

大中衔接

曲面轨道摩擦力做功问题的讨论

唐瑾怡 桑芝芳

(苏州大学物理科学与技术学院, 江苏 苏州 215006)

摘要 摩擦力做功问题是大学、中学物理教学中常见的问题,也是物理教学的重点和难点。本文推导了物体在任意粗糙曲面轨道上运动的摩擦力做功表达式,并以四分之一圆弧轨道和抛物线型轨道为例,借助 MATLAB 软件数值计算,结合图像分析物体下滑过程中速率、支持力、摩擦力做功随角度的变化特点,并讨论动摩擦因数变化对三者的影响,同时计算出使物体恰好静止于上述两种轨道最低点对应的动摩擦因数应满足的条件,以期丰富学生对曲面轨道摩擦力做功问题的认识。

关键词 摩擦力做功;非光滑曲面;自然坐标系

DISCUSSION OF THE WORK DONE BY FRICTION FORCE ON CURVED ORBITS

TANG Jinyi SANG Zhifang

(School of Physical Science and Technology, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006)

Abstract The problem of friction work is common in physics teaching in universities and middle schools, and it is also a key and difficult point in physics teaching. This paper derives the expression of the friction work to object on an arbitrary rough curved orbit, and takes quarter arc track and parabolic track as examples, analyzing the characteristics of the velocity, support force, and friction work with angle during the sliding process, discussing the impact of the dynamic friction factor on the three, and calculating dynamic friction factor which makes the object exactly stops at the lowest point of the two tracks above, to enrich students' understandings.

Key words friction work; rough curved orbit; natural coordinates

1 问题的提出

如图 1 所示,当质量为 m 的物体从斜面顶端下滑到底端,在水平方向通过的位移为 x ,物体与斜面间的动摩擦因数为 μ ,易知该过程摩擦力做功大小为 $W_f = \mu mgx$ 。文献[1][2]中也有这样两道习题:

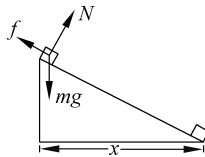


图 1

题 1 如图 2 所示,滑雪者从 A 点静止出发,沿山坡自由下滑,中间不返回、不停顿,滑行中动

收稿日期: 2024-03-02

基金项目: 江苏省教育科学“十四五”规划 2021 年度课题“基于师范专业认证的教育类实践课程表现性评价研究”(B/2021/01/39)。

通信作者: 桑芝芳,苏州大学物理科学与技术学院教授, sangzf@suda.edu.cn。

引文格式: 唐瑾怡,桑芝芳. 曲面轨道摩擦力做功问题的讨论[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 199-204.

Cite this article: TANG J Y, SANG Z F. Discussion of the work done by friction force on curved orbits[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 199-204. (in Chinese)

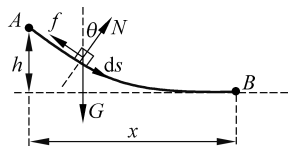


图 2

摩擦因数处处为常数 μ 。设他滑到 B 点时恰好停止,此时水平位移量为 x 。求 A、B 两点之间的高度差 h 。(由于下滑速度较小,因各处弯曲而造成的对雪面附加压力可以忽略。空气阻力也可以略去,并认为 μ 与滑雪者的速度无关。)^[1]

题 2 如图 3 所示,有一个缓慢改变倾角的固定斜面,有一滑块从高 h 处沿斜面滑下,在平面上滑行一段距离,然后静止下来。设斜面和平面的摩擦系数都是 μ ,滑块开始滑动点到静止点的水平距离为 x ,试证明: $\mu = h/x$ 。^[2]

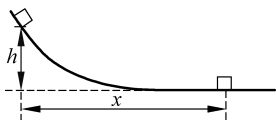


图 3

上述 2 题中,有附加条件“由于下滑速度较小,因各处弯曲而造成的对雪面附加压力可以忽略。空气阻力也可以略去,并认为 μ 与滑雪者的速度无关”“缓慢改变倾角的固定斜面”,为什么需要附加条件呢?下面进行分析说明。

题 1 中滑雪者沿曲面下滑,受力分析如图 2 所示,支持力 N 与重力的法向分力提供向心力,即 $N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{\rho}$,其中, ρ 为该点的曲率半径, θ 为 N 与竖直方向夹角。由附加条件“下滑速度较小”,故可将 v 视作小量, $v^2 \rightarrow 0$,因此滑雪者对曲面轨道的附加压力 $m \frac{v^2}{\rho}$ 可视为 0,故 $N = mg \cos \theta$ 。滑雪者从 A 点运动至 B 点的过程中,滑动摩擦力对其做的功为

$$W_f = \int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_A^B f ds = - \int_A^B \mu N ds \quad (1)$$

其中, $N = mg \cos \theta$, 水平位移 $dx = \cos \theta ds$, 代入式(1)整理后可得 $W_f = -\mu mgx$,再由动能定理可得 $0 = mgh + W_f$,两式联立可得 $h = \mu x$ 。

题 2 中缓慢改变倾角的固定斜面,可视为由多段倾角不同的直斜面组成,每段直斜面的曲率

半径 $\rho \rightarrow \infty$,因此题中对曲面轨道的附加压力 $m \frac{v^2}{\rho}$ 也可视为 0,每一小段上摩擦力做功均为 $-\mu mg \Delta x$,求和后可得全过程摩擦力做功为 $-\mu mgx$ 。

上述两题通过对曲面轨道摩擦力做功问题进行了简化或理想化处理,相当于在直斜面上摩擦力做功情况。但对于生产生活中的实际问题,比如竞技体育中的滑雪运动、物流中的货物传输与装卸等,因各处弯曲而对轨道产生的附加压力不能忽略、斜面难以做到缓慢改变倾角,那么真实曲面轨道的摩擦力做功如何计算呢?是否存在一种特殊曲面轨道,在该轨道上摩擦力做的功也可以相当于直斜面上摩擦力做功呢?

2 任意曲面上的摩擦力做功

如图 4、图 5 所示,质量为 m 的滑块静止于曲面上某点,滑块与曲面间的动摩擦因数为 μ 。将滑块视作质点, G 、 N 和 f 分别表示其所受重力、轨道给予的支持力与静摩擦力,取该点曲面切线与 x 轴正方向的夹角为 θ 。若将凹面上的滑块放置于凹面更高位置或将凸面上的滑块放置于凸面更低位置,则 θ 均增大,重力切向分力均增大,直至大于最大静摩擦力 f_m 时,滑块开始沿曲面下滑,滑动条件均为 $mg \sin \theta > f_m$,又因为 $f_m = \mu N = \mu mg \cos \theta$,解得 $\theta > \arctan \mu$ 。由此可知,若满足滑动条件,则滑块先加速,当重力切向分力与滑动摩擦力平衡时有最大速度,此后再减速,最终能否通过轨道最低点与其初始机械能和 μ 有关。

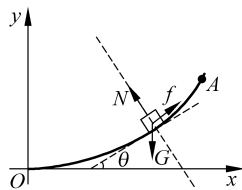


图 4 在凹面上的受力分析

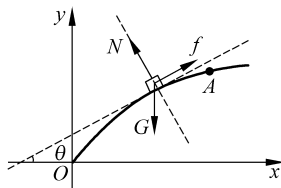


图 5 在凸面上的受力分析

将滑块从 A 点 ($\theta_0 > \arctan \mu$) 静止释放, 以一定速率 v 经过某点, 在该点受到重力 G 、支持力 N 与滑动摩擦力 f 。沿曲面轨道建立自然坐标系, 取释放点 A 为原点, A 点至质点位置的弧长为 s 。质点的运动微分方程为

$$mg \sin \theta - f = m \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

$$N - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{\rho} \quad (3)$$

其中, ρ 为该点曲率半径, 视为代数数量, 则对于凹面轨道有 $\rho > 0$, 凸面轨道有 $\rho < 0$ 。

因为 $f = \mu N$, 与式(2)(3)联立可得

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) - \mu \frac{v^2}{\rho} \quad (4)$$

又因为 $v = \frac{ds}{dt}$, $\rho = -\frac{ds}{d\theta}$, 所以

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = -\frac{v dv}{\rho d\theta} = -\frac{dv^2}{2\rho d\theta} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 变形整理后可得

$$\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu v^2 = -2\rho g(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (6)$$

该一阶非齐次线性微分方程的解为

$$v^2 = C e^{2\mu(\theta - \theta_0)} - e^{2\mu(\theta - \theta_0)} \int_{\theta_0}^{\theta} 2\rho g(\sin \theta - \mu \cos \theta) e^{-2\mu(\theta - \theta_0)} d\theta \quad (7)$$

其中, 常数 C 需由初始条件决定。由于滑块从 θ_0 处静止释放, 故将 $v=0, \theta=\theta_0$ 代入式(7), 解得常数 C 为 0, 最终可得滑块经过曲面任意位置 θ 的速率表达式为

$$v^2 = e^{2\mu(\theta - \theta_0)} \int_{\theta_0}^{\theta} 2\rho g(\mu \cos \theta - \sin \theta) e^{-2\mu(\theta - \theta_0)} d\theta \quad (8)$$

将式(3)整理后可得滑块所受支持力为

$$N = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{\rho} \quad (9)$$

其中, v^2 可用式(8)代入。将式(9)代入式(1), 又因为水平位移 $dx = \cos \theta ds$, $\rho = -\frac{ds}{d\theta}$, 整理后可得滑块从 θ_0 处运动至 θ 处的过程中摩擦力对滑块做的功为

$$W_f = -\mu mgx + \mu m \int_{\theta_0}^{\theta} v^2 d\theta \quad (10)$$

其中, x 为滑块的水平位移, v^2 可用式(8)代入。

需要注意的是, 由式(9)可知, 若滑块经过凸面某点的 v 增大, 其所需向心力增大, 为使合外力能够提供向心力, 则 N 要减小, 当 N 减小为 0 时, 重力法向分力恰好提供向心力, 有 $v = \sqrt{-g\rho \cos \theta}$ (凸面 $\rho < 0$), 即为滑块沿凸面运动的临界速率。由此可见, 滑块沿凸面下滑而不脱离凸面的条件为 $v \leq \sqrt{-g\rho \cos \theta}$ 。

通过上述推导获得了滑块在任意曲面轨道上运动的速率、支持力、摩擦力做功的表达式, 由式(9)可知, 支持力由 $mg \cos \theta$ 与 $m \frac{v^2}{\rho}$ 这两部分组成, 因而摩擦力做功也可分为两部分, 一部分是 μmgx , 另一部分是由附加压力引起的滑动摩擦力做功, 即 $\mu m \int_{\theta_0}^{\theta} v^2 d\theta$ 。

3 特殊轨道的摩擦力做功

在实际学习中, 较为常见的是四分之一圆弧轨道和抛物线型轨道, 下面以这两种轨道为例, 讨论滑块运动过程中 v 、 N 、 W_f 随 θ 的变化特点以及动摩擦因数 μ 对三者的影响。

3.1 四分之一圆弧轨道上的摩擦力做功

如图 6, 令 $\rho = R$, 代入式(6)可得

$$\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu v^2 = -2Rg(\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (11)$$

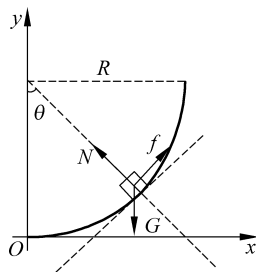


图 6 在四分之一圆弧轨道上的受力分析

若滑块从 $\theta_0 = \pi/2$ 处静止释放, 可利用 MATLAB 求解式(11), 也可将 $\rho = R$ 、 $\theta_0 = \pi/2$ 代入式(8)求解, 两种解法的结果均为

$$v = \sqrt{\frac{2Rg}{4\mu^2 + 1} (-2\mu^2 \cos \theta + 3\mu \sin \theta + \cos \theta) - \frac{6Rg\mu}{4\mu^2 + 1} e^{2\mu\theta - \pi\mu}} \quad (12)$$

将式(12)代入式(9)、式(10)可得

$$N = \frac{2mg}{4\mu^2 + 1}(-2\mu^2 \cos\theta + 3\mu \sin\theta + \cos\theta) - \frac{6mg\mu}{4\mu^2 + 1}e^{2\mu\theta - \pi\mu} + mg \cos\theta \quad (13)$$

$$W_f = \frac{\mu mgR}{4\mu^2 + 1}(-4\mu^2 \sin\theta - 6\mu \cos\theta + 2\sin\theta - 3e^{2\mu\theta - \pi\mu}) + \mu mgR \sin\theta \quad (14)$$

取动摩擦因数 μ 为 0.2、0.5、0.8, 由式(12)、式(13)、式(14)借助 Origin 绘制 $v/\sqrt{2gR}$ 、 N/mg 与 $|W_f|/mgR$ 随 θ 变化图像, 并探究 μ 变化对三者的影响, 其中 θ 的取值范围是 $[0, \pi/2]$ 。

(1) μ 不变时 v 、 N 与 W_f 随 θ 变化特点。由图 7~8 可知, 无论 μ 取何值, 随着下滑过程中 θ 减小, v 与 N 均先增大后减小, 原因是在下滑过程中重力切向分力先大于滑动摩擦力后小于滑动摩擦力, 故 v 先增大后减小, 在两者平衡时有最大值。由式(9)可知, $mg \cos\theta$ 增大, v^2 先增大后减小, 由于后者是二次方, 对 N 的影响更明显, 故 N 先增大后减小。由图 9 可知, 从 $\pi/2$ 处运动至 θ 处的过程中摩擦力做功 W_f 单调增加, 原因是摩擦力是非保守力, 随着路程的增加, W_f 始终增大。

(2) μ 变化对 v 、 N 的影响。由图 7 可知, 随着 μ 的增大, 经过同一位置的速率减小, 又由式(9)可知 N 与 v 密切相关, 同一位置 $mg \cos\theta$ 相同, v^2 减小, 故 N 减小, 即在同一位置所受支持力减小, 这也与图 8 结果一致。特别的是, 当 $\mu = 0.8, \theta = 0.23\text{rad}$ 时, $v = 0, N = 0.98mg$, 其值恰好为此处的重力法向分力大小, 说明当 $\mu = 0.8$ 时, 滑块静止于 $\theta = 0.23\text{rad}$ 处。由此可见, 随着 μ 的增大, 滑块经过轨道最低点的速率逐渐变小, 直至无法经过最低点而静止于轨道上方某一位置, 在此过程中滑块的机械能完全转化为摩擦力做功而产生

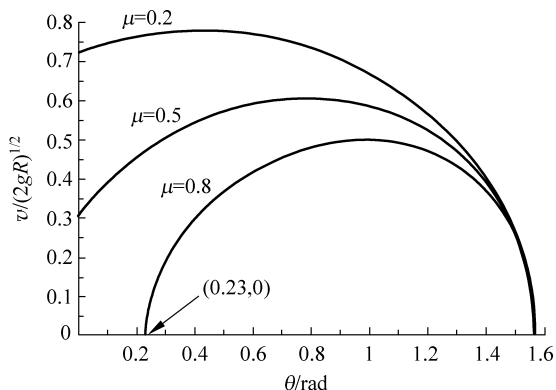


图 7 速率随角度的变化

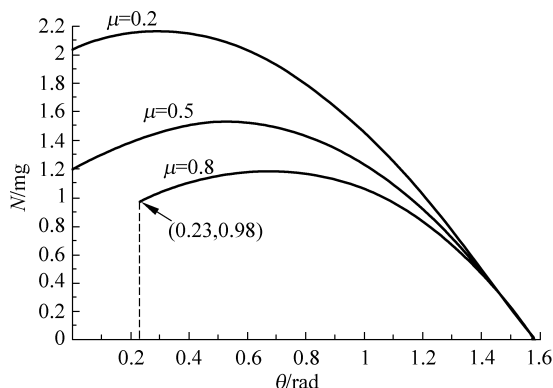


图 8 支持力随角度的变化

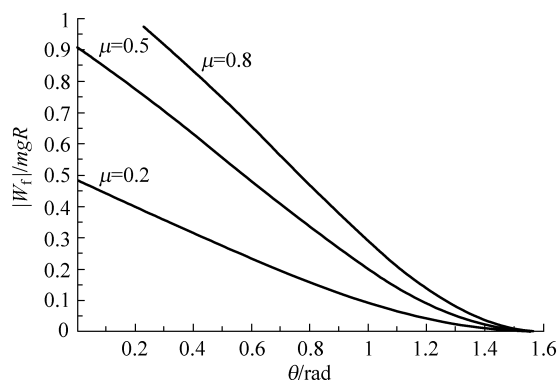


图 9 摩擦力做功绝对值随角度的变化

的内能。若滑块恰好静止于最低点, 由动能定理可知 $W_f + W_G = 0$, 将 $\theta = 0$ 代入式(14)得 $W_f = -\frac{\mu mgR}{4\mu^2 + 1}(6\mu + 3e^{-\pi\mu})$, 重力做功 $W_G = mgR$, 解得 $\mu \approx 0.6033$ 。由此可见, 滑块质量 m 与轨道半径 R 不会影响滑块最终静止位置。如果 $\mu > 0.6033$, 滑块将静止于最低点上方某一位置, 当 $\mu < 0.6033$, 滑块将以一定速度经过最低点, 这也与图 7 结果一致。

(3) μ 的增大对摩擦力做功的影响。由图 9 可知, 随着 μ 的增大, 经过相同路程摩擦力做的功增大, 再结合式(1)可以推断出各位置的滑动摩擦力 f 均增大。虽然 μ 增大而 N 减小, 两者存在竞争关系, 无法由 $f = \mu N$ 判断 f 的变化, 但是由图 9 与式(1)可知 μ 增大对 f 的影响高于 N 减小对 f 的影响。

通过上述讨论后发现当 μ 不变时, 随着下滑过程中 θ 减小, v 与 N 均先增大后减小, 从 $\pi/2$ 处运动至 θ 处的过程中摩擦力做的功单调增加。随着 μ 的增大, 在同一位置的 v 、 N 减小, 滑动摩擦

力增大,经过相同路程摩擦力做的功增大,经过轨道最低点的速率逐渐变小,直至无法经过最低点,最终静止于轨道上某一位置。

3.2 抛物线型轨道上的摩擦力做功

如图 10,令轨道为 $y = \frac{1}{4a}x^2$ ($a > 0$), 则 $\rho = \frac{2a}{\cos^3 \theta}$, 代入式(6)可得

$$\frac{dv^2}{d\theta} - 2\mu v^2 = \frac{-4ag}{\cos^3 \theta} (\sin \theta - \mu \cos \theta) \quad (15)$$

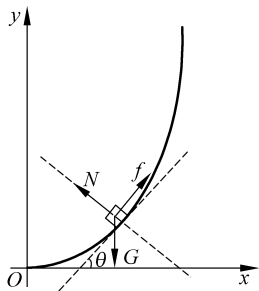


图 10 在抛物线型轨道上的受力分析

假设滑块从 θ_0 处静止释放, 可利用 MATLAB 求解式(15), 也可将 $\rho = \frac{2a}{\cos^3 \theta}$ 代入式(8)求解, 两种解法的结果均为

$$v = \sqrt{2ag \left[\frac{e^{2\mu(\theta-\theta_0)}}{\cos^2 \theta_0} - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right]} \quad (16)$$

将式(16)代入式(8)、式(9)可得

$$N = mge^{2\mu(\theta-\theta_0)} \frac{\cos^3 \theta}{\cos^2 \theta_0} \quad (17)$$

$$W_f = \frac{mga}{\cos^2 \theta_0} (e^{2\mu(\theta-\theta_0)} - 1) \quad (18)$$

假定滑块从 $\theta_0 = \pi/4$ 处静止释放, 同样取 μ 为 0.2、0.5、0.8, 利用式(16)、式(17)和式(18)绘制 $v/\sqrt{2ga}$ 、 N/mg 与 $|W_f|/mga$ 随 θ 变化图像, 并探究 μ 变化对三者的影响, 其中 θ 的取值范围是 $[0, \pi/4]$ 。

(1) μ 不变时 v 、 N 与 W_f 随 θ 变化特点。由图 11~图 13 可知, 当 μ 较小时, 例如 μ 为 0.2、0.5 时, 随着下滑过程中 θ 减小, v 与 N 均先增大后减小, 从 $\pi/4$ 处运动至 θ 处的过程中摩擦力做的功 W_f 单调增加。当 μ 较大时, 例如 μ 为 0.8, v 依然是先增大后减小, W_f 依然是单调增加, 但是 N 始终增大。

(2) μ 变化对 v 、 N 、 W_f 的影响, 与滑块在

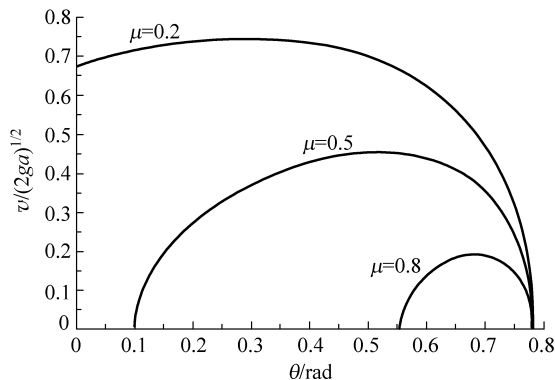


图 11 速率随角度的变化

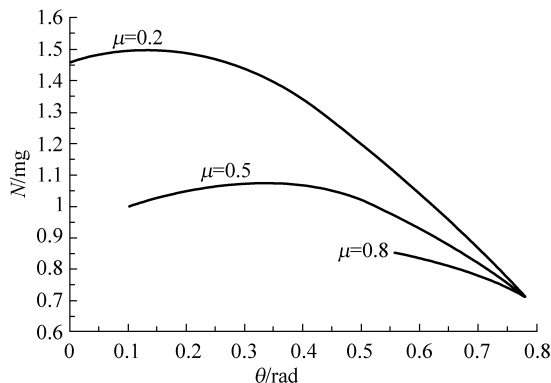


图 12 支持力随角度的变化

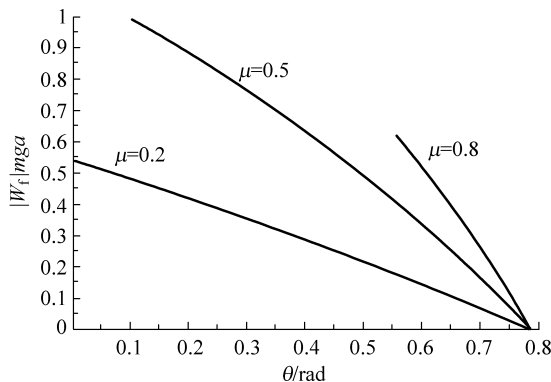


图 13 摩擦力做功绝对值随角度的变化

四分之一圆弧轨道上运动的情况一致, 即随着 μ 的增大, 在同一位置的 v 、 N 减小, 滑动摩擦力增大, 经过相同路程摩擦力做的功增大, 经过轨道最低点的速率逐渐变小, 直至无法经过最低点而最终静止于轨道上方某一位置。区别在于由于抛物线型轨道的 θ_0 无法取到 $\pi/2$, 所以初始位置的 N 始终不为零, 其值为重力法向分力大小。

由图 11 可知, 滑块恰好静止于抛物线型轨道最低点的 μ 值处于 0.2~0.5, 也可由公式定量计算。当滑块从任意高度 y_0 下滑至某处 y , 重力做功

$W_G = mg(y_0 - y)$ 。由 $y = \frac{1}{4a}x^2$ 可知, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2a}$, 又 $y' = \frac{dy}{dx} = \tan\theta$, 所以 $x = 2a \tan\theta$, $y = a \tan^2\theta$, $W_G = mga(\tan^2\theta_0 - \tan^2\theta)$ 。将 $\theta_0 = \pi/4$, $\theta = 0$ 代入可得 $W_G = mga \tan^2(\pi/4)$, 由式(18)可得 $W_f = \frac{mga}{\cos^2(\pi/4)}(e^{-\mu\pi/2} - 1)$, 根据 $W_f + W_G = 0$ 解得 $\mu \approx 0.4413$, 与上述分析一致。

3.3 先凹面后凸面轨道上的摩擦力做功

如图 14, 有一凹面和凸面组合而成的曲面轨道, 滑块与曲面之间的动摩擦因数为 μ , 假设滑块从 A 点 ($\theta_0 > \arctan\mu$) 静止释放, 在凹面运动速率为 v_1 , 在凸面运动速率为 v_2 ($v_2 \leq \sqrt{-g\rho\cos\theta}$), v_1 与 v_2 均满足式(8), 滑块最终静止于凸面上某点 C, B 点为凸面与凹面的交界点。

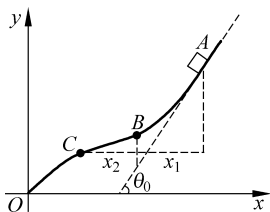


图 14 先凹后凸轨道上的运动

由式(10)整理可得全过程滑动摩擦力对滑块做的功为

$$W_f = W_{f1} + W_{f2} \\ = -(\mu mgx_1 + \mu mgx_2) + \mu m \left(\int_A^B v_1^2 d\theta + \int_B^C v_2^2 d\theta \right) \quad (19)$$

x_1 、 x_2 分别为滑块沿凹面、凸面下滑的水平位移, 式(19)包含两项积分项, 由于 θ 为曲面切线与 x 轴正方向的夹角, 滑块沿凹面下滑时 $d\theta < 0$, 沿凸面下滑时 $d\theta > 0$, 因此可能存在两项积分项之和为 0 的情形。若该情况存在, 则滑块沿曲面运动的摩擦力做功大小为 $\mu mg(x_1 + x_2)$, 和在直斜面上摩擦力做功一致。

4 结语

本文讨论了滑块在任意粗糙曲面轨道上摩擦

力做功问题, 并以四分之一圆弧轨道与抛物线型轨道为例, 借助 MATLAB 软件数值计算, 分析了该轨道上摩擦力做功, 并进一步分析了动摩擦因数 μ 变化对做功的影响, 发现滑块在上述两种轨道上运动均有如下规律: 随着 μ 的增大, 滑块在同一位置的速率减小、所受支持力减小、滑动摩擦力增大, 经过相同路程摩擦力做功增加, 经过轨道最低点的速率逐渐变小直至无法经过最低点, 并计算出使滑块恰好静止于最低点对应的动摩擦因数 μ 应满足的条件。

摩擦力是一种最为常见的非保守力, 摩擦力做功问题一般比较复杂, 本文的讨论可以丰富学生对摩擦力做功的认识, 深化对非保守力的理解。

参 考 文 献

- [1] 朱浩. 名牌大学自主招生考试读本 物理[M]. 上海: 上海教育出版社, 2011: 59.
- [2] 梁绍荣, 刘昌年, 盛正华. 普通物理学: 力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2005: 128.
- [3] 何健. 曲线约束摩擦力速度问题的求解[J]. 物理与工程, 2019, 29(3): 47-51.
HE J. A method for solving nonlinear velocity problems of wire rope with friction[J]. Physics and Engineering, 2019, 29(3): 47-51. (in Chinese)
- [4] 叶志强, 郭琴. 非光滑轨道约束反力问题求解及 Mathematica 数值计算与分析[J]. 大学物理, 2019, 38(8): 59-62.
YE Z Q, GUO Q. Solution of constraint reaction force on non-smooth orbit and numerical calculation and analysis by Mathematica software[J]. College Physics, 2019, 38(8): 59-62. (in Chinese)
- [5] 郭雪鹏. 物体在粗糙圆弧轨道上的运动[J]. 物理教师, 2016, 37(11): 58-59.
GUO X P. The motion of an object on a rough circular arc track[J]. Physics Teacher, 2016, 37(11): 58-59. (in Chinese)
- [6] 龙海文. 圆弧面摩擦力做功的探索[J]. 中学物理教学参考, 2022, 51(8): 62-63.
LONG H W. Exploration of the work done by friction on curved surfaces[J]. Teaching Reference of Middle School Physics, 2022, 51(8): 62-63. (in Chinese)