的大小固定，且 $m=\frac{q}{m_q}J$，其中 $m_q$ 为 $q$ 的质量。

$$mB\sin\theta=J\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

如图2，我们得到进动角速度 $\omega_{\mathrm{p}}$ 为

$$\omega_{\mathrm{p}}\equiv\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{mB}{J}=\frac{q}{m_q}B$$

进动的方向是抗磁的，大小正比于 $B$，这体现了电磁感应。

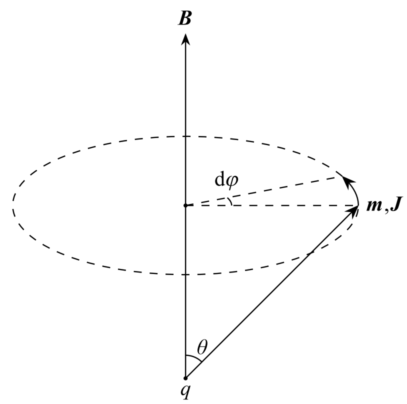

图2 自旋为 $\boldsymbol{J}$ 的带电粒子 $q$ 在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的进动

对于原子轨道磁矩也可以同样处理，只是旋磁比多出1/2因子。设电子有轨道角动量，将它放入磁场，电子的进动频率则为 $\omega_{\mathrm{p}}=\frac{q}{2m_e}B$，这给出一个附加磁矩 $m^{\mathrm{p}}$，

$$m^{\mathrm{p}}=e\,\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{2\pi}\pi a^2=\frac{e^2a^2}{4m_{\mathrm{e}}}B$$

其中，$a$ 为轨道半径，此磁矩的进动方向是抗磁的，这和经典的电磁感应结果是一样的，这就是解释物质抗磁性的拉摩进动。

对于电子在一般磁场中的平动，乃至任意运动，我们应该用量子力学来做。从经典力学的角度，其磁矩之势能似乎不能写成 $-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$ 了，因为虽然总磁矩不变，但其磁矩的分量在变化，不可能像电流环连接电源保持 $\boldsymbol{m}$ 的每个分量不变，也即没有理由像公式(5)那样把 $\boldsymbol{m}$ 移入括号内。但在量子力学中，力学量包括势能是用算符来表达的，电子自旋磁矩算符是 $\boldsymbol{m}=-\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{\sigma}$，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵。此算符不依赖于坐标，可以移入括号内，因而自旋磁矩在磁场中平动的势能，在算符意义上，仍可写成 $-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$。势能这时不用引号了，因为这是真的势能。一个电子磁矩的势能和磁矩分量的

大小由该电子的态或波函数在上述算符作用后给出。注意这时两个电子的总磁相互作用能(算符)自然就是其势能$-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$,这和电偶极子的情况一致了。(对于电子的轨道磁矩在匀强外磁场中,可以有类似的理解,其势能具有同样的形式。)

在经典力学,力是基本的出发点,而在量子力学中,则反过来把势能(算符)作为基本的出发点,而力的概念失去基本性,变为导出性的。这是因为这时我们不再有质点的概念,而是用波函数来描述一个粒子。诚然,在非相对论的量子力学,自旋$\frac{1}{2}$动量为$\boldsymbol{p}$的自由电子哈密顿量是

$$H=\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2}{2m_e}$$

其在磁场中应写为:

$$H=\frac{[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})]^2}{2m_e}$$

其中,$\boldsymbol{A}$为矢量势,$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。这一步等价于取代经典电动力学的力的洛伦兹力公式(2)。从中可以得出自旋磁矩在外磁场中的势能算符确实是$U=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$,在匀强磁场中电子轨道磁矩也有一样的表达式。正是这样的势能,由量子力学,给出了电子在磁场中的运动的描述,例如上面半经典图像说到的进动。

应用到顺磁材料,其在磁场中的磁化自然可以用($-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}$)这样的势能算符作用在该材料的微观量子态上来理解。在这种磁作用下,(未成对儿的)电子的自旋反平行于磁场的态的能量低于其平行磁场的态,因而前者情况的电子数多于后者情况。这样就产生了该材料的磁化。势能算符的净效果是这个磁性材料产生宏观磁矩$\boldsymbol{M}$,方向沿着磁场方向,在磁场中有势能$-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B}$。磁铁在磁场中获得动能是因为此势能的释放。从微观机制上看,在顺磁材料中未成对儿的电子,在大多数的金属材料中是原子最外层的、自由的。只有费米面上的电子才可能被磁化,图3展示出这类金属在磁场中外层自由电子的能级排列,并考虑了热平衡。费米面的能量对应的温度远高于室温,因而这些材料的磁化率或者说$M$,粗略地看,是和费米温度$T_F$相关的,而和温度无关,正比于无量纲的数$mB/(kT_F)$,其中$k$为玻尔兹曼常数。这种情形正是泡利顺磁。

我们看到在经典电动力学,电流环磁偶极矩

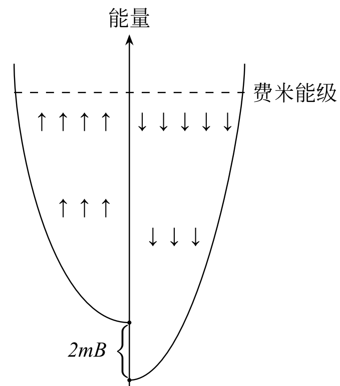


图3　泡利顺磁:左右两边表示电子在不同方向自旋的能级排列

在外磁场中其实并无所谓势能的概念,由于电磁感应,有的只是安培力对其做功。一定要有"势能"的话则需要一定条件,即要保持电流环磁矩不变。这种"势能"讲法的目的之一在于和量子力学连接。在量子力学里,电子自旋磁矩及轨道磁矩是固定的,在外磁场中恰好是有势能的,这正是现实世界物质磁性的基本描述。我们可以说,物质的顺磁性质(且不说铁磁性)是量子物理的宏观体现。对比经典电动力学电场中的电偶极矩的物理,磁场中的磁偶极矩的物理在量子力学下才和它有相似性和对应性。

**致谢**:感谢很多同行讨论,感谢樊兆兴同学帮助作图。

本文的论述大部分来自下列文献。

## 参考文献

[1]　费曼 R P,莱登 R B,桑兹 M. 费曼物理学讲义(第二卷)[M]. 上海:上海科学技术出版社,1981:第15章.
[2]　珀塞尔 E M. 电磁学(伯克利物理学教程第二卷)[M]. 北京:科学出版社,1979.
[3]　俞允强. 电动力学简明教程[M]. 北京:北京大学出版社,2000.
[4]　郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2008.
[5]　汪映海. 电动力学[M]. 兰州:兰州大学出版社,1995.
[6]　曾谨言. 量子力学导论[M]. 北京:北京大学出版社,1998.
[7]　格里菲斯 D J,施勒特 D F. 量子力学概论[M]. 北京:机械工业出版社,2009.
[8]　柯艾 J M D. 磁学与磁性材料[M]. 合肥:中国科技大学出版社,2024.

■