

利用瑞利数理论研究贝纳德对流的产生条件

钱庆余¹ 方爱平¹ 范富豪¹ 段玉文¹ 吴一粟¹ 蒋臣威¹ 冯俊¹ 张修兴² 王小力¹

(¹西安交通大学物理学院, 陕西 西安 710049; ²渭南师范学院物理与电气工程学院, 陕西 渭南 714099)

摘要 贝纳德对流是在从下方加热的流体的平面水平层中发生的一种自然对流现象。研究此现象对于深刻认识耗散结构的物理图像以及流体在混沌系统中的运动具有重要意义。为研究其产生的条件以及物理特性, 本文建立流体模型, 从基本控制方程组出发, 导出在固定边界条件下物理量满足的特征方程, 利用重要的无量纲数——瑞利数 R_a 来表征是否发生对流, 并推导出从静态突变至稳定对流的临界值 $R_{c1}=1708$ 。在理论结果的基础上, 使用 COMSOL Multiphysics[®] 进行了仿真模拟, 所得结果符合理论预言, 且通过导出运动动画进一步分析了液体的运动特性。为考察温度梯度较大时对流的第二次失稳, 引入洛伦兹方程组理论求解, 获得了第二个临界值 $R_{c2}=46177$ 。据此得到贝纳德对流的产生条件为 $R_{c1} < R_a < R_{c2}$ 。

关键词 瑞利-贝纳德对流; 耗散结构; 流体力学

USING RAYLEIGH NUMBER THEORY TO STUDY THE CONDITIONS OF BÉNARD CONVECTION

QIAN Qingyu¹ FANG Aiping¹ FAN Fuhao¹ DUAN Yuwen¹ WU Yisu¹ JIANG Chenwei¹
FENG Jun¹ ZHANG Xiuxing² WANG Xiaoli¹

(¹ School of Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049;

² School of Physics and Electrical Engineering, Weinan Normal University, Weinan, Shaanxi 714099)

Abstract Bénard Convection is a natural convection phenomenon in the plane horizontal layer of fluid heated from below. The study of this phenomenon is of great significance to deeply understand the physical image of dissipative structure and the motion of fluid in chaotic system. In order to study the conditions and physical properties of its generation, this paper establishes a fluid model, derives the characteristic equations satisfied by physical quantities under fixed boundary conditions from the basic set of control equations, uses an important dimensionless number, the Rayleigh number R_a , to characterize whether convection occurs or not, and deduces a critical value of convection from the static mutation to the stable convection $R_{c1}=1708$. The theoretical value is obtained and simulated using COMSOL Multiphysics[®] to verify that it meets the theoretical prediction and the motion characteristics of the liquid are further analyzed by deriving motion animations. In order to investigate the second instability of convection when the temperature gradient is large, Lorentz equations theory is introduced,

收稿日期: 2024-02-20

基金项目: 西安交通大学 2023 年基层教师教学发展组织建设项目(2302JF-01); 2023 年基层教学组织教学改革研究专项(基础课程); 渭南师范学院教育科学基金项目(2020JYKX021)。

通信作者: 蒋臣威, 西安交通大学物理学院副教授, jiangcw@mail.xjtu.edu.cn。

引文格式: 钱庆余, 方爱平, 范富豪, 等. 利用瑞利数理论研究贝纳德对流的产生条件[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 156-168.

Cite this article: QIAN Q Y, FANG A P, FAN F H, et al. Using Rayleigh number theory to study the conditions of Bénard convection [J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 156-168. (in Chinese)

and the second critical value R_{c2} can be solved by substituting the parameter, and under the assumption of the present paper, $R_{c2}=46177$. Accordingly, the conditions for the generation of Benard convection are $R_{c1}<Ra<R_{c2}$.

Key words Rayleigh-Bénard convection; dissipative structure; hydrodynamics

物理系统偏离平衡态时,在不稳定性之外可能会产生一些自组织新结构——对称性发生破缺,比如圆柱对称消失,出现对角度的依赖性,或时间平移对称性消失,出现特定的周期等^[1]。关于非平衡相变的研究在基础自然学科中具有十分重要的地位,它反映出物质是如何从混沌走向更高级的有序与组织的。著名的例子有化学中的 Belousov-Zhabotinsky 反应^[2],在该反应中各物质的量并非单调变化趋于平衡,而是呈现出周期性的振荡规律。1969 年,比利时物理学家普里戈津 (Prigogine) 利用非平衡态热力学观点从理论上论证了 BZ 反应存在的可能性,进一步结合其他的例子,将这些非平衡相变中出现的有序结构称为耗散结构,并因此获得了诺贝尔化学奖^[3,4]。

物理学聚焦的耗散结构则是更加基本的过程,利用热力学、流体力学等来刻画物理系统在不稳定性之上发生的有序突变,本文研究的瑞利-贝纳德对流 (Rayleigh-Bénard Convection, RBC) 便是一例。

1 研究背景

1.1 贝纳德对流简介

1900 年,法国科学家贝纳德 (Henri Bénard) 发表了他所观测到的薄层液体表面产生六角蜂窝状斑图的实验结果^[5]。该实验装置的基本结构是一个底部可以均匀受热的容器,加入液体后可形成厚度相同的薄层液体,将其放在加热器上徐徐加热。实验开始前液体处于静止状态,开始加热时液体仍然保持着这种平衡状态。然而,当上下温差达到一定程度,液面上突然出现规则的六边形对流图案。每个小六边形中心较暗处液块上浮,边缘较暗处液块下沉。在二者之间较明亮的环状区域液块作水平运动。如果进一步对下部液层加热,液体会进入到湍流状态。

1.2 前人进展

1900 年左右, Henri Bénard 第一次定量研究了贝纳德对流。他对流体内部的流动方向、上表

面图案的形状和特征长度进行了定量测定^[5]。更多科学家试图从理论上解释贝纳德实验中获得的结果。Lord Rayleigh 意识到温差在其中起到的重要作用,开始用瑞利数 Ra 来描述对流。他在 1916 年提出了基于浮力效应的反馈耦合理论,并使用一套完整的线性稳定性分析的方法,成功解释了贝纳德的部分结果^[6]。基于自由边界条件,他得到了临界瑞利数和对应的波数值。随后, Sir Harold Jeffreys 对更符合现实情况的刚性边界条件,进行稳定性分析,得到了此情况下的 R_c 和 k_c ^[7]。Pellow 和 Souhwell 在 1940 年同样获得了无滑动速度边界条件下的 R_c-k 曲线^[8]。

20 世纪 60 年代, Schlüter, Lortz 和 Busse (SLB) 三人对刚性边界下的弱非线性分析为现代贝纳德对流分析奠定基础^[9]。SLB 确定出瑞利-贝纳德对流的分叉是超临界的:即在临界值附近,系统将表现出稳定的对流模式。SLB 给出努塞尔数 Nu 的初始斜率,与早期 Silveston 的实验结果相符^[10]。对流模式分为滚筒形、正方形和六边形等。Malkus 和 Veronis 预测,在自由边界和 Boussinesq 条件下,对流图案应该呈现滚筒形^[11]。这一预测得到了实验观测的印证^[12]。

事实上,超过 R_c 后,瑞利-贝纳德对流系统的相空间会变得极其复杂。研究者开始用混沌理论来解释分岔的机制。相关方面的研究有 Saclay 关于混沌吸引子的研究^[13]、Jensen 的可变磁场条件下导电液体(汞)在对流中体现的多分形特性的研究^[14]等。E. N. Lorenz 则选用洛伦兹模型研究贝纳德对流的混沌现象^[15]。

本文通过建立流体模型,从基本控制方程组出发进行理论推导和计算,结合固定边界条件下的仿真模拟,得到了利用瑞利数判定贝纳德对流产生条件的方法,并给出了更加清晰的物理图像。

2 理论推导

2.1 控制方程组推导

为了推导流体运动控制方程组,首先作如下

守恒近似。

质量守恒,即任意一个流体微元在运动的过程中,其质量都不会发生改变,即

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{r}, t) d^3 r = 0$$

由输运定理,并将方程写成分量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (1)$$

动量守恒,即动量变化率等于外界施加的力,即

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho g z$$

其中,等式右边分别反映了压力、阻力与浮力的贡献, η 为流体的动力黏度。由于浮力只存在于 z 方向,分量形式可写作

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \nabla^2 u_i + \delta_{i3} \rho g \quad (2)$$

能量守恒,即流体宏观动能与内能之和等于外力做功与传导热量之和,利用傅里叶定律写出

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (3)$$

其中, $\kappa = \lambda / \rho C_p$ 为热扩散系数。

为简化研究,我们假定研究对象为不可压缩流体,同时采取 Boussinesq 近似^[16]:

(1) 对不可压缩流体,密度 $\rho = \rho_0$ 为定值。

(2) 为尽量更好地描述实际情况中密度随温度变化的行为,且考虑到在温差较小时密度波动量很小,于是仅在浮力项中引入

$$\rho \approx \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)]$$

其中, α 为体膨胀系数。即忽略了方程(1)(2)(3)中除 $\rho g z$ 项之外的密度变化。

基于以上假设,重写方程如下,它们是基本的RBC控制方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] g z \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \end{cases}$$

2.2 方程处理

为分析贝纳德对流的稳定条件,考虑在基态流动上加一个小扰动,把各个物理量写成基态+扰动的叠加形式

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$$

$$p = p_0(\mathbf{r}, t) + p'(\mathbf{r}, t)$$

$$\theta = \theta_0(\mathbf{r}, t) + \theta'(\mathbf{r}, t)$$

其中, θ 是经过归一化处理的温度场量。由于设置初始条件为流体静态平衡,速度场基态 $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$,并假设温度场基态为线性分布 $\theta_0(\mathbf{r}, t) = 1 - z$ 。将基态代入控制方程组,并与原方程相减,得到扰动形式的控制方程组

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = g \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + \nu \nabla^4 w \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta w + \kappa \nabla^2 \theta \quad (6)$$

其中, ζ 为 z 方向的速度旋度分量,即 $\zeta = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$, w 为 z 方向的速度分量, β 为 z 方向的温度梯度。

进一步地,每一个物理量的扰动量,可以在 xy 平面上展开成多个简谐波的叠加

$$\zeta = Z(z) \exp [i(k_x x + k_y y) + pt]$$

$$w = W(z) \exp [i(k_x x + k_y y) + pt]$$

$$\theta = \Theta(z) \exp [i(k_x x + k_y y) + pt]$$

可以看出,在这些方程的形式下

$$\frac{\partial}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -k^2, \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} - k^2$$

于是将扰动场方程(4)(5)(6)重写为

$$p \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W = -g \alpha k^2 \Theta + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W \quad (7)$$

$$p \Theta = \beta W + \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \Theta \quad (8)$$

$$p Z = \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) Z \quad (9)$$

2.3 边界条件

我们的研究模型采用固定边界条件(rigid surface),即在容器的上下表面上:

(1) 温度恒定 $\theta = 0$ 。

(2) 速度沿 z 方向分量 $w = 0$ 。

除此之外,我们引入黏性流体的无滑移边界条件(no-slip),即流固边界处速度法向分量和切向分量均为零:

(3) 速度沿 xy 方向分量 $u = v = 0$ 。

针对之前得到的方程(7)(8)(9),边界条件可

以写为

$$\Theta=0, \quad W=0, \quad Z=0, \quad \frac{dW}{dz}=0 \quad (10)$$

2.4 特征方程求解

利用长度和温度的特征量

$$[L]=d, \quad [T]=\frac{d^2}{\nu}$$

将方程无量纲化,并引入参数

$$a=kd, \quad \sigma=\frac{pd^2}{\nu}$$

$$\begin{aligned} &\text{定义算符 } D=d/dz, \text{联立方程消去 } \Theta \text{ 并化简} \\ &(D^2-a^2)(D^2-a^2-\sigma)(D^2-a^2-p\sigma)W \\ &=-R_a \cdot a^2 W \end{aligned} \quad (11)$$

至此,我们得到了流体力学中两个重要的无量纲数,一是普朗特数(Prandtl number),即

$$p=\frac{\nu}{\kappa}$$

它反映流体中动量扩散率与热扩散率的比值,在此不多作赘述。

第二个无量纲数是本文研究的重点,它在控制 RBC 过程中有关键作用,即瑞利数(Rayleigh number),即

$$R_a=\frac{ga\beta d^4}{\kappa\nu} \quad (12)$$

它反映自然对流与热扩散、动量扩散的比。

继续考查方程(11),在边界条件(10)的约束下,可以解出瑞利数的一个特征解 $R_a=$

$$\frac{(\pi^2+a^2)^3}{a^2 \left\{ 1-16a\pi^2 \cosh^2 \frac{1}{2}a / [(\pi^2+a^2)^2 (\sinh a + a)] \right\}} \quad (13)$$

它是关于无量纲数 a 的函数。对于一个特定的扰动(由 a 表征),对应一个瑞利数的特征解,暂记作 R_c 。当实际瑞利数 $R_a < R_c$ 时,该扰动对系统来说是稳定的,即不会发生贝纳德对流,反之则会发生第一次失稳(对流)。由稳定性理论,只要 R_a 对任意一个扰动是不稳定解,我们便称其为不稳定的。于是,我们希望找到一个临界值 R_c ,在它之下对任意扰动都是稳定的,即发生贝纳德对流的临界值。

显然, R_a 关于 a 的最小值便是寻找的临界值 R_c ,可数值解得,当 $a=3.117$ 时,有 $R_c=1707.762$ 。

2.5 特征解对应的物理意义

除去发生贝纳德对流的临界条件之外,我们还希望考察方程解与对流图案形状的关系,以及无量纲数 a 的物理意义,以此深入探究贝纳德对流的性质。

我们通过考察简单情况来说明特征解的对称特性,以及 a 的实际含义。当所有物理量仅与 x 、 z 方向有关,即场沿 y 方向具有平移不变性时,对流胞体将是沿 y 方向延伸的卷筒形状,如图 1 所示。

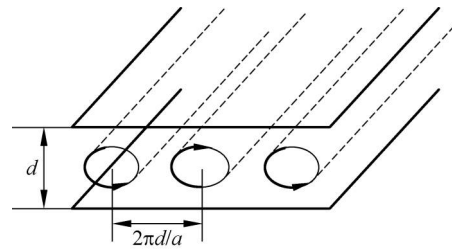


图 1 卷筒型胞体示意图

且对应的 w 的特征解具有以下形式

$$w=W(z) \cos \frac{2\pi}{L}x$$

可相应解得 $u=-\frac{DW}{a^2} \frac{2\pi}{L} \sin \frac{2\pi}{L}x, v=0$ 。稳定对流时,两个胞体的接触面上水平速度 $u=v=0$,故 x 只能取分立的一系列值

$$x=\pm \left(n+\frac{1}{2}\right)L \text{ 及 } \pm nL$$

定义卷筒状对流的环流尺度 s 为相邻两个胞体的距离,于是有 $s=L=\frac{2\pi}{a}$ 。因为在之前对方程做过

无量纲化,还原量纲便要乘上特征长度 $d, s=\frac{2\pi d}{a}$ 。

这就将方程中抽象的 a 与实际对流的物理图案联系在了一起。类似地,在 xy 面投影为矩形的胞体(简称矩形胞体,下文的六边形胞体亦如是)有特征解形式

$$w=W(z) \cos \frac{2\pi}{L_x}x \cos \frac{2\pi}{L_y}y$$

$$\text{两个方向的环流尺度: } s_x=\frac{\pi}{a_x}d, s_y=\frac{\pi}{a_y}d$$

对六边形胞体,特征解为

$$w=\frac{1}{3}W(z) \left\{ 2\cos \frac{2\pi}{\sqrt{3}L}x \cos \frac{2\pi}{3L}y + \cos \frac{4\pi}{3L}y \right\}$$

$$\text{定义环流尺度为六边形边长: } s=\frac{4\pi d}{3a}$$

3 仿真模拟

我们使用 COMSOL Multiphysics® 软件分别从“二维轴对称”和“三维”两种维度对该物理体系进行建模模拟。如图 1 所示,考虑到该体系具有较好的旋转对称性,采用“二维轴对称”假设进行计算将会大大减少运算量,便于调整参数发现更多现象及得出更一般的结论。“三维”模型运算量巨大,耗时长,因此在建模中我们更多的是用到“二维轴对称”模型,而三维模型则多用作对结论的验证。



图 2 维度选择

3.1 模型定义

我们仿真时使用的流体介质为纯水。容器为刚性圆柱。假设容器具有绝热侧壁和恒温上下表面。具体的参数设置如表 1 所示。该表假设水的物性参数在温差较小时可以近似为其在环境温度下的物性参数,即忽略了水物性随温度的变化。考虑到实验温差数量级较小,该假设是合理的。

表 1 参数设置

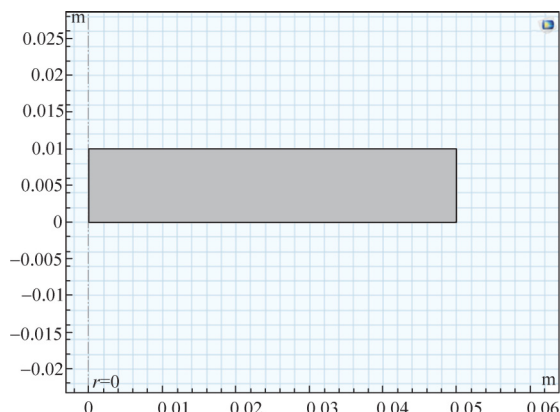
物理量	符号	值
容器高度	d	0.01m
容器半径	r_0	0.05m
环境温度	T_0	298.15K
热膨胀系数	α	$2.57 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
重力加速度	g	$9.8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
运动黏度	ν	$8.9245 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
导热系数	λ	$0.60653 \text{ W/m} \cdot \text{K}$
密度	ρ	997.05 kg/m^3
恒压热容	C_p	4181.3 J/K

在正式开始建立模型之前,我们先设置环境温度。在“物理场”选项卡中点击“共享属性”,选择“环境属性”。在“环境属性”的设置栏中,找到“环境条件”栏目下的 T_{amb} 输入框,键入“298.15[K]”。

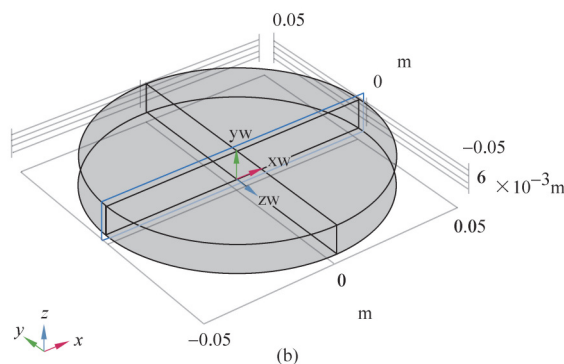
3.2 几何建模

我们现在考虑该模型的几何结构。无论是

“二维轴对称”抑或“三维”,在几何上都可以看作是一个矩形绕一条边为轴旋转而来,因此如图 3 所示,我们先构建一个矩形,并指定一条边作为转轴。在三维情况下完全类似,我们创建一个工作平面然后指定转轴旋转得到圆柱体容器。



(a)



(b)

图 3 几何建模

(a) 二维截面; (b) 工作平面

如图 4 所示,在早期的模型中我们还考虑了容器厚度、容器倾斜侧壁对模型的影响^[17]。但后来我们认识到这些琐碎的因素不利于观察本质的物理现象,因此这些细节在此次分析中被略去了。

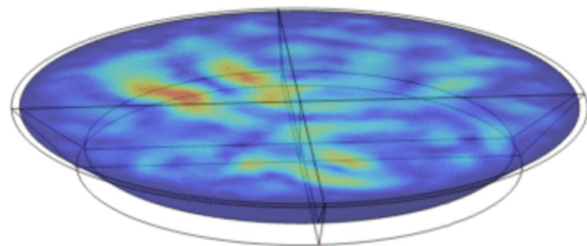


图 4 早期模型^[17]

3.3 材料设置

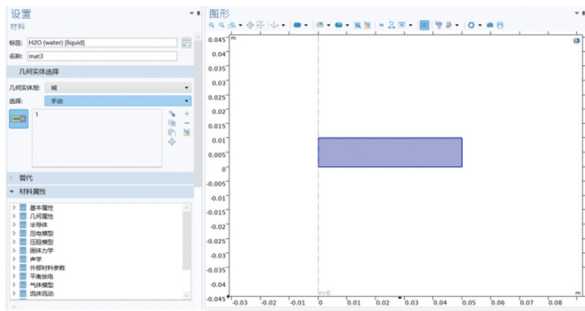
由于我们忽略了容器厚度的影响并设置了固

定边界,容器实际上根本无须设置材料,我们只需指定中央流体场的材料为水。如图 5 所示,我们在搜索框中键入“water”,双击选择基础材料库中的“H2O(water)[liquid]”添加到材料。

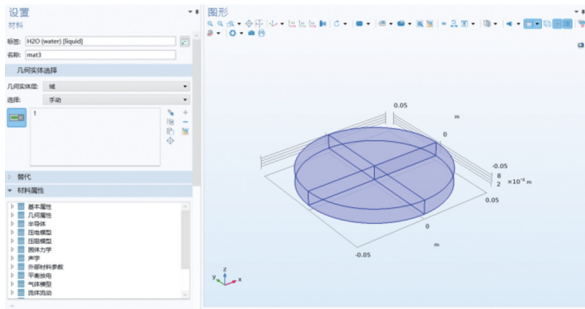


图 5 材料设置

随后如图 6 所示,我们指定材料所作用的域作为流体场所在的区域。至此,材料的设置就完



(a)



(b)

图 6 域选择

(a) 二维域; (b) 三维域

成了。一般而言,为方便后续操作,也可以将流体所在的域指定为新的名称,不过由于我们选择的域在模型中只包含了域 1,因此此处从简了。

3.4 物理场:层流

首先,如图 7 所示,我们在“模型开发器”下的“层流”选项卡下选择层流场所作用的域。由于在该模型中只存在这一个区域,所以这一步通常是无须设置而自动完成的。但当我们考虑实际问题而需考虑容器对模拟的影响时,这一步设置就是必要的。

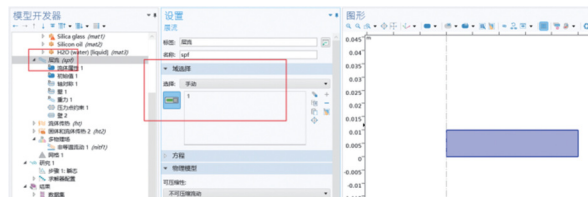


图 7 层流域

考虑到当温度梯度不大且压强变化不明显时,水的密度几乎是不变的。因此我们在“物理模型”栏中的“可压缩性”列表中选择“不可压缩流动”。事实上,除水下爆炸等特殊情况之外我们往往都可以使用不可压缩近似。然后勾选“包含重力”和“使用约化压力”选框。在参考位置中,对三

维模型,指定 $\mathbf{r}_{\text{ref}} = \begin{pmatrix} r_b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$,对二维模型,指定 $\mathbf{r}_{\text{ref}} =$

$\begin{pmatrix} r_b \\ d \end{pmatrix}$ 。单击展开“离散化”栏,如图 8 所示,选择

“P2+P1”。这将会使用二次型函数解决流体速度问题。

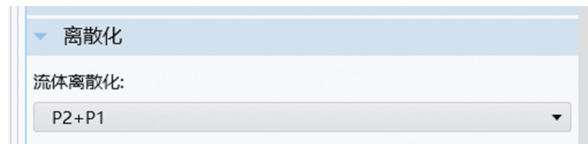


图 8 离散化

在“物理场”选项卡中选择“点”,然后设置压力点约束。如图 9 所示,对二维模型只需标注的一个点,而对三维模型需要同时选择标注的四个点添加压力点约束。

最后,我们在“物理场”选项卡中点击“边界”,选择“壁”。在“边界选择”中选中容器的上下表面和侧壁,然后在壁的边界条件中选择“无滑移”。

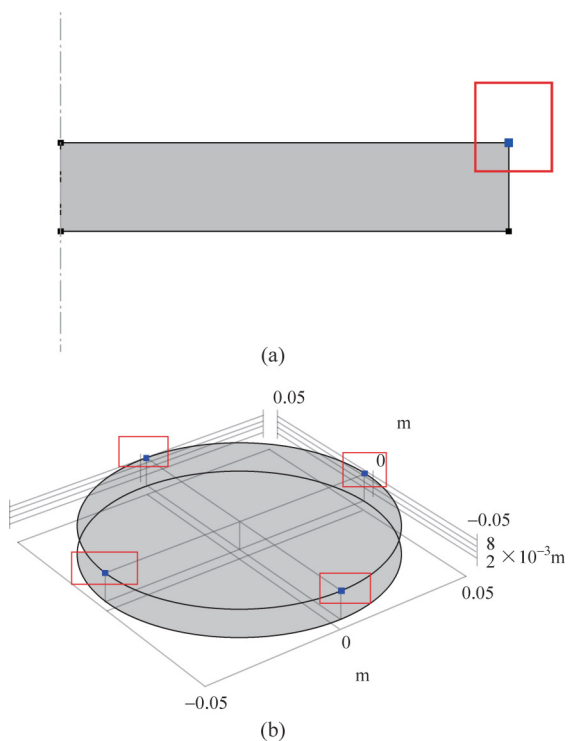


图9 压力点约束

(a) 二维压力点; (b) 三维压力点

此即此前提到的固定边界条件。于是层流物理场的设置就完成了。

3.5 多物理场:非等温流动

在“模型开发器”的“多物理场”节点下选择“非等温流动”。在其设置窗口中找到“材料属性”栏,如图10所示,启用“布辛涅斯克近似”。

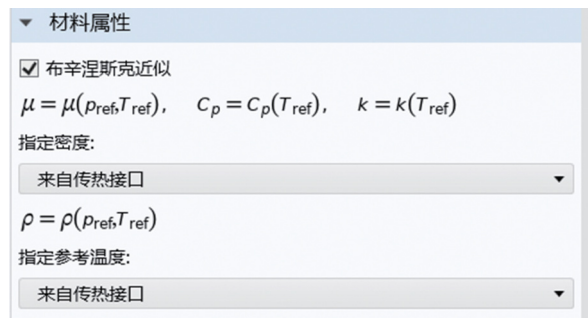


图10 布辛涅斯克近似

3.6 物理场:流体传热

在“模型开发器”下的“流体传热”节点下点击“初始值1”,在其设置中找到 T ,输入“298.15[K]”作为流体的初始温度。

在“物理场”选项卡中找到“边界”选择“温度”。如图11所示,选中容器的上边界,设置上表

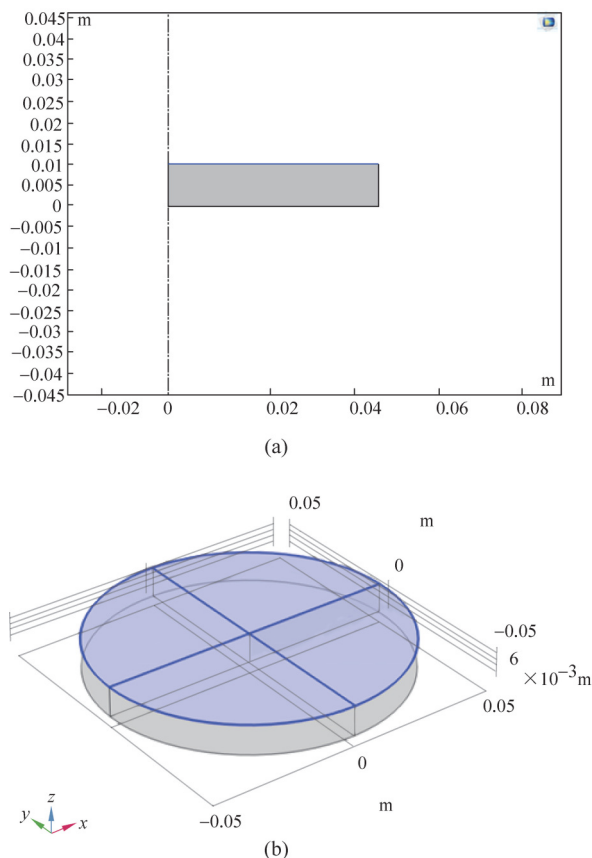


图11 上表面温度

(a) 二维上表面温度; (b) 三维上表面温度

面的温度,在 T_0 中选择之前设定的“环境温度”。

然后重复上面这一步骤,我们为容器的下表面设置温度。与之前的操作完全类似,只是在边界选择环节我们选定容器的下表面。在设定温度的数值时,为了后续调整温度梯度方便,如图12所示,我们可以在数值处填写成 $T_0 + \Delta T$ 的形式。其中 ΔT 的具体数值,可以使用一个简易的MATLAB脚本计算得到,代码如下:

```
%Δt for water
alpha=0.257e-3;
Ra=2000;
L=0.01;
g=9.8;
niu=8.9245e-7;
lambda=0.60653;
rho=997.05;
cp=4181.3;
kappa=lambda/(rho*cp);
Δt=(Ra*niu*kappa)/(alpha*g*L^3)
```

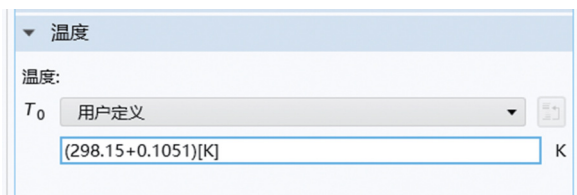


图 12 温度设置

如图 13 所示,右键“模型开发器”下的“流体传热”,在右键菜单中找到“热绝缘”。这正是我们之前假设的绝热侧壁边界条件。

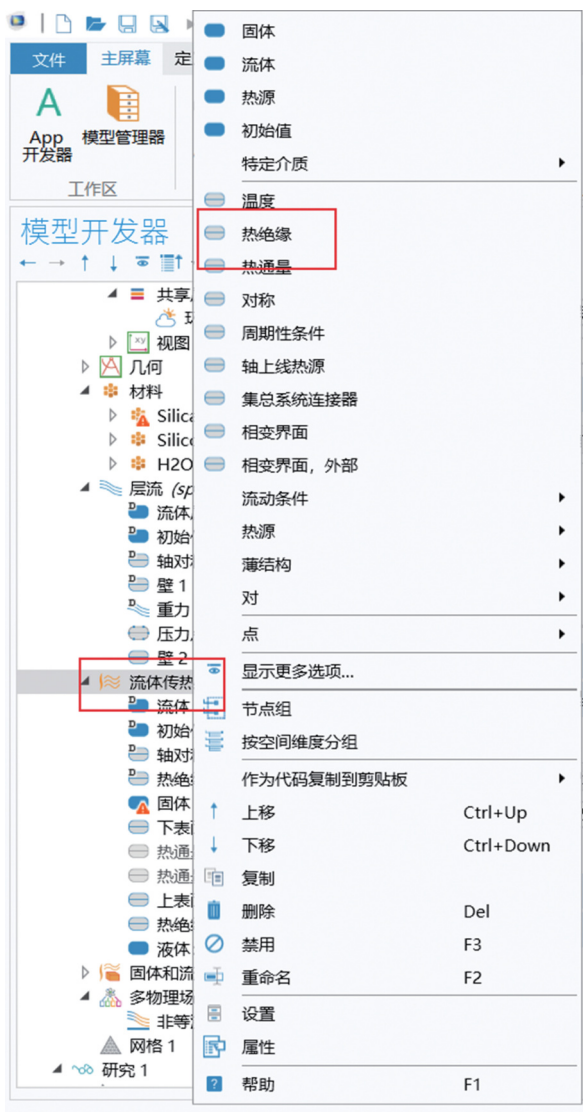
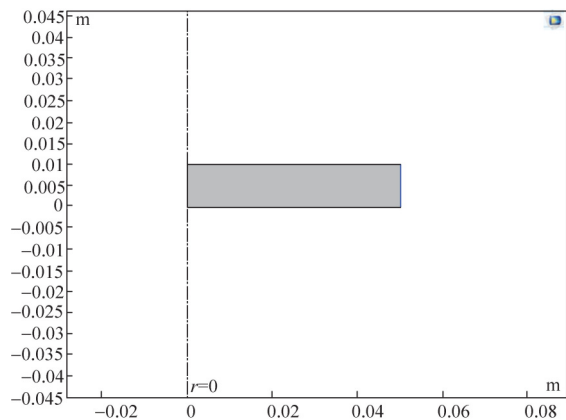
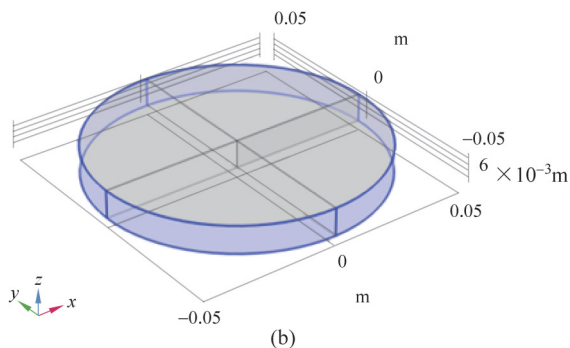


图 13 热绝缘

如图 14 所示,在选择热绝缘作用的壁时,我们选择容器的侧壁。这是基于绝热侧壁假设。当考虑非绝热侧壁时,这里应改为设置“热通量”。至此,流体传热物理场的设置就完成了。



(a)



(b)

图 14 热绝缘侧壁

(a) 二维热绝缘; (b) 三维热绝缘

3.7 网格

在“模型开发器”下找到“网格 1”。在“网格”的设置窗口中找到“物理场控制网格”。这里可以根据所研究问题的精度与计算机的算力选择单元大小。这里选择“常规”即可。完成后点击“全部构建”,观察到如图 15 所示的结果。

3.8 研究:瞬态

由于对流发生的特征时间在我们的模型中大约为 6 分钟,我们可以根据具体需要计算模型在 6~15 分钟内的演化情况。在“模型开发器”中点击“步骤 1:瞬态”,如图 16 所示,找到“研究设置”。在“输出时步”中键入“range(0,3[s],9[min])”。然后从“容差”下拉菜单中选择“用户控制”,在“相对容差”中键入“1e-3”。

在“研究”选项卡下点击“显示默认求解器”,然后在“模型开发器”下的“解 1”节点下点击“瞬态求解器 1”。如图 17 所示,在其设置窗口中展开“绝对容差”栏。选择“容差方法”为“手动”然后在“绝对容差”框中键入“2.5e-5”。然后在“研究”中点击“计算”。

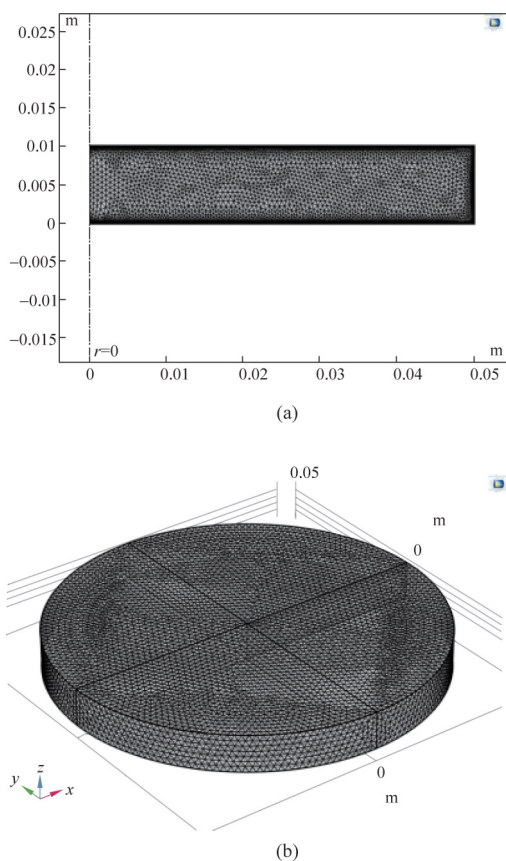


图 15 构建网格

(a) 二维网格; (b) 三维网格



图 16 求解器设置



图 17 绝对容差

3.9 结果处理

在处理结果时,由于我们更关注流体中速度场的分布,我们可以画出特定时刻下二维模型的速度或速率分布图与全过程动态图、三维模型的某个横纵截面的速度或速率分布图与全过程动态图。如图 18 所示,我们可以截取三维柱体的横截面或一系列平行的纵截面。



图 18 体截面

瞬时结果如图 19 所示。可以根据需要调整配色方案和单位。

生成动态结果:找到“结果”选项卡,选择“动画”,根据需求选择“播放器”或“文件”。这里以“播放器”为例,如图 20 所示,根据之前所计算的具体步长可以设置具体的帧率,这相当于设置了动画相对于真实物理模型的时间倍率。动画生成完毕后,点击红框处即可播放。若是选择了“文件”,则可以导出对应的动画文件。

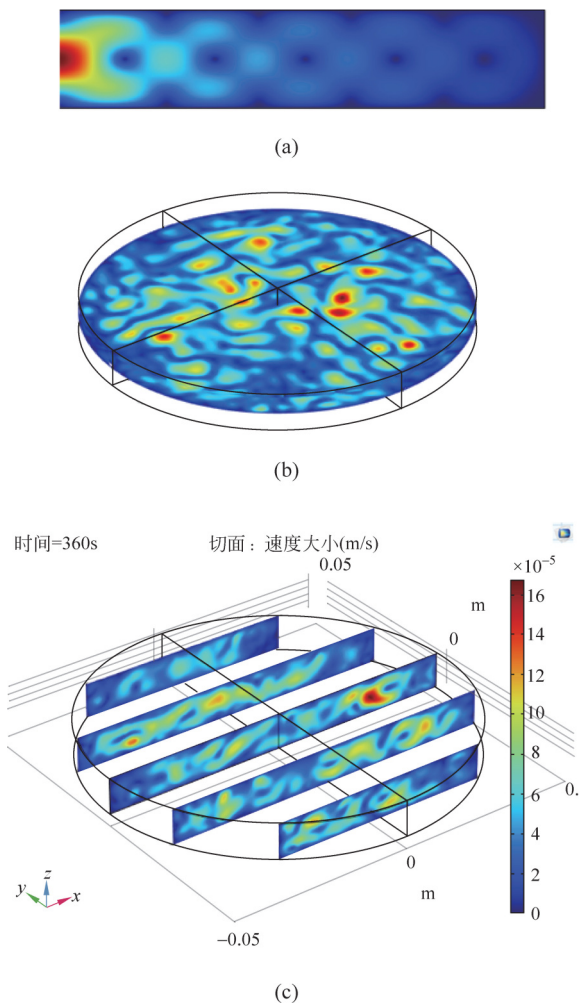


图 19 瞬时结果

(a) 二维结果; (b) 三维横截面; (c) 三维纵截面

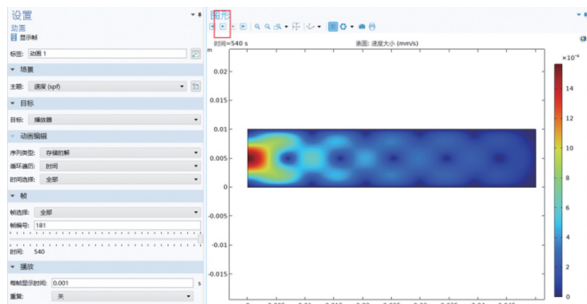


图 20 动画生成

3.10 验证结果, 新的问题

在第 2 节理论推导部分, 已经证明在固定边界条件模型中, 临界瑞利数 $R_c = 1707.762$ 。通过调整温度梯度改变 R_a 值, 并分析仿真动画结果, 即可验证贝纳德对流是否在 $R_a > R_c$ 时发生, 而 $R_a < R_c$ 时不发生。

我们分别取瑞利数为 50、1500、2000、3000、20000, 仿真结果如图 21 所示。

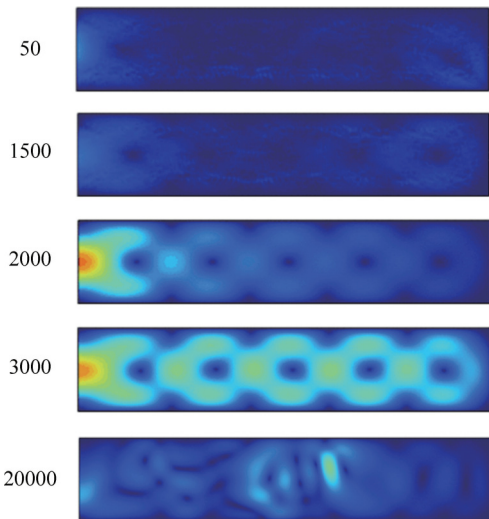


图 21 仿真验证结果

以上是流体运动典型瞬间的截图, 若结合生成动画分析, 可看出在瑞利数小于临界值时, 液体虽然会产生小扰动, 但在一段时间后将重新恢复静力学平衡。与之相比, 在 $R_a = 2000, 3000$ 时, 液体的速度场产生了稳定有序的结构, 不会随时间推移消失, 据此可以确定, 当瑞利数大于临界值时, 液体产生了贝纳德对流。在此基础上, 可以缩短步长、逼近临界理论值进一步验证, 实际证明这种方法是有用的, 且在一定误差内与理论预言符合得很好。

然而, 贝纳德对流产生的条件并没有就此被完美解释, 一个问题逐渐变得明晰而重要: 当温度梯度很大、瑞利数很大时, 稳定对流是否能继续保持稳定?

在图 21 中, 可以看到当瑞利数非常大时, 液体呈现出完全不同的运动模式, 这迫使我们思考: 是否存在第二个临界瑞利数, 反映着液体从稳定对流到无序震荡或湍流的阶跃? 又该如何计算?

4 理论补充

查阅文献以及实际实验数据, 第二个临界状态是确实存在的^[18-20], 将此时对应的瑞利数记作 R_{c2} 。为讨论 R_{c2} 确切的计算方法, 在此引入另外一种描述流体运动的理论: 洛伦兹方程^[21]。

基本控制方程仍如 2.1 节中列出的那样,但引入流函数 $\psi = \int_A^P (u dy - v dx)$, 并将 ψ 和 θ 展开成傅里叶级数,取最低一阶项。

定义 X, Y, Z 为展开系数,并引入无量纲时间项 $\tau = \frac{\pi^2 \kappa}{d^2} (1+a^2)t$, 可将方程整理成洛伦兹方程组的形式

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -\sigma(X-Y) \\ \frac{dY}{d\tau} = rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} = -bZ + XY \end{cases} \quad (14)$$

其中, r 为相对瑞利数,即 $r = \frac{R_a}{R_{c1}}$ 。

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$$

$$b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + a^2}$$

X, Y, Z 构成一个相空间,空间坐标表征对流运动的状态,当坐标稳定于原点外的某一点时,说明发生了稳定对流。现讨论相空间的平衡点,即 $\frac{dX}{d\tau} = 0, \frac{dY}{d\tau} = 0, \frac{dZ}{d\tau} = 0$ 的情况,解得此时平衡点最多有三个

$$\begin{cases} X=0, Y=0, Z=0 \\ X=Y=\pm\sqrt{b(r-1)}, Z=r-1 \end{cases}$$

若 $r < 1$, 则系统只有一个平衡点,即 $X=0, Y=0, Z=0$, 此平衡点是不动点。随着 r 的增大,平衡点会增加, $r > 1$ 时存在三个平衡点,这三个点也叫吸引子,从而可以形成贝纳德对流,此时就是前面探讨的 $R > R_c$ 的情况。但随着 r 的增大,该微分方程的基解系会出现 e 的正次方幂,从而使系统脱离平衡状态,所以存在第二个临界 r_c 。

如图 22 所示,当 r 足够大时原本两个平衡点邻域内的相轨交错在了一起,从而失稳,两个平衡点 C_1, C_2 成为不稳定焦点,发展为奇异吸引子。

现讨论 r 的上界 r_c , 将洛伦兹方程改写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x \\ y & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

将此方程组在平衡点 C_1 或 C_2 线性展开,原

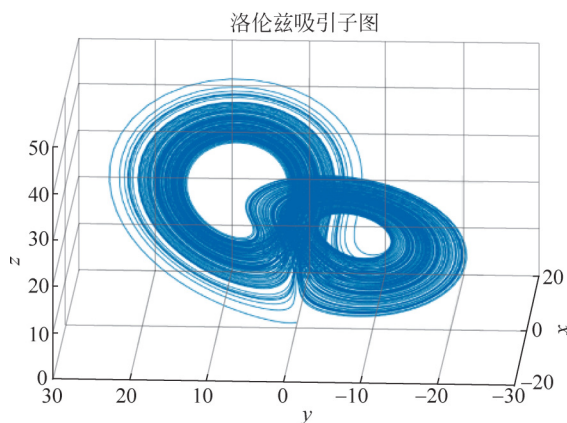


图 22 r 足够大时系统的相图

方程组有

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -C \\ C & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

其中, $C = x = y = \sqrt{b(r-1)}$ 。

代入得到微分方程组的特征方程

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0$$

使用 Cardano 方法^[22]求解得

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} [3b(\sigma + r) - (\sigma + b + r)^2]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{27} [2(\sigma + b + r)^3 - 9b(\sigma + r)(\sigma + b + r) + 54\sigma b(r-1)]$$

$$\lambda_3 = \sqrt[3]{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1^3}} + \sqrt[3]{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1^3}}$$

当三者都是小于 0 的时候,可以得到的基解

矩阵在 $t \rightarrow \infty$ 时是趋于 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的,说明该点还是正常

的吸引子,当 λ_i 其中有一个大于 0,就出现奇异吸引子,从而变得不稳定。

即 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$

$$\lambda_1 \lambda_2 (\sqrt[3]{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1^3}} + \sqrt[3]{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 + 4\lambda_1^3}}) > 0$$

代入 λ_1, λ_2 解得

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - (b + 1)}$$

所以

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - (b + 1)} \quad (15)$$

为验证上式的正确性,取 $\sigma = 10, b = 8/3$, 得到理论 $r_c = 24.7368$, 并使用 MATLAB 作出 r 在

22~25 间变化时对应的相轨图。

从图 23 可以看出,在 r 从 24.7 增加至 24.8 后,出现奇异吸引子,液体发生第二次失稳,从稳定对流过渡至湍流。这与理论预言的 24.7368 符合得很好。

结合 $r = \frac{R}{R_c}$, 可以得出 R_a 的第二个临界值 R_{c2}

$$R_{c2} = R_c r_c = \frac{\pi^4 (1+k^2)^3 \sigma (\sigma + b + 3)}{k^2 [\sigma - (b+1)]} = \frac{64\pi^4 \sigma (\sigma + b + 3)}{(4b^4 - b^3) [\sigma - (b+1)]} \quad (16)$$

若代入液体的真实普朗特数 σ 与 a , 便可计算出 R_{c2} 的具体数值。在本模型的条件, 计算得 $R_{c2} = 46177$ 。

至此, 我们完成了对第二个瑞利数临界值的理论预言与计算。

5 结语

结合理论推导和 COMSOL 仿真模拟, 本文证实了贝纳德对流的发生条件为 $R_{c1} < R_a < R_{c2}$ 。当 $R_a < R_{c1}$ 时, 液体维持静力学平衡; 当 $R_a > R_{c2}$ 时, 液体发生湍流。上述两个临界值的计算方法已在文中给出, 实际实验与模拟中可通过调节温度梯度进行验证。同时, 我们对贝纳德对流特征方程组解的对称性、波数的物理意义进行了分析, 并在不同的胞体形状下将其与环流尺度联系在一

起, 使方程的物理图像更加清晰。

需要强调, 本文采用的模型是固定边界条件下的圆盘形水的对流, 若使用自由边界条件, 或考虑液体表面与空气的接触, 则需另外写出约束条件求解, 并考虑马兰戈尼效应 (Marangoni Effect)^[23], 基本思想和研究方法与本文类似。

参 考 文 献

- [1] 于渌, 郝柏林. 边缘奇迹: 相变和临界现象[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] PETROV V, GÁSPÁR V, MASERE J, et al. Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction[J]. Nature, 1993, 361: 240-243.
- [3] PRIGOGINE I, LEFEVER R. Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. II[J]. Journal of Chemical Physics, 1968, 48 (4): 1695-1700.
- [4] PRIGOGINE I. Dissipative structures, dynamics and entropy[J]. International Journal of Quantum Chemistry, 1975, 9: 443-456.
- [5] BÉNARD H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide[J]. Rev. Gén. Sci. pures et appl. 1900, 11: 1261-1271 & 1309-1328.
- [6] RAYLEIGH L, LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1916, 32(192): 529-546.
- [7] JEFFREYS H. The stability of a layer of fluid heated from below[J]. Phil. Mag. 1926, 2(7): 833; Some cases of instability in fluid motion[J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1928, 118: 195.
- [8] CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[M]. Oxford: Clarendon Press, 1961.

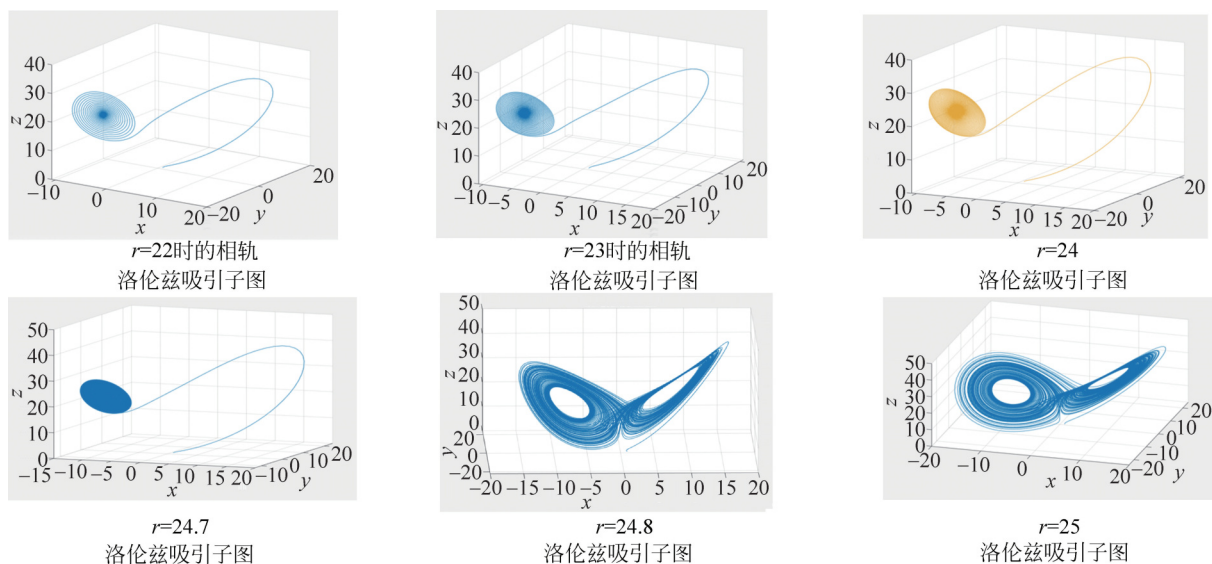


图 23 相轨变化图

- [9] LIU J, AHLERS G. Rayleigh-Bénard convection in binary-gas mixtures: Thermophysical properties and the onset of convection[J]. *Physical Review E*, 1997, 55(6): 6950.
- [10] SILVESTON P L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten[J]. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1958, 24: 29-32.
- [11] MALKUS W V R, VERONIS G. Finite amplitude cellular convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1958, 4(3): 225-260.
- [12] BAJAJ K M S, MUKOLOBWIEZ N, CURRIER N, et al. Wave number selection and large-scale-flow effects due to a radial ramp of the spacing in Rayleigh-Bénard convection[J]. *Physical Review Letters*, 1999, 83(25): 5282.
- [13] MALRAISON B, ATTEN P, BERGÉ P, et al. Dimension d'attracteurs étranges: une détermination expérimentale en régime chaotique de deux systèmes convectifs [J]. *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, chimie, sciences de l'univers, sciences de la terre*, 1983, 297(3): 209-214.
- [14] JENSEN M H, KADANOFF L P, LIBCHABER A, et al. Global universality at the onset of chaos: results of a forced Rayleigh-Bénard experiment[J]. *Physical Review Letters*, 1985, 55(25): 2798-2801.
- [15] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *Journal of Atmospheric Sciences*, 1963, 20(2): 130-141.
- [16] BOUSSINESQ J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond[J]. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1872, 17: 55-108.
- [17] 李睿航, 方爱平, 陈子龙, 等. 基于耗散结构的贝纳德对流研究[J]. *大学物理*, 2020, 39(12): 75-80.
- LI R H, FANG A P, CHEN Z L, et al. Bernard convection prediction based on dissipative structure[J]. *College Physics*, 2020, 39(12): 75-80. (in Chinese)
- [18] MANNEVILLE P. Rayleigh-Bénard convection: Thirty years of experimental, theoretical, and modeling work [M]. New York: Springer New York, 2006.
- [19] BUSSE F H. Transition to turbulence in Rayleigh-Bénard convection[J]. *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*, 2005: 97-137.
- [20] DAVAILLE A, LIMARE A. Laboratory studies of mantle convection[J]. *Treatise on Geophysics 2007*, 7: 89-165.
- [21] 陆同兴. 非线性物理概论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002.
- [22] SHMAKOV S L. A universal method of solving quartic equations[J]. *Int. J. Pure Appl. Math*, 2011, 71(2): 251-259.
- [23] CHAR M I, CHIANG K. Stability analysis of Benard-Marangoni convection in fluids with internal heat generation [J]. *Journal of Physics D*, 1994, 27: 748-755.