

一种新的精确方法求单摆的周期

吴晓明 王 珍

(合肥市第一中学 安徽 合肥 230000)

摘 要 本文以单摆为例,使用高斯 AGM 函数和级数展开方法分别近似求解单摆周期,并和理论值进行了对比。本文最后对一道有关纯滚动的球在圆轨道内周期问题作了巧妙求解。

关键词 纯滚动;类简谐振动;周期;高斯 AGM 函数;级数展开

A NEW ACCURATE METHOD FOR CALCULATING THE PERIOD OF A SIMPLE PENDULUM

WU Xiaoming WANG Zhen

(Hefei No. 1 High School, Hefei, Anhui 230000)

Abstract Taking a simple pendulum as an example, this paper uses Gaussian AGM function and series expansion method to approximate the period of the pendulum, and compares it with theoretical values. It also cleverly solves the period problem of a pure rolling ball in a circular orbit.

Key words pure rolling; quasi harmonic vibration; cycle; Gaussian AGM function; series expansion

对于线性回复力下的振子,已经被人们充分认识理解了,有多种方法可以轻松求解出其所对应的周期^[1]。

比如,求解微分方程可以很轻松地解出线性振子位移时间关系^[2],或者利用线性振子在简谐运动过程中的满足机械能守恒定律的特性,依据机械能守恒定律,列出速度位移关系,然后移项做积分即可轻易得到位移时间关系^[3],进而求得线性振子的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1)$$

但是当问题变得复杂之后,比如当回复力不再是线性时,某些问题可以采用线性近似进行求解。当我们想进一步探究一些非线性回复力作用

下振子的运动周期时,有两种思路,一种是数值求解,另一种是通过定义一个快速收敛的级数进行求解。

本文将基于第二种思路探究单摆模型,由此我们将对比传统的级数法和高斯 AGM 函数在求解单摆周期问题上的优劣,并且根据 AGM 函数方法给出单摆周期的近似公式,将近似公式和数值方法进行对比,最终将该公式应用在具体的问题上。

1 基本思想

无阻尼单摆运动方程为

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin\theta = 0 \quad (2)$$

将上式作简单变换,其中角加速度项可做

收稿日期: 2023-12-31

作者简介: 吴晓明,合肥市第一中学中学高级教师,287286451@qq.com。

引文格式: 吴晓明,王珍. 一种新的精确方法求单摆的周期[J]. 物理与工程,2024,34(4):217-220,224.

Cite this article: WU X M, WANG Z. A New accurate method for calculating the period of a simple pendulum[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 217-220, 224. (in Chinese)

代换

$$ml \frac{d}{dt} \dot{\theta} = ml \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \dot{\theta} = ml \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \dot{\theta} \quad (3)$$

故可得

$$ml \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \dot{\theta} = -mg \sin(\theta) \quad (4)$$

移项即可得到

$$ml \dot{\theta} d\dot{\theta} = -mg \sin(\theta) d\theta \quad (5)$$

两边积分即可得到

$$\frac{1}{2} ml \dot{\theta}^2 = mg (\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (6)$$

对得到的角速度进行简单变换可得结果如下

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4g}{l} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} \quad (7)$$

对角速度倒数积分可得运动周期

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 x}} \quad (8)$$

对于此时的运动周期,有两种求解思路,一种是直接使用级数展开,利用广义二项式定理将根式展开后积分,即可得到单摆周期关于最大振动角的函数关系的级数表达形式。

另一种求解思路则是借助高斯 AGM 函数,取高斯 AGM 函数第 n 次处理后的结果作为 n 次展开式。

2 广义二项式定理与单摆周期的级数

牛顿广义二项式定理如下

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} C_n^i x^i \quad (9)$$

其中

$$C_n^i = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n+1-i)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times i} \quad (10)$$

由此可以将根式展开

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 x}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 x + \frac{3}{8} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \sin^4 x + \\ & \quad \frac{5}{16} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} \sin^6 x + \cdots \end{aligned} \quad (11)$$

考虑到

$$(-1)^i C_{-\frac{1}{2}}^i$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^i \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2i-1}{2}\right)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times i} \\ &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2i-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2i} \end{aligned} \quad (12)$$

考虑正弦函数 n 次方定积分公式

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} \end{aligned} \quad (13)$$

可以得到单摆周期的级数表达式

$$\begin{aligned} T &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \times \frac{3\pi}{16} + \right. \\ & \quad \left. \frac{5}{16} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} \times \frac{5\pi}{32} + \cdots \right) \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2i-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2i} \right)^2 \times \right. \\ & \quad \left. \sin^{2i} \frac{\theta_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

3 Landen 变换与 AGM 函数

高斯 AGM 函数定义如下

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (15)$$

引入 Landen 变换

$$2Rd\alpha \frac{\sqrt{R^2 - a^2 \sin^2 \beta}}{R} = d\beta \sqrt{a^2 + R^2 + 2Ra \cos \alpha} \quad (16)$$

代入椭圆函数

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} \quad (17)$$

易证

$$I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1}) \quad (18)$$

考虑到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M(a, b) \quad (19)$$

可知

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M} \quad (20)$$

对于单摆周期的椭圆函数表达式,分别取 a_1 ,

a_2, a_3 作为 $\lim$ 的近似值, 可以计算出单摆周期的近似公式如下

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{a_n} \quad (21)$$

其中

$$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1 + \cos \frac{\theta_0}{2}}{2} \quad a_2 = \frac{\left(1 + \sqrt{\cos \frac{\theta_0}{2}}\right)^2}{4} \quad (22)$$

使用 MATLAB 可作图, 如图 1、图 2 所示。

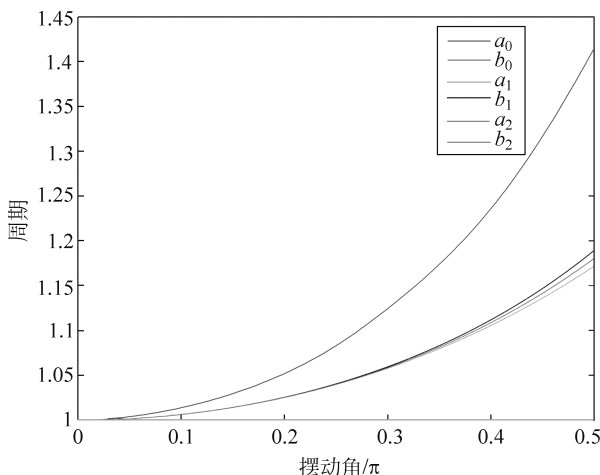


图 1 周期公式与最大摆动角的关系

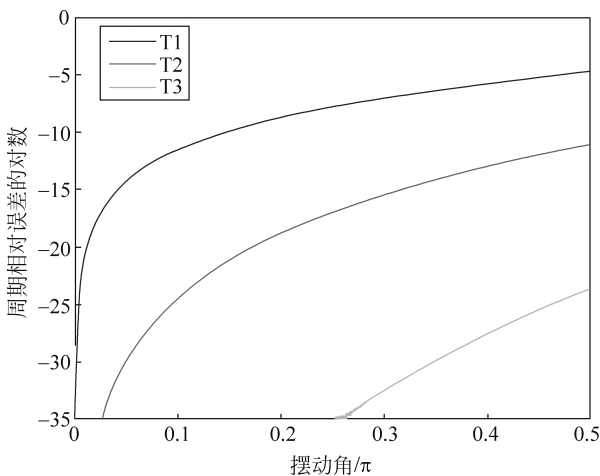


图 2 周期公式相对误差对数与摆动角度的关系

在 $0 - \frac{\pi}{2}$ 的摆动角度范围内, 二阶周期公式的最大理论相对偏差

$$\max(\text{abs}(1./a_2 - 1./b_2))/2 = 3.2774/2e-05 \quad (23)$$

对比这几个近似公式和单摆周期的级数表达

式, 可以明显发现 AGM 函数导出的近似公式收敛速度远快于暴力展开后积分得到的级数, 而且注意到根据 AGM 函数导出的二阶近似公式在摆动角 $0 - \frac{\pi}{2}$ 的范围内最大理论相对偏差已经小于十万分之三, 考虑到实际测量误差和单摆无阻尼近似带来的误差, 已经可以认为该周期近似公式代表了真实的单摆运动周期。

4 应用

例题(第 34 届全国中学生物理竞赛复赛第一题) 一个半径为 r 、质量为 m 的均质实心小圆柱被置于一个半径为 R 、质量为 M 的薄圆筒中, 圆筒和小圆柱的中心轴均水平, 横截面如图 3 所示。重力加速度大小为 g 。试在下述两种情况下, 求小圆柱质心在其平衡位置附近做微振动的频率。

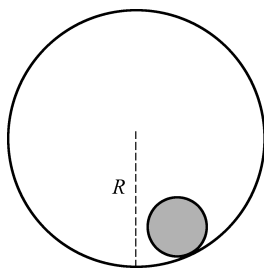


图 3 复赛第一题示意图

(1) 圆筒固定, 小圆柱在圆筒内底部附近做无滑滚动;

(2) 圆筒可绕其固定的光滑中心细轴转动, 小圆柱仍在圆筒内底部附近做无滑滚动。

解析: 在第一问中, 小圆柱做纯滚动, 大圆柱保持静止, 只需计算出小圆柱转动动能和势能, 并将体系能量写成关于小圆柱质心转动角的函数, 即可将题目变换成类似单摆滚动问题。对于第二问, 小圆柱滚动时, 大圆筒也将滚动, 结合受力分析, 可以定出大圆柱和小圆柱转动角关系, 进而计算出小圆柱转动动能、大圆柱转动动能以及小圆柱势能, 并将体系总能量写成关于小圆柱质心转动角的函数, 即可将题目再次变换成类似单摆滚动问题。

求解: 在第一问中, 设小圆柱质心相对大圆柱摆动角度为 α , 小圆柱转动角度为 β , 则有几何关系

$$\alpha R = (\beta + \alpha)r \quad (24)$$

由此

$$\beta = \frac{R-r}{r}\alpha \quad (25)$$

$$\text{令} \quad \omega = \dot{\beta} \quad (26)$$

则

$$\omega = \frac{R-r}{r} \dot{\alpha} \quad (27)$$

由此可以写出整个体系的能量

$$E = -mg(R-r)\cos\alpha + \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (28)$$

化简

$$E = -mg(R-r)\cos\alpha + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times m(R-r)^2 \dot{\alpha}^2 \quad (29)$$

对比系数可知,只需

$$l' = \frac{3}{2}(R-r) \quad m' = \frac{2}{3}m \quad (30)$$

这个问题即可完全转化成一个单摆摆动问题,周期代入单摆近似公式可得

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} \frac{1}{a_n} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}} \frac{1}{a_n} \quad (31)$$

考虑到 n 取 2 时,式(31)和数值积分得到的精确公式的最大理论相对偏差已经小于十万分之三,因此代入 $n=2$,其中 θ_0 代表在圆柱参考系中,摆的最大振幅。

$$T = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}} \times \frac{4}{\left(1 + \sqrt{\cos \frac{\theta_0}{2}}\right)^2} \quad (32)$$

根据题干中“小圆柱做微振动”条件可知, θ_0 趋近于 0,故而 $\cos\theta_0=1$,则

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} \quad (33)$$

对于第二问,本文采用受力分析来求解。设小圆柱转动角度为 α_2 ,小圆柱质心转动角度 α ,大圆柱转动角度 α_1 ,则满足几何关系

$$(\alpha + \alpha_2)r = (\alpha + \alpha_1)R \quad (34)$$

令

$$\omega = \frac{\partial}{\partial t} \alpha_2 \quad \Omega = \frac{\partial}{\partial t} \alpha_1 \quad (35)$$

设小圆柱和大圆筒间摩擦力为 f

考虑到圆盘转动惯量为 $\frac{1}{2}mr^2$,则有

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha_2 = \frac{fr}{\frac{1}{2}mr^2} \quad (36)$$

考虑到圆柱转动惯量为 MR^2 ,则有

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha_1 = \frac{fR}{MR^2} \quad (37)$$

对几何关系式求两阶导数可得

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha_1 r - \frac{d^2}{dt^2} \alpha_2 R = \frac{d^2}{dt^2} \alpha (R-r) \quad (38)$$

又由受力分析可得

$$f - mg \sin(\alpha) = ma = m(R-r) \frac{d^2}{dt^2} \alpha \quad (39)$$

联立上述四式可得

$$-g \sin(\alpha) = \frac{m+3M}{m+2M} (R-r) \frac{d^2}{dt^2} \alpha \quad (40)$$

考虑到单摆情况中的运动方程

$$-g \sin(\theta) = l \frac{d^2}{dt^2} \theta \quad (41)$$

可知,只需将我们前述计算公式中的 l 用 $\frac{m+3M}{m+2M}(R-r)$ 替换即可获得该情况下的大幅振动的精确周期公式。

$$\begin{aligned} T_n &= 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} \frac{1}{a_n} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{(6M+m)M}{(2M-m)^2} (R-r)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{m+3M}{m+2M} \frac{(R-r)}{g}} \frac{1}{a_n}} \end{aligned} \quad (42)$$

考虑到 n 取 2 时,式(42)和数值积分得到的精确公式的最大理论相对偏差已经小于十万分之三,因此代入 $n=2$,其中 θ_0 代表在圆柱参考系中,摆的最大振幅。

$$T = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m+3M}{m+2M} \frac{(R-r)}{g}} \frac{4}{\left(1 + \sqrt{\cos \frac{\theta_0}{2}}\right)^2} \quad (43)$$

根据题干中“小圆柱做微振动”条件可知, θ_0 趋近于 0,故而 $\cos\theta_0=1$,则

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(m+2M)g}{(m+3M)(R-r)}} \quad (44)$$

5 结语

本文使用高斯 AGM 函数方法求解得到了单摆问题的高精度周期公式,仅仅取到二阶近似,计

(下转第 224 页)

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{\gamma \cos^2 \alpha} d\alpha \quad (27)$$

由式(25)、式(26)、式(27)得

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{R\gamma^2}{[\gamma^2 + (1 - \gamma^2)\cos^2 \varphi]^{1.5}} \quad (28)$$

将式(28)代入方程(10)得

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{v_0^2}{gR} e^{2\mu\varphi} + 2\gamma^2 e^{2\mu\varphi} \int_0^\varphi \frac{(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)e^{-2\mu\varphi}}{[\gamma^2 + (1 - \gamma^2)\cos^2 \varphi]^{1.5}} d\varphi \quad (29)$$

利用数学软件 mathematica 对上式进行求解

$$\begin{aligned} \text{In[202]} &= \text{Timing}\left[\int_0^\varphi \frac{(\text{Sin}[\varphi] - \mu \text{Cos}[\varphi]) e^{-2\mu\varphi}}{((1 - \beta) * \text{Cos}[\varphi]^2 + \beta)^{1.5}} d\varphi\right] \\ \text{Out[202]} &= \{130.031, \int_0^\varphi \frac{e^{-2\mu\varphi} (-\mu \text{Cos}[\varphi] + \text{Sin}[\varphi])}{(\beta + (1 - \beta) \text{Cos}[\varphi]^2)^{1.5}} d\varphi\} \end{aligned}$$

软件计算很长时间(130s)后原样返回,表明该积分可能不能用初等函数表示。

由离开曲面的临界条件(11),并令

$$Z(\varphi) = \frac{v^2}{gR} = \frac{\gamma^2}{[\gamma^2 + (1 - \gamma^2)\cos^2 \varphi]^{1.5}} \quad (30)$$

在椭圆的顶点处,要使质点不离开椭圆的最大速度应满足的关系为

$$\left(\frac{v_0^2}{gR}\right)^{\max} = \gamma^2 \quad (31)$$

3 结语

本文提供了一种通用的方法来计算质点在具有摩擦的任意凹下表面下滑动的速度。对于不同的曲面,该方法只需要根据简单的微分几何知识

求出曲率半径与切向角之间的关系。读者可以利用该方法计算比如摆线,悬链线等情况加深对该方法的理解。

参 考 文 献

- [1] 刘梅,杨玉超,冯霞. 物体从球面顶点下滑问题的研究[J]. 物理通报, 2012(2): 87-89.
LIU M, YANG Y C, FENG X. Research on the problem of objects sliding down from spherical vertices [J]. Physics Bulletin, 2012(2): 87-89. (in Chinese)
- [2] 谢自芳,王祝盈,陈曙光,等. 质点从可自由移动的凹曲面上滑下的速度、加速度和时间[J]. 大学物理, 2006(5): 12-15.
XIE Z F, WANG Z Y, CHEN S G, et al. The velocity, acceleration, and time of a particle sliding down a freely movable concave surface [J]. University Physics, 2006(5): 12-15. (in Chinese)
- [3] 张韶朗. 关于球顶处以 $(gR) \sim (1/2)$ 的初速平抛定能飞离球面的证明[J]. 物理教师, 2010, 31(12): 28.
ZHANG S L. Proof of the initial velocity of a flat projectile at the top of the ball at $(gR) \sim (1/2)$ that can fly away from the sphere [J]. Physics Teacher, 2010, 31(12): 28. (in Chinese)
- [4] 邹兆贵. 对质点沿光滑半球面从顶端无初速度下滑问题的探讨[J]. 物理教学, 2019, 41(2): 62-64, 41.
ZOU Z G. Exploration of the problem of particles sliding down from the top without initial velocity along a smooth hemisphere [J]. Physics Teaching, 2019, 41(2): 62-64 + 41. (in Chinese)
- [5] GONZÁLEZ-CATALDO F, GUTIÉRREZ G, YÁÑEZ J M. Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction [J]. American Journal of Physics, 2017, 85(2): 108-114.
- [6] PINO L A, CURILEF S. Comment on "Sliding down an arbitrary curve in the presence of friction" by F. González-Cataldo, G. Gutiérrez, and JM Yáñez, Am. J. Phys. 85(2): 108-114 (2017) [J]. American Journal of Physics, 2018, 86(6): 470-471.

(上接第 220 页)

算结果的最大理论相对偏差就已经小于十万分之三了,和原有的单摆周期公式的三角级数形式对比,我们可以发现,三角级数公式的收敛速度远远慢于 AGM 函数,同样取二阶公式,单摆周期的三角级数展开式的系数的余项为: $\frac{25}{256} \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$, 对

应的最大理论偏差为: $\frac{25}{256} \sin^6\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.0122$, 和

我们给出 AGM 函数的最大理论偏差 1.63×10^{-5} 相差了整整 3 个数量级。同时,在解决具体的振

动周期问题时,本文演示了如何使用能量法和受力分析将滚动周期问题转化成单摆振动周期问题,给出了在非小振动的一般情况下的高精度振动周期,为之后文献调研研究非线性振动问题做出了良好的铺垫。

参 考 文 献

- [1] 舒幼生,胡望雨,陈秉乾. 物理学难题集萃[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2014.
- [2] 舒幼生. 力学[M]. 北京:北京大学出版社,2005.
- [3] 杨维弦. 力学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2002.