

质点在粗糙曲面上的滑动问题研究

李 都 姜付锦

(黄陂一中, 武汉 黄陂 430300)

摘 要 质点在光滑半球面上的运动是高中一个很好的研究问题。在本文中,我们将此问题推广到任意粗糙曲面上,基于牛顿第二定律推导出速度的显式积分形式,它在某些情况下是有解析表达式的,并且得到了一个通用的表达式来确定质点离开曲面的分离角条件。在最后通过 mathematica 软件详细分析了三条曲线,一个圆、一个抛物线、一个椭圆,得到了几个有趣的结论。

关键词 牛顿第二定律;速度积分形式;分离角;mathematica

RESEARCH ON THE SLIDING PROBLEM OF PARTICLES ON ROUGH SURFACES

LI Du JIANG Fujin

(Huangpi No. 1 Middle School, Huangpi Wuhan, 430300)

Abstract The motion of particles on a smooth hemisphere is a good research problem in high school. In this article, we extend this problem to any rough surface and derive the explicit integral form of velocity based on Newton's second law. It has an analytical expression in some cases and obtains a universal expression to determine the separation angle condition for particles leaving the surface. In the end, three curves, a circle, a parabola, and an ellipse, were analyzed in detail using Mathematica software, and several interesting conclusions were obtained.

Key words Newton's second law; velocity integral; form separation angle; mathematica

在高中物理教学中,常见到质点自光滑球面顶端滑下的理想问题,在论文^[1,4]中已经就质点沿光滑半球面从顶端无初速度下滑过程中在什么位置质点与球面开始分离的问题进行探讨,通过分析和计算得到光滑半球面固定时,分离位置在质点到球心的连线与竖直夹角为 $\arccos(2/3)$ 的位置。现在将问题推广到粗糙的任意曲面上问题会怎么样? 质点以初速度从粗糙曲面上的顶点出发的速度表达式是什么? 在顶点处初速度满足什么条件在顶点处就离开曲面? 在其他位置离开分离角满足什么条件?

1 理论分析

如图 1 所示,在直角坐标系中任意曲面的横截面的曲线方程为 $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, 由牛顿第二定律得

$$\mathbf{N} + \mathbf{f} + m\mathbf{g} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{f}$ 为质点受到的滑动摩擦力, $\mathbf{N}$ 为质点受到曲面的支持力。将上式分别沿切线方向和法线方向分解得

收稿日期: 2023-04-05

基金项目: 2021 年度武汉市教育科学规划重点课题《基于新课程标准的高中情境化命题实践研究》, 课题编号 2021A051。

作者简介: 李都, 华中师范大学物理科学与技术学院本科毕业, 中学一级, 现担任武汉市黄陂一中物理教师, 591663462@qq.com。

引文格式: 李都, 姜付锦. 质点在粗糙曲面上的滑动问题研究[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 221-224.

Cite this article: LI D, JIANG F J. Research on the sliding problem of particles on rough surfaces[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 221-224. (in Chinese)

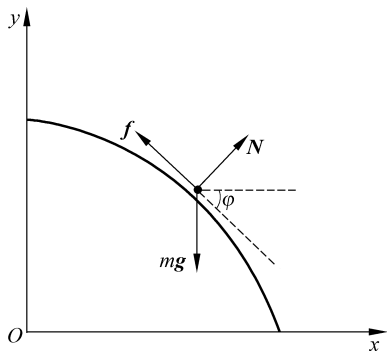


图1 任意曲线受力分析图

$$mg \sin \varphi - \mu N = m \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

$$mg \cos \varphi - N = m \frac{v^2}{\rho} \quad (3)$$

其中, φ 是曲线切向角, v 是质点运动的速率, ρ 是曲线曲率半径, ds 为弧长微分, 由微分几何的知识可得

$$\tan \varphi = -\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} \quad (4)$$

$$\cos \varphi \cdot ds = dx \quad (5)$$

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} \quad (6)$$

由链式法则可得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{v}{\rho} \quad (7)$$

由式(2)、式(3)、式(7)可得

$$g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) = \frac{dv}{d\varphi} \frac{v}{\rho} - \frac{\mu v^2}{\rho} \quad (8)$$

易得

$$\frac{dv}{d\varphi} \frac{v}{\rho} - \frac{\mu v^2}{\rho} = \frac{e^{2\mu\varphi}}{2\rho} \frac{d}{d\varphi} [e^{-2\mu\varphi} v^2] \quad (9)$$

由式(8)、式(9)并积分得

$$v^2 = v_0^2 e^{2\mu(\varphi - \varphi_0)} + 2g e^{2\mu\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) e^{-2\mu\varphi} d\varphi \quad (10)$$

上式与文献[5]中的方程(20)一样, 为质点在任意粗糙曲面上滑动速度的显式积分形式。

当 $N=0$ 时是质点离开曲面的临界条件, 由式(3)得

$$\frac{v^2}{g\rho} = \cos \varphi \quad (11)$$

2 实例分析

使用上文的理论框架下, 本文将分析质点在

三条不同曲线上的运动, 并确定质点离开曲面的条件。在所有的情况下, 我们都假设质点从曲线顶部以初速度 v_0 从曲线的顶部开始运动。

2.1 圆

如图2所示, 用切向角 φ 定义圆的参数方程

$$x = R \sin \varphi, y = R \cos \varphi \quad \left(\text{其中 } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

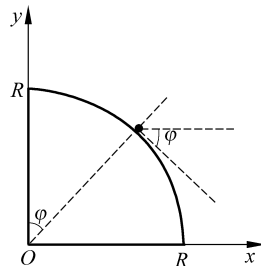


图2 圆

易得圆的曲率半径 $\rho=R$, 代入方程(10)得

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} e^{2\mu\varphi} + 2e^{2\mu\varphi} \int_0^{\varphi} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) e^{-2\mu\varphi} d\varphi \quad (12)$$

利用数学软件 mathematica 对上式进行求解

$$\begin{aligned} \text{In}[1] = & 2 e^{2 \mu \varphi} \int_0^{\varphi} (\underbrace{\sin[\varphi]}_{\text{正弦}} - \mu \underbrace{\cos[\varphi]}_{\text{余弦}}) e^{-2 \mu \varphi} d\varphi \\ \text{Out}[1] = & \frac{2 () (e^{2 \mu \varphi} (1 - 2 \mu^2) + (-1 + 2 \mu^2) \cos[\varphi] - 3 \mu \sin[\varphi])}{1 + 4 \mu^2} \end{aligned}$$

由软件计算结果, 并令

$$H(\varphi) = \frac{v^2(\varphi)}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} e^{2\mu\varphi} + \frac{(2 - 4\mu^2)(e^{2\mu\varphi} - \cos \varphi) - 6\mu \sin \varphi}{1 + 4\mu^2} \quad (13)$$

由离开曲面的临界条件(11), 并令

$$Z(\varphi) = \frac{v^2}{g\rho} = \frac{v^2}{gR} = \cos \varphi \quad (14)$$

在圆的顶点处要使质点不离开圆的最大速度应满足

$$\left(\frac{v_0^2}{gR} \right)^{\max} = 1 \quad (15)$$

在图3中展示了不同初速度和不同动摩擦因数下质点与圆分离的情况, 在初速度为零和动摩擦因数为零的情况下在切向角 $\cos \varphi = \frac{2}{3}$ 时质点离开圆, 这是众所周知的情况。毫不奇怪, 对于给定的初速度, 较大的动摩擦因数会使质点沿表面移动得更远, 并以越来越大的切向角离开。然而, 如果

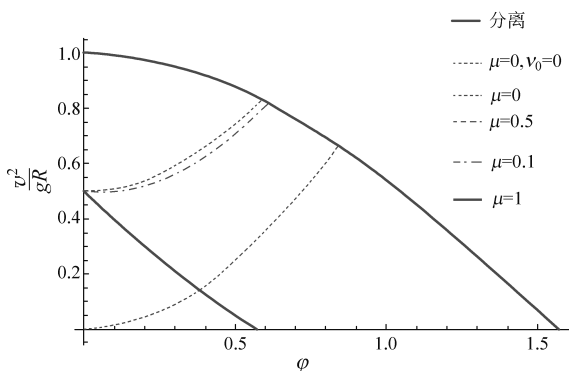


图3 质点在圆上运动速度图像

动摩擦因素太大,质点会停在圆的表面,这一结果表明,对于给定的圆表面,每一个初始速度都有一个临界动摩擦因数,因此当动摩擦因素大于该临界值时,质点最终会停在该表面上。

2.2 抛物线

如图4所示,一个半径为 R 的圆与一抛物线在原点相切,设圆的方程为 $x^2 + (y+R)^2 = R^2$ 在原点附近,圆的方程可为 $y = -R + \sqrt{R^2 - x^2} \approx -\frac{x^2}{2R}$,如果两条曲线在原点的二阶导数相同,则抛物线的曲率半径与圆的半径 R 相同,所以抛物线在原点的曲率半径是 R ,不妨设该抛物线的方程为 $y = -\frac{x^2}{2R}$ 。

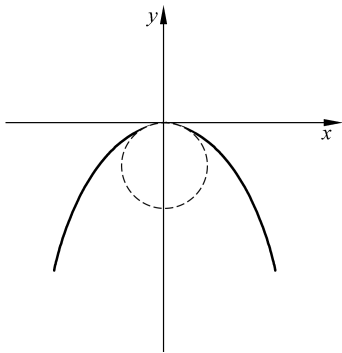


图4 抛物线

由微分几何知识得

$$\cos\varphi \cdot ds = dx \quad (16)$$

$$\tan\varphi = -\frac{dy}{dx} = \frac{x}{R} \quad (17)$$

对式(17)求导得

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = \frac{1}{R} dx \quad (18)$$

由式(16)、式(17)、式(18)得

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{R}{\cos^3\varphi} \quad (19)$$

将其代入方程(10)得

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} e^{2\mu\varphi} + 2e^{2\mu\varphi} \int_0^\varphi \frac{(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)e^{-2\mu\varphi}}{\cos^3\varphi} d\varphi \quad (20)$$

利用数学软件 mathematica 对上式进行求解

$$\text{In}[6] = \int \frac{(\text{Sin}[\varphi] - \mu \text{Cos}[\varphi]) e^{-2\mu\varphi}}{\text{Cos}[\varphi]^3} d\varphi$$

$$\text{Out}[6] = \frac{1}{2} () e^{-2\mu\varphi} \text{Sec}[\varphi]^2$$

由软件计算结果得,并令

$$H(\varphi) = \frac{v^2(\varphi)}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} e^{2\mu\varphi} + \sec^2\varphi - e^{2\mu\varphi} \quad (21)$$

由离开曲面的临界条件(11),并令

$$Z(\varphi) = \frac{v^2}{gR} = \sec^2\varphi \quad (22)$$

在抛物线的顶点处,要使质点不离开抛物线的最大速度应满足的关系为

$$\left(\frac{v_0^2}{gR}\right)^{\max} = 1 \quad (23)$$

只要在顶点质点没有离开抛物线即初速度满足

$$\left(\frac{v_0^2}{gR}\right)^{\max} < 1 \quad (24)$$

由式(21)、式(22)、式(24)易得

$$H(\varphi) < Z(\varphi)$$

即不论动摩擦因数为多少,质点都不会离开抛物线。

2.3 椭圆

如图5所示,定义椭圆的参数方程

$$x = R\gamma\sin\alpha, y = R\cos\alpha \left(\text{其中 } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$$

由微分几何知识得

$$\cos\varphi \cdot ds = dx \quad (25)$$

$$\tan\varphi = -\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\tan\alpha}{\gamma} \quad (26)$$

对式(26)求导得

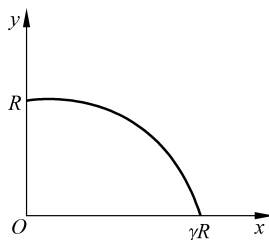


图5 椭圆

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{\gamma \cos^2 \alpha} d\alpha \quad (27)$$

由式(25)、式(26)、式(27)得

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{R\gamma^2}{[\gamma^2 + (1 - \gamma^2)\cos^2 \varphi]^{1.5}} \quad (28)$$

将式(28)代入方程(10)得

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} e^{2\mu\varphi} + 2\gamma^2 e^{2\mu\varphi} \int_0^\varphi \frac{(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)e^{-2\mu\varphi}}{[\gamma^2 + (1 - \gamma^2)\cos^2 \varphi]^{1.5}} d\varphi \quad (29)$$

利用数学软件 mathematica 对上式进行求解

$$\begin{aligned} \text{In[202]} &= \text{Timing}\left[\int_0^\varphi \frac{(\text{Sin}[\varphi] - \mu \text{Cos}[\varphi]) e^{-2\mu\varphi}}{((1 - \beta) * \text{Cos}[\varphi]^2 + \beta)^{1.5}} d\varphi\right] \\ \text{Out[202]} &= \{130.031, \int_0^\varphi \frac{e^{-2\mu\varphi} (-\mu \text{Cos}[\varphi] + \text{Sin}[\varphi])}{(\beta + (1 - \beta) \text{Cos}[\varphi]^2)^{1.5}} d\varphi\} \end{aligned}$$

软件计算很长时间(130s)后原样返回,表明该积分可能不能用初等函数表示。

由离开曲面的临界条件(11),并令

$$Z(\varphi) = \frac{v^2}{gR} = \frac{\gamma^2}{[\gamma^2 + (1 - \gamma^2)\cos^2 \varphi]^{1.5}} \quad (30)$$

在椭圆的顶点处,要使质点不离开椭圆的最大速度应满足的关系为

$$\left(\frac{v_0^2}{gR}\right)^{\max} = \gamma^2 \quad (31)$$

3 结语

本文提供了一种通用的方法来计算质点在具有摩擦的任意凹下表面下滑动的速度。对于不同的曲面,该方法只需要根据简单的微分几何知识

求出曲率半径与切向角之间的关系。读者可以利用该方法计算比如摆线,悬链线等情况加深对该方法的理解。

参 考 文 献

- [1] 刘梅,杨玉超,冯霞. 物体从球面顶点下滑问题的研究[J]. 物理通报, 2012(2): 87-89.
LIU M, YANG Y C, FENG X. Research on the problem of objects sliding down from spherical vertices [J]. Physics Bulletin, 2012(2): 87-89. (in Chinese)
- [2] 谢自芳,王祝盈,陈曙光,等. 质点从可自由移动的凹曲面上滑下的速度、加速度和时间[J]. 大学物理, 2006(5): 12-15.
XIE Z F, WANG Z Y, CHEN S G, et al. The velocity, acceleration, and time of a particle sliding down a freely movable concave surface [J]. University Physics, 2006(5): 12-15. (in Chinese)
- [3] 张韶朗. 关于球顶处以 $(gR) \sim (1/2)$ 的初速平抛定能飞离球面的证明[J]. 物理教师, 2010, 31(12): 28.
ZHANG S L. Proof of the initial velocity of a flat projectile at the top of the ball at $(gR) \sim (1/2)$ that can fly away from the sphere [J]. Physics Teacher, 2010, 31(12): 28. (in Chinese)
- [4] 邹兆贵. 对质点沿光滑半球面从顶端无初速度下滑问题的探讨[J]. 物理教学, 2019, 41(2): 62-64, 41.
ZOU Z G. Exploration of the problem of particles sliding down from the top without initial velocity along a smooth hemisphere [J]. Physics Teaching, 2019, 41(2): 62-64 + 41. (in Chinese)
- [5] GONZÁLEZ-CATALDO F, GUTIÉRREZ G, YÁÑEZ J M. Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction [J]. American Journal of Physics, 2017, 85(2): 108-114.
- [6] PINO L A, CURILEF S. Comment on "Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction" by F. González-Cataldo, G. Gutiérrez, and JM Yáñez, Am. J. Phys. 85(2): 108-114 (2017) [J]. American Journal of Physics, 2018, 86(6): 470-471.

(上接第 220 页)

算结果的最大理论相对偏差就已经小于十万分之三了,和原有的单摆周期公式的三角级数形式对比,我们可以发现,三角级数公式的收敛速度远远慢于 AGM 函数,同样取二阶公式,单摆周期的三角级数展开式的系数的余项为: $\frac{25}{256} \sin^6 \left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, 对

应的最大理论偏差为: $\frac{25}{256} \sin^6 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.0122$, 和

我们给出 AGM 函数的最大理论偏差 1.63×10^{-5} 相差了整整 3 个数量级。同时,在解决具体的振

动周期问题时,本文演示了如何使用能量法和受力分析将滚动周期问题转化成单摆振动周期问题,给出了在非小振动的一般情况下的高精度振动周期,为之后文献调研研究非线性振动问题做出了良好的铺垫。

参 考 文 献

- [1] 舒幼生,胡望雨,陈秉乾. 物理学难题集萃[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2014.
- [2] 舒幼生. 力学[M]. 北京:北京大学出版社,2005.
- [3] 杨维弦. 力学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2002.