

典型分形结构光栅的 Fraunhofer 衍射数值模拟

曹本澍¹ 左宇轩¹ 贺禹哲² 张博宇¹ 喻有理³ 王小力³

(¹ 西安交通大学航天航空学院; ² 西安交通大学电气工程学院; ³ 西安交通大学物理学院, 陕西 西安 710049)

摘 要 本文旨在研究 Cantor 条幅、Cantor 地毯、Sierpinski 垫片三种自相似分形结构的 Fraunhofer 衍射场在屏上的光强分布以及自相似分形结构的几何规律。通过复数积分法和位移-相移定理, 得到了屏幕上不同位置相对光强的数学表达式。随后, 使用 MATLAB 进行数值计算和后处理, 以直观的方式呈现出衍射图案。结果显示: 衍射光强分布主体对称性由母代衍射图样的对称性确定; 随着分形子代的增多, 衍射图样在母代对称结构图样上逐渐分支复杂, 最终收敛于类母代衍射图样, 并满足衍射反比律。内容为光栅衍射和位移-相移定理的教学拓展提供参考案例。

关键词 分形光栅; 分形结构; Fraunhofer 衍射; 位移-相移定理

NUMERICAL SIMULATION OF FRAUNHOFER DIFFRACTION OF TYPICAL FRACTAL STRUCTURE GRATINGS

CAO Benshu¹ ZUO Yuxuan¹ HE Yuzhe² ZHANG Boyu¹ YU Youli³ WANG Xiaoli³

(¹ School of Aerospace Engineering; ² School of Electrical Engineering;

³ School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049)

Abstract This paper aims to investigate the Fraunhofer diffraction patterns on a screen produced by three self-similar fractal structures: Cantor stripes, Cantor carpet, and Sierpinski carpet. Additionally, it explores the geometric principles underlying these self-similar fractal structures. Mathematical expressions for the relative intensity of light at different positions on the screen are derived through complex integration and the displacement-phase theorem. Subsequently, numerical calculations and post-processing are performed using MATLAB to visually present the diffraction patterns. The results reveal that the overall symmetry of the diffraction intensity distribution is determined by the symmetry of the parent diffraction pattern. As the number of fractal offspring increases, the diffraction pattern gradually branches and becomes more complex on the symmetric structure pattern of the parent, eventually converging to the diffraction pattern similar to the parent, and satisfying the inverse diffraction law. The content provides a reference case for teaching extensions of the grating diffraction and displacement-phase shift theorems.

Key words fractal gratings; fractal structures; Fraunhofer diffraction; displacement phase shift theorem

收稿日期: 2023-09-01

基金项目: 2022 高等学校教学研究项目(DWJZW202219xb)。

通信作者: 喻有理, 西安交通大学物理学院副教授, youliyu@mail.xjtu.edu.cn。

引文格式: 曹本澍, 左宇轩, 贺禹哲, 等. 典型分形结构光栅的 Fraunhofer 衍射数值模拟[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 176-182.

Cite this article: CAO B S, ZUO Y X, HE Y Z, et al. Numerical simulation of Fraunhofer diffraction of typical fractal structure gratings [J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 176-182. (in Chinese)

目前关于自相似(分形)结构 Fraunhofer 衍射的相关研究,大多数研究者选择基于 Cantor 集的光栅^[1],少有考虑其他较为复杂的分形结构光栅的研究。其次,研究通常只针对一种光栅结构而缺乏横向对比^[2]。此外,目前主流的研究方法均是以理论推导为主,辅以实验和数值模拟手段,缺乏可视化的数值模拟衍射图样^[3]。为了形象、直观地认识自相似结构衍射图样的特征规律,本文模拟了三种常见分形光栅的 Fraunhofer 衍射,展示自母代逐次叠加各子代的衍射图样,分析衍射图样随分形生长的演化规律。为了进一步认识母代单元形状对衍射图样的影响,文中尝试在保证分形规律不变的情况下改变母代单元形状,对模拟结果进行分析讨论。内容可作为光栅衍射的理论和实验教学的拓展案例,也为位移-相移定理的应用提供了一个典型。方法和结论对分形结构的探测和应用研究也有参考价值。

1 三种分形结构光栅 Fraunhofer 衍射场的理论计算

1.1 Cantor 条幅的 Fraunhofer 衍射场

光屏上的点由图 1 中的 θ_1 , θ_2 以及 f 标定,设母代衍射孔为长为 a 、宽为 b 的矩孔,并设其为第 0 代,则对于第 n 代,若仅考虑单元衍射因子的衍射场,即长为 $a/3^n$ 、宽为 b 的矩孔的 Fraunhofer 衍射场,通过计算得到单元衍射因子和结构因子,由此组成谱函数,再由其线性叠加,得到 $(n+1)$ 代共存 Fraunhofer 衍射场的表达式

$$F_{n+1}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=0}^n u_j(\theta_1, \theta_2)$$

其中,

$$u_n(\theta_1, \theta_2) = U_n(\theta_1, \theta_2) \cdot S_n(\theta_1, \theta_2)$$

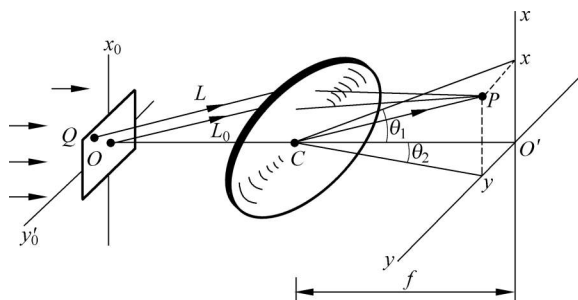


图 1 矩孔 Fraunhofer 衍射场点定位示意图

$$U_n(\theta_1, \theta_2) = I_n \left(\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} \right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$I_n = \frac{Aab}{\lambda f \cdot 3^n}, \quad \alpha_n = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda \cdot 3^n}, \quad \beta = \frac{\pi b \sin \theta_2}{\lambda}$$

$$S_n(\theta_1, \theta_2) = 2^n \prod_{i=1}^n \cos \left(\frac{ka \sin \theta_1}{3^{i-1}} \right)$$

1.2 Cantor 地毯 Fraunhofer 衍射场

与 Cantor 条幅的推导类似,设母代衍射孔为边长为 a 的正方形孔,并设其为第 0 代,则对于第 n 代,若仅考虑单元衍射因子的衍射场,即边长为 $a/3^n$ 的正方形孔的 Fraunhofer 衍射场,分别计算单元衍射因子和结构因子^[4]

$$U_n(\theta_1, \theta_2) = I_n \left(\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} \right) \left(\frac{\sin \beta_n}{\beta_n} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$S_n(\theta_1, \theta_2) = 2^n \prod_{i=1}^n (\cos \gamma_i + \cos \delta_i + 2 \cos \gamma_i \cos \delta_i)$$

其中

$$I_n = \frac{A}{\lambda f} \left(\frac{a}{3^n} \right)^2, \quad \alpha_n = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda \cdot 3^n}, \quad \beta_n = \frac{\pi a \sin \theta_2}{\lambda \cdot 3^n},$$

$$\gamma_i = \frac{ka \sin \theta_1}{3^{i-1}}, \quad \delta_i = \frac{ka \sin \theta_2}{3^{i-1}}$$

谱函数的组成方式和线性叠加性与 Cantor 条幅的推导类似。

1.3 Sierpinski 垫片的 Fraunhofer 衍射场

母代为边长为 a 的正三角孔,则第 n 代为边长为 $a/2^n$ 的正三角孔。以母代三角形中心为坐标原点建立直角坐标系,计算单元衍射因子和结构因子^[5]

$$U_n(\theta_1, \theta_2) = C \left[-\frac{\sin \theta_1}{\sqrt{3}} \exp \left(\frac{ika \sin \theta_2}{\sqrt{3} \cdot 2^n} \right) + R_n \cdot \exp \left(-\frac{ika \sin \theta_2}{\sqrt{3} \cdot 2^{n+1}} \right) \right]$$

$$S_n(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n \left[\exp \left(-\frac{ika \sin \theta_2}{\sqrt{3} \cdot 2^i} \right) + 2 \cos \left(\frac{ka \sin \theta_1}{2^i} \right) \cdot \exp \left(\frac{ika \sin \theta_2}{\sqrt{3} \cdot 2^i} \right) \right]$$

$$C = \frac{A e^{ik_0 L_0}}{i \pi r_0 k \sin \theta_1 \left(\sin^2 \theta_2 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_1 \right)}$$

$$R_n = i \sin \theta_2 \cdot \sin \left(\frac{ka \sin \theta_1}{2^{n+1}} \right) + \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{3}} \cdot \cos \left(\frac{ka \sin \theta_1}{2^{n+1}} \right)$$

谱函数的组成方式和线性叠加性与 Cantor 条幅的推导类似。

2 三种分形结构光栅的数值模拟衍射图样

2.1 Cantor 条幅

此处需特别指出:由于得到的是 $(n+1)$ 代共存 Fraunhofer 衍射场的表达式,而数值模拟结果为衍射图样,因此需要对衍射场取复共轭并将二者相乘得到光强的表达式。

通过数学分析得知,当 n 趋近于无穷时,Fraunhofer 衍射场的表达式为一收敛的无穷级数,但其和函数的求解却相对困难,因此通过取有限项的和函数进行逼近。进而选择使用编程迭代的方法进行数值模拟。

在 MATLAB 编程模拟中,程序主要分为三个子块:第一子块是相关参数的设定以及母代衍射场函数的输入;第二子块是由 for 循环组成的迭代子块,设定第一部分中迭代次数控制程序的运行迭代次数;第三子块进行光强图样的绘制并输出。

通过衍射图样的变化规律对模拟结果进行验证:当 n 足够大时,衍射孔宽度近似为母代的三倍,根据衍射反比律,衍射图样的宽度应为母代的 $1/3$,下图的模拟结果符合衍射反比律^[6],因此数值模拟结果较为可靠。

2.2 Cantor 地毯

类似于 3.1 中的数值模拟,绘制出如下若干代共存的衍射图样。

30 代共存衍射图样的宽度为母代的 $1/3$,依据衍射反比律,验证了模拟结果的正确性。

2.3 Sierpinski 垫片

依据衍射反比律,30 代共存中的衍射图样宽度为母代的 $1/3$,验证了模拟结果。另外与三角孔衍射实验结果作比,同样验证了结果^[7]。

3 结果讨论

当迭代次数较多时,衍射图样将趋于简单化并最终收敛成一个与母代图形的衍射图样相似的

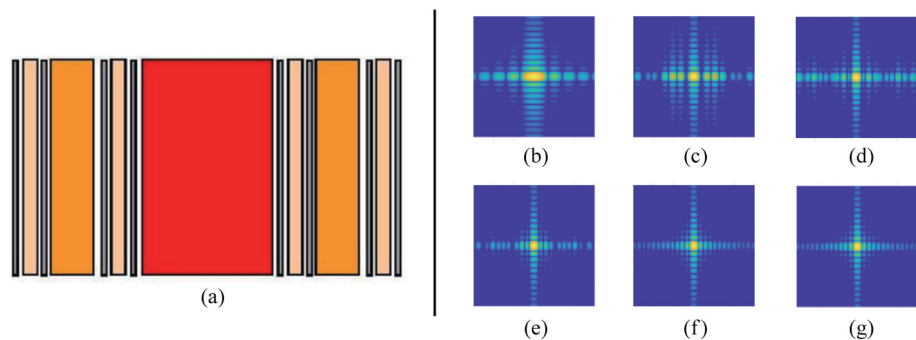


图 2 Cantor 条幅及其 Fraunhofer 衍射图样

(a) Cantor 条幅; (b) 母代; (c) 2 代共存; (d) 3 代共存; (e) 5 代共存; (f) 10 代共存; (g) 30 代共存

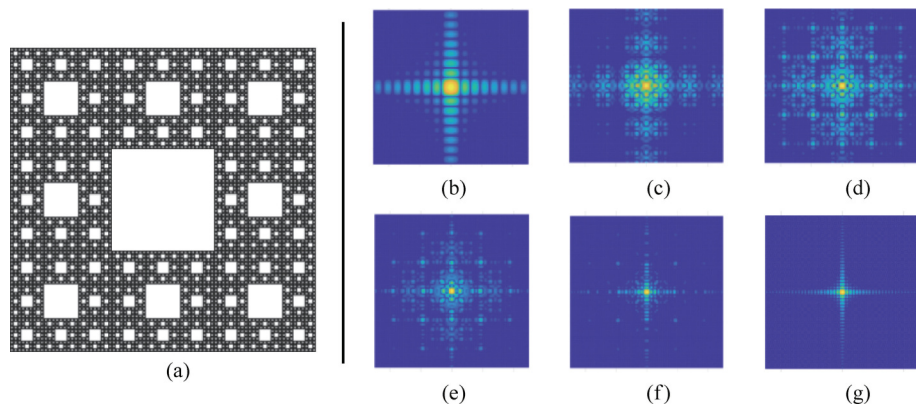


图 3 Cantor 地毯及其 Fraunhofer 衍射图样

(a) Cantor 地毯; (b) 母代; (c) 2 代共存; (d) 3 代共存; (e) 5 代共存; (f) 10 代共存; (g) 30 代共存

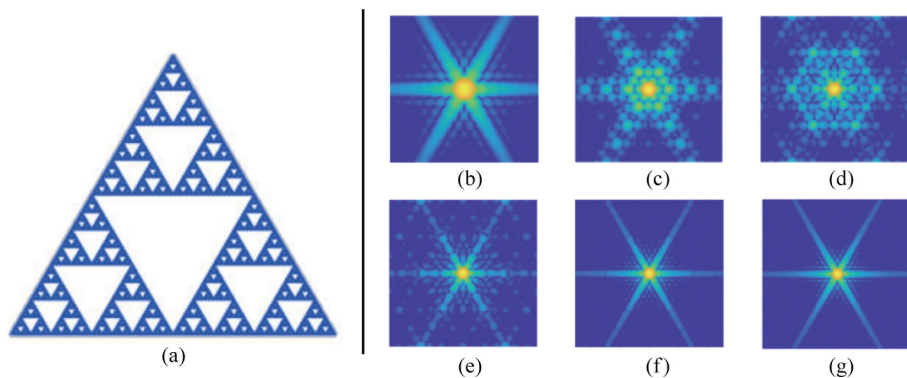


图4 Sierpinski 垫片及其 Fraunhofer 衍射图样

(a) Sierpinski 垫片; (b) 母代; (c) 2 代共存; (d) 3 代共存; (e) 5 代共存; (f) 10 代共存; (g) 30 代共存

图形。解释为:在上述三个分形图形迭代的次数足够大时,光栅中各孔总和趋近于整个区域全部被挖空的大孔。因此,两个相似孔的衍射图样相似,其相似比与两衍射孔的相似比成反比。

迭代的过程中存在三个规律:首先,整个衍射图样的对称性由光栅中母代衍射孔图形的对称性确定。其次,在迭代过程中,衍射图样中的各代光斑图样相似,且各代光斑相似比与此代中衍射孔的相似比成反比。最后,各代衍射图样中都存在形状大小相同的花纹,其在迭代过程中对比度逐渐下降并最终消失。

Cantor 条幅、Cantor 地毯光栅母代为矩孔,具有相互垂直的两条对称轴,其衍射图样的对称性与之对应。Sierpinski 垫片光栅衍射图样为星芒图形^[7],对应母代正三角形孔。通过一个特殊 Sierpinski 垫片光栅的衍射图样可对上述结论加以验证,将 Sierpinski 垫片的三角形换成最大内接正方形,按照与 Sierpinski 垫片相同的迭代方式迭代(见图 5)。其衍射图样的对称性(见图 6)也与正方形孔对应。

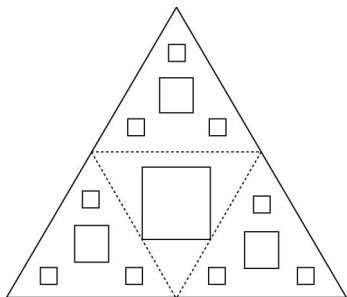


图5 一种特殊的 Sierpinski 垫片

Cantor 地毯光栅衍射图样每迭代一次后光斑放大三倍(见图 7),而光栅中新出现的矩孔边长为

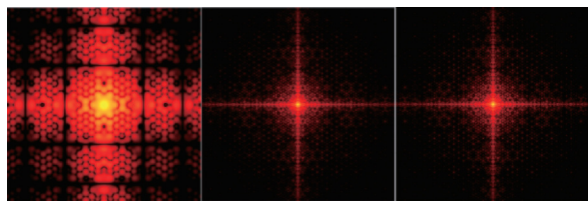


图6 特殊 Sierpinski 垫片 2 代、5 代、100 代共存光强分布图

上一代的三分之一。Sierpinski 地毯光栅在每次迭代中生成三个原大小二分之一的正三角形。将 Cantor 地毯每次迭代新生成的数个小正方形孔进行上述衍射光强分布的数值模拟得到图 8 所示的光斑。该光斑与 Cantor 地毯光栅衍射的光斑都逐代增大三倍。因此光斑大小是由每次迭代生成的衍射孔所决定的。

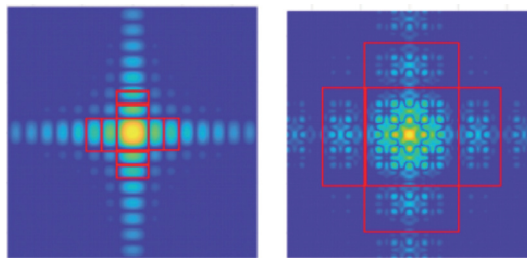


图7 母代衍射光谱图与二代共存光谱图对比

Cantor 地毯光栅衍射图样每迭代一次后光斑放大三倍(见图 7),而光栅中新出现的矩孔边长为上一代的三分之一。Sierpinski 地毯光栅在每次迭代中生成三个原大小二分之一的正三角形。将 Cantor 地毯每次迭代新生成的数个小正方形孔进行上述衍射光强分布的数值模拟得到图 8 所示的光斑。该光斑与 Cantor 地毯光栅衍射的光斑都逐代增大三倍。因此光斑大小是由每次迭代生成的衍射孔所决定的。

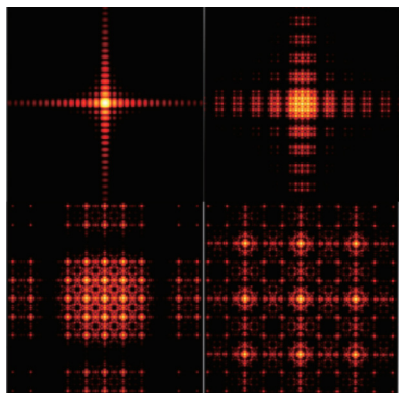


图8 单独的母代、1代、2代、3代光强分布图

如图9所示,不同代的光斑中都存在形状大小相同的花纹,花纹与前文计算中的结构因子相关,其结构因子存在复数项的公因式,故形成形状大小相同花纹。可以简单地理解为花纹形成来源于衍射孔之间的干涉(见图10)。光斑中形似干涉条纹的花纹在光栅的分形迭代过程中对比度逐渐减小,最终消失。

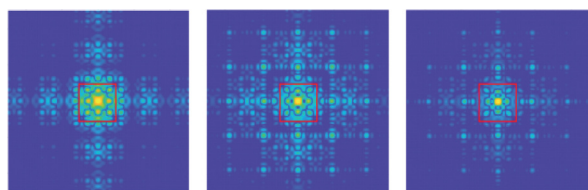


图9 Cantor地毯2代、3代、5代共存的 Fraunhofer 衍射光强图样

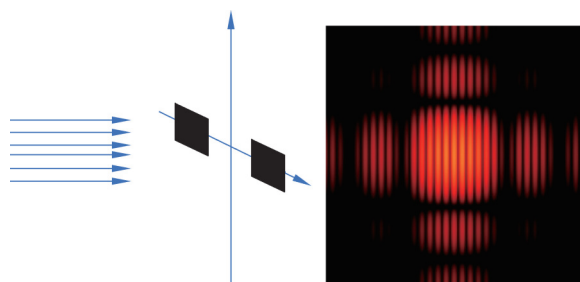


图10 两个并排正方形孔衍射图样

4 结语

总体来看,在光栅分形迭代过程中,其衍射图样变化存在一定的规律:衍射光强分布主体图样由母代衍射图样确定,随子代增加,衍射图样在母代衍射主干结构骨架上分支、生叶、丰满复杂,当考虑子代分形特征尺度与分形个数共同的影响后,

研究发现当子代特征尺度为波长的约 $0.0001\% \sim 0.01\%$ 后(取决于分形维数),图样又趋于收敛于母代的衍射主干骨体。

附录 Appendix: Cantor 条幅、Cantor 地毯、Sierpinski 垫片 Fraunhofer 衍射场 推导

1 Cantor 条幅

1.1 单元衍射因子

设母代衍射孔为长为 a 、宽为 b 的矩孔,并设其为第0代,则对于第 n 代,若仅考虑单元衍射因子的衍射场,也即是长为 $a/3^n$ 、宽为 b 的矩孔的 Fraunhofer 衍射场,不难得到

$$U_n(\theta_1, \theta_2) = I_n \left(\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} \right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{其中, } I_n = \frac{Aab}{\lambda f \cdot 3^n}, \alpha_n = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda \cdot 3^n}, \beta = \frac{\pi b \sin \theta_2}{\lambda}.$$

1.2 结构因子

根据位移-相移定理,有

$$U^{(1)} = U^{(0)} \cdot e^{-ikd \sin \theta_1} \quad U^{(2)} = U^{(0)} \cdot e^{ikd \sin \theta_1}$$

对它们求和,得

$$U' = U^{(0)} \cdot 2 \cos(kd \sin \theta_1)$$

记 $P = 2 \cos(kd \sin \theta_1)$ 为 Cantor 条幅的相移因子,则对于第 n 代来说,其相对于第 $(n-1)$ 代的相移因子为

$$P_n = 2 \cos \left(\frac{ka \sin \theta_1}{3^{n-1}} \right) \quad (\text{A.2})$$

事实上,这反映了当瞳函数产生位移时,其 Fraunhofer 衍射场也会响应一个相移动,而在方程中即表现为乘以一个相移因子。

由于每一代均是由前一代通过相同的构造方式迭代而成的,因此只要乘上若干个相移因子,便得到该代相对于母代的相移因子,称作结构因子。因此,第 n 代的结构因子为

$$S_n(\theta_1, \theta_2) = 2^n \prod_{l=1}^n \cos \left(\frac{ka \sin \theta_1}{3^{l-1}} \right) \quad (\text{A.3})$$

由于母代(第0代)本身不存在结构因子,因此补充定义

$$S_0(\theta_1, \theta_2) = 1 \quad (\text{A.4})$$

1.3 谱函数(复振幅)以及 n 代共存的 Fraunhofer 衍射场

将第 n 代的单元衍射因子与对应的第 n 代结

构因子相乘,得到第 n 代谱函数的表达式

$$u_n(\theta_1, \theta_2) = U_n(\theta_1, \theta_2) \cdot S_n(\theta_1, \theta_2) \quad (\text{A. 5})$$

对每一代的谱函数求和,得 $(n+1)$ 代共存 Fraunhofer 衍射场的表达式

$$F_{n+1}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=0}^n u_j(\theta_1, \theta_2) \quad (\text{A. 6})$$

2 Cantor 地毯

2.1 单元衍射因子

设母代衍射孔为边长为 a 的正方形孔,并设其为第 0 代,则对于第 n 代,若仅考虑单元衍射因子的衍射场,也即是边长为 $a/3^n$ 的正方形孔的 Fraunhofer 衍射场,不难得到

$$U_n(\theta_1, \theta_2) = I_n \left(\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} \right) \left(\frac{\sin \beta_n}{\beta_n} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A. 7})$$

$$\text{其中, } I_n = \frac{A}{\lambda f} \left(\frac{a}{3^n} \right)^2, \alpha_n = \frac{\pi a \sin \theta_1}{\lambda \cdot 3^n}, \beta_n = \frac{\pi a \sin \theta_2}{\lambda \cdot 3^n}。$$

2.2 结构因子

根据位移-相移定理,引入每一代的相移因子。

对于衍射屏上坐标为 (x_0, y_0) 的点,设以原点为中心的矩孔的夫琅和费衍射场为 $U(\theta_1, \theta_2)$,则将该矩孔先向坐标为 (x_0, y_0) 的点位移,而后向八个方向位移距离 d 后形成的新的八个矩孔的夫琅和费衍射场分别为

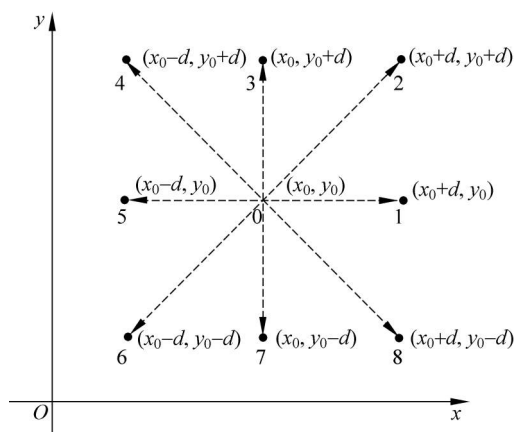


图 A.1 Cantor 地毯的位移示意图

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^{(0)} e^{-ik[(x_0+d)\sin\theta_1 + y_0\sin\theta_2]} \\ U^{(2)} &= U^{(0)} e^{-ik[(x_0+d)\sin\theta_1 + (y_0+d)\sin\theta_2]} \\ U^{(3)} &= U^{(0)} e^{-ik[x_0\sin\theta_1 + (y_0+d)\sin\theta_2]} \\ U^{(4)} &= U^{(0)} e^{-ik[(x_0-d)\sin\theta_1 + (y_0+d)\sin\theta_2]} \end{aligned}$$

$$U^{(5)} = U^{(0)} e^{-ik[(x_0-d)\sin\theta_1 + y_0\sin\theta_2]}$$

$$U^{(6)} = U^{(0)} e^{-ik[(x_0-d)\sin\theta_1 + (y_0-d)\sin\theta_2]}$$

$$U^{(7)} = U^{(0)} e^{-ik[x_0\sin\theta_1 + (y_0-d)\sin\theta_2]}$$

$$U^{(8)} = U^{(0)} e^{-ik[(x_0+d)\sin\theta_1 + (y_0-d)\sin\theta_2]}$$

对它们求和,得

$$U' = \sum_{i=1}^8 U^{(i)} = U^{(0)} e^{-ik(x_0\sin\theta_1 + y_0\sin\theta_2)} \cdot P$$

记 $P = 2[\cos(kd\sin\theta_1) + \cos(kd\sin\theta_2) + 2\cos(kd\sin\theta_1)\cos(kd\sin\theta_2)]$ 为 Cantor 地毯的相移因子。那么,对于第 n 代来说,其相对于第 $(n-1)$ 代的相移因子为

$$P_n = 2(\cos\gamma_n + \cos\delta_n + 2\cos\gamma_n\cos\delta_n) \quad (\text{A. 8})$$

$$\text{其中, } \gamma_n = \frac{ka\sin\theta_1}{3^{n-1}}, \delta_n = \frac{ka\sin\theta_2}{3^{n-1}}。$$

因此,第 n 代的结构因子为^[4]

$$S_n(\theta_1, \theta_2) = 2^n \prod_{i=1}^n (\cos\gamma_i + \cos\delta_i + 2\cos\gamma_i\cos\delta_i) \quad (\text{A. 9})$$

由于母代(第 0 代)本身不存在结构因子,补充定义 $S_0(\theta_1, \theta_2) = 1$ 。

2.3 谱函数(复振幅)以及 n 代共存的 Fraunhofer 衍射场

将第 n 代的单元衍射因子与对应的第 n 代结构因子相乘,得到第 n 代谱函数的表达式

$$u_n(\theta_1, \theta_2) = U_n(\theta_1, \theta_2) \cdot S_n(\theta_1, \theta_2) \quad (\text{A. 10})$$

对每一代的谱函数求和,得 $(n+1)$ 代共存 Fraunhofer 衍射场的表达式

$$F_{n+1}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=0}^n u_j(\theta_1, \theta_2) \quad (\text{A. 11})$$

3 Sierpinski 垫片

3.1 单元衍射因子

母代衍射孔的衍射场为边长为 a 的正三角孔的 Fraunhofer 衍射场,对于第 n 代,其衍射场为边长为 $\frac{a}{2^n}$ 的正三角孔的 Fraunhofer 衍射场,若以母代三角形中心为坐标原点建立直角坐标系,应有

$$\begin{aligned} U_n(\theta_1, \theta_2) &= C_{(\theta_1, \theta_2)} \left[-\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{ika\sin\theta_2}{\sqrt{3} \cdot 2^n}\right) + \right. \\ &\quad \left. R_{(\theta_1, \theta_2)} \cdot \exp\left(-\frac{ika\sin\theta_2}{\sqrt{3} \cdot 2^{n+1}}\right) \right] \quad (\text{A. 12}) \end{aligned}$$

其中, $R_{(\theta_1, \theta_2)} = i \sin \theta_2 \sin \left(\frac{ka \sin \theta_1}{2^{n+1}} \right) + \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{ka \sin \theta_1}{2^{n+1}} \right)$,

$$C_{(\theta_1, \theta_2)} = \frac{A e^{ik_0 L_0}}{i \pi r_0 k \sin \theta_1 \left(\sin^2 \theta_2 - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_1 \right)}.$$

3.2 结构因子

根据位移-相移定理引入每一代的结构因子。

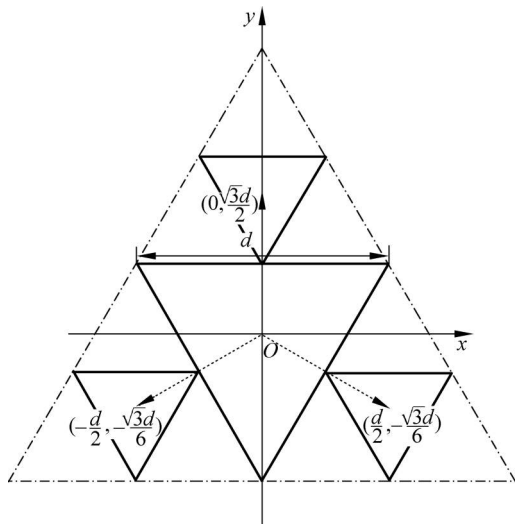


图 A.2 Sierpinski 垫片的位移示意图

由图中几何关系可知, 当正三角形边长为 d 时, 其下一代相应的相移因子为

$$P = 2 \cos \left(\frac{kd \sin \theta_1}{2} \right) \cdot \exp \left(\frac{ikd \sin \theta_2}{2\sqrt{3}} \right) + \exp \left(-\frac{ikd \sin \theta_2}{2\sqrt{3}} \right)$$

故对于第 n 代来说, 其相对于第 $(n-1)$ 代的相移因子为

$$P_n = 2 \cos \left(\frac{kd \sin \theta_1}{2^n} \right) \cdot \exp \left(\frac{ikd \sin \theta_2}{2^n \cdot \sqrt{3}} \right) + \exp \left(-\frac{ikd \sin \theta_2}{2^n \cdot \sqrt{3}} \right) \quad (\text{A. 13})$$

因此, 第 n 代的结构因子为^[5]

$$S_n(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n \left[\exp \left(-\frac{ikd \sin \theta_2}{2^i \cdot \sqrt{3}} \right) + 2 \cos \left(\frac{ka \sin \theta_1}{2^i} \right) \cdot \exp \left(\frac{ikd \sin \theta_2}{2^i \cdot \sqrt{3}} \right) \right] \quad (\text{A. 14})$$

由于母代(第 0 代)本身不存在结构因子, 仍然补充定义 $S_0(\theta_1, \theta_2) = 1$ 。

3.3 谱函数(复振幅)以及 n 代共存的 Fraunhofer 衍射场

将第 n 代的单元衍射因子与对应的第 n 代结构因子相乘, 得到第 n 代谱函数的表达式

$$u_n(\theta_1, \theta_2) = U_n(\theta_1, \theta_2) \cdot S_n(\theta_1, \theta_2) \quad (\text{A. 15})$$

对每一代的谱函数求和, 得 $(n+1)$ 代共存 Fraunhofer 衍射场的表达式

$$F_{n+1}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=0}^n u_j(\theta_1, \theta_2) \quad (\text{A. 16})$$

参 考 文 献

- [1] MONSURIU J A, FURLAN W D, PONS A, et al. Undergraduate experiment with fractal diffraction gratings[J]. European Journal of Physics, 2011, 32(3): 687.
- [2] 李平. Cantor 型分形光栅的夫琅禾费衍射特性研究[J]. 大学物理, 2002, (11): 11-14.
LI P. Diffraction properties of Cantor fractal gratings with Fraunhofer diffraction characteristics[J]. College Physics, 2002, (11): 11-14. (in Chinese)
- [3] LUCIANO Z, MARIO G. Fraunhofer diffraction by Cantor fractals; study of their lacunarity; proceedings of the Proc-SPIE, F, 2001.
- [4] ZHONG X. Spectral functions of self-similar structures[J]. 物理学报, 1990, 39(6): 8.
- [5] ZHONG X, ZHU Y, ZHOU Y. Power spectra of the angular fractals[M]. SPIE, 1993.
- [6] 钟锡华. 现代光学基础[M]. 现代光学基础, 2012.
- [7] CHEN G, ZHOU X, HE C, et al. Interpretation of starbursts of lights by far-field diffraction from polygonal vias[J]. 物理实验, 2019, 39(3): 27-31.