

电磁场波动方程的唯一解必然满足 Maxwell 方程

闫 述

(江苏大学计算机科学与通信工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要 从 Maxwell 方程组导出的波动方程的解, 代回 Maxwell 方程中去是否还能得到满足, 是电磁场与电磁波课程学习中有时会遇到的问题。本文给出了由自由空间的无源 Maxwell 方程导出电场和磁场波动方程的过程, 然后根据均匀平面波的定义, 求得波动方程的通解。证明这些解满足 Maxwell 散度方程, 但由于含有与源相关的待定常数, 故无法判定它们是否满足 Maxwell 旋度方程。验证某个矢量函数是否满足波动方程和 Maxwell 方程的习题, 并不具有波动方程的解不一定满足 Maxwell 方程的含义。教材中关于满足波动方程的场量不一定满足 Maxwell 方程的阐述, 指的是未获得波动方程唯一性解的情形; 所提出的由波动方程求出一个场量后, 再由 Maxwell 方程求出另一场量的解题方法, 目的是当无源时可获得更多的信息, 有源时避免复杂源项降低求解难度。可以证明, 电偶极子电场和磁场波动方程的唯一解, 满足 Maxwell 方程组中的全部方程。根据电磁场的唯一性定理和宏观电磁场时空分布的确定性, 无论求解空间有源还是无源, 只要能够获得波动方程的唯一解, 这些解必然满足 Maxwell 方程。

关键词 电磁场波动方程; Maxwell 方程; 解; 矢量函数; 满足; 唯一解; 唯一性定理

THE UNIQUE SOLUTION OF WAVE EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELDS MUST SATISFY MAXWELL'S EQUATIONS

YAN Shu

(School of Computer Science and Communication Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013)

Abstract Whether the solutions of the wave equations derived from Maxwell's equations can be satisfied by substituting them back into the Maxwell's equations is a question asked in the study of electromagnetic fields and waves course. This paper gives the process of deriving the wave equations of electric and magnetic fields from Maxwell's equations without sources in a free space, and then, by the definition of uniform plane wave, the general solutions of wave equations are obtained. And it is proved that these solutions satisfy the Maxwell's divergence equations. Therefore, due to the presence of undetermined constants relative to the source, it is impossible to determine whether they satisfy the Maxwell's curl equations. The exercise to verify whether a vector function satisfies wave equation and Maxwell's equation does not mean that the solution of wave equation does not necessarily satisfy the Maxwell's equation. A de-

收稿日期: 2020-09-22

基金项目: 国家自然科学基金(41374129)。

作者简介: 闫述, 江苏大学计算机科学与通信工程学院教授, yanshu@ujs.edu.cn。

引文格式: 闫述. 电磁场波动方程的唯一解必然满足 Maxwell 方程[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 11-16.

Cite this article: YAN S. The unique solution of wave equations of the electromagnetic fields must satisfy Maxwell's equations[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 11-16. (in Chinese)

scription in the textbook that the field satisfying wave equation does not satisfy the Maxwell's equation refers to the situation where the unique solution of the wave equation is not obtained. The purpose of the method to solve a field from wave equation first and then to solve another field from Maxwell's equation is to obtain more information when the source does not exist, and to avoid complex source term to reduce the difficulty of solving the problem when the source exists. It can be proved that the unique solutions of the wave equations of the electric field and magnetic field generated by an electric dipole satisfy all the equations in the Maxwell equations. According to the uniqueness theorem of electromagnetic field and determinacy of space-time distribution of macroscopic electromagnetic field, whether the solving space with the source or without the source, as long as the unique solution of the wave equation can be obtained, these solutions must satisfy Maxwell's equations.

Key words wave equations of the electromagnetic fields; Maxwell's equations; solution; vector function; satisfy; unique solution; uniqueness theorem

电磁场的求解方法之一,是从 Maxwell 方程组导出电场和磁场的波动方程,通过求解波动方程求得电磁场量,由此引出满足电磁场波动方程的解是否满足 Maxwell 方程的疑问。产生疑问的原因,可能是对习题和教材的解读有关,大致有两种来源:

第一种,文献[1,2]的习题 4.4 要求证明:矢量函数 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$ 满足真空(自由空间^①)中的无源波动方程 $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$,但不满足 Maxwell 方程。

证明^[3]: $\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \mathbf{e}_x$, $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \mathbf{e}_x$, 所以 $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \mathbf{e}_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \mathbf{e}_x = 0$, 即 $\mathbf{E}$ 满足无源波动方程 $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$ 。但是 $\nabla \cdot \mathbf{E} = E_0 \frac{\omega}{c} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \neq 0$, 所以 $\mathbf{E}$ 不满足无源空间的 Maxwell 方程。

第二种,文献[4]指出:“由于波动方程只表征了单一场量($\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$)的时空变化关系,未描述不同场量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 之间的关系。因此,虽然满足 Maxwell 方程的场量必然满足波动方程,但相反的情况不一定成立,所以,由波动方程求出场量后,还需验证是否满足 Maxwell 方程。一般方法是由波动方程求出电场强度 $\mathbf{E}$ 或磁场强度 $\mathbf{H}$ 后,再由 Maxwell 方程求另一场量,这样的解必然同

时满足两种方程”。

电场和磁场波动方程的解不满足 Maxwell 方程的原因,第一种来源于对习题 4.4^[1,2]的解读,认为是在无源情况下发生的;第二种来源于对文献^[4]的解读认为是波动方程将有联系的电场和磁场耦成两个单独的方程造成的。本文要说明的是,习题 4.4 所举矢量函数并不是自由空间中代表平面电磁波的无源波动方程的解,如果是的话必然满足 Maxwell 散度方程。因为在波动方程导出的过程中,将散度为 0 代入才得到了无源波动方程。但将平面波解代入 Maxwell 旋度方程后,表示的是电磁场间的相互关系,不是确定量,故当波动方程的解不唯一时,不能证明该解是否满足 Maxwell 旋度方程。由无源波动方程求出含待定常数的场量(如 $\mathbf{E}$)后,再求解另一场量(如 $\mathbf{H}$)的波动方程意义不大,所以需要通过 Maxwell 方程求出另一场量。如果能够分别求解波动方程且得到的是唯一解,该解必定满足 Maxwell 方程。只不过,无源情况下分别直接求解电场和磁场的波动方程不能获得更多的信息,有源情况下的求解较为困难,往往借助 Maxwell 方程简化运算。但本文仍以电偶极子辐射问题为例,分别求解有源电场和磁场波动方程,并且证明得到的唯一解同时满足 Maxwell 方程组中的散度和旋度方程。

1 无源波动方程的导出过程

通常,电磁场问题的解析求解,是求由微分形

① 括号为本文作者所加,强调习题所述真空是无界的。

式 Maxwell 方程导出的、仅包含电场 $\mathbf{E}$ 或磁场 $\mathbf{H}$ 的二阶微分方程。在磁导率和介电常数分别为 μ_0 和 ϵ_0 的自由空间中,微分形式的无源 Maxwell 方程^[1, 2]为

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1d)$$

对式(1b)两边取旋度,再将式(1a)代入后得

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2a)$$

对式(1a)两边取旋度,再将式(1b)代入后得

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2b)$$

由矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ 将式(2)的右边展开后

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3a)$$

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3b)$$

再将式(1d)和式(1c)分别代入,得到无源区电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4b)$$

当场随时间做时谐 $e^{-j\omega t}$ 变化时,波动方程(4)为

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5b)$$

其中

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (5c)$$

其中, c 是真空中光速。

2 自由空间中无源波动方程的解

习题 4.4 要证明的满足真空(自由空间)中无源波动方程、不满足 Maxwell 方程的矢量函数为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \quad (6)$$

上式表明,该函数仅与坐标变量 x 有关。

实际上,一切电磁场都是由源产生的。上式无源波动方程的解,应该是自由空间中的均匀平面波。也就是距离波源很远的,场点周围局部的、不包含源在内的区域中的电磁波,如图 1 中实线圈定部分。

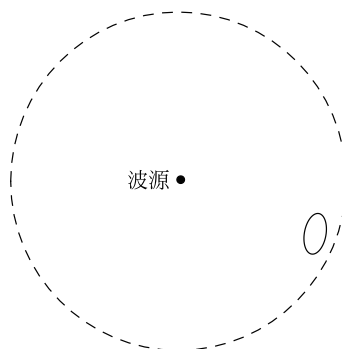


图 1 局部均匀平面波

根据均匀平面波的定义,直角坐标系中,若时变场的场量(如电场 $\mathbf{E}$)仅与一个坐标变量 x 有关,则该场量不可能具有该坐标分量,并且与 y, z 无关^[1, 2],即 $E_x = 0, \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ 。矢量方程(5a)由偏微分方程化为两个标量常微分方程

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + k^2 E_y = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + k^2 E_z = 0 \quad (7b)$$

通解是

$$E_y = E_{y0}^+ e^{-jkx} + E_{y0}^- e^{jkx} \quad (8a)$$

$$E_z = E_{z0}^+ e^{-jkx} + E_{z0}^- e^{jkx} \quad (8b)$$

其中, $E_{y0}^+, E_{y0}^-, E_{z0}^+, E_{z0}^-$ 是由源决定的复常数,是待定量。以其中沿 $\mathbf{e}_x$ 正向传播的部分为例,它们的瞬时正弦形式为

$$E_y = E_{y0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \quad (8c)$$

$$E_z = E_{z0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right) \quad (8d)$$

由此可见,沿 $\mathbf{e}_x$ 方向传播的平面电磁波没有 E_x 分量,只有与 x 有关的 E_y, E_z 分量。这说明,文献[1, 2]中习题 4.4 给出的矢量函数(6)与坐标变量 x 有关、沿 $\mathbf{e}_x$ 方向传播,本身还是 x 分量的,这与平面波的解并不相符。虽然该函数满足无源波动方程,但它并不是由 Maxwell 方程导出的、代表均匀平面波的无源波动方程的解,所以自然不会

满足无源 Maxwell 方程。习题要证明的满足波动方程、不满足 Maxwell 的矢量函数仅表示它是波动方程的其中一个解,不表示该题含有“波动方程的唯一解不一定满足 Maxwell 方程”的意义。

2.1 无源波动方程的解与 Maxwell 散度方程

在无源波动方程(5)的推导过程中,实实在在地代入了散度为 0 的 Maxwell 方程。现在,将电场波动方程的通解(8)代入方程(1d),显然

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{e}_y E_y + \mathbf{e}_z E_z) = \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

无源波动方程的解满足无源 Maxwell 散度方程。

类似地,磁场波动方程(5b)的通解为

$$H_y = H_{y0}^+ e^{-jkx} + H_{y0}^- e^{jkx} \quad (10a)$$

$$H_z = H_{z0}^+ e^{-jkx} + H_{z0}^- e^{jkx} \quad (10b)$$

其中, H_{y0}^+ 、 H_{y0}^- 、 H_{z0}^+ 、 H_{z0}^- ,也是由源决定的待定常数。其中,沿 $\mathbf{e}_x$ 正向传播部分的瞬时正弦形式为

$$H_y = H_{y0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad (10c)$$

$$H_z = H_{z0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad (10d)$$

显然,式(10)满足 Maxwell 散度方程(1c)

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{e}_y H_y + \mathbf{e}_z H_z) = \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

波动方程(5)的通解满足 Maxwell 散度方程的原因是,散度方程(1c)和方程(1d)等于 0,是确定值。由于 Maxwell 旋度方程(1a)和方程(1b)仅仅表示了电场和磁场间的关系,而通解(8)和通解(10)中都含有待定常数不是唯一解,可以预计,波动方程的通解代入后,将无法做出满足情况的判断。

2.2 无源波动方程的解与 Maxwell 旋度方程

以波动方程通解(8)和通解(10)的瞬时正弦形式为例,代入到 Maxwell 旋度方程(1a)和方程(1b)中后

$$\frac{1}{\epsilon_0 c} (-\mathbf{e}_y H_{z0}^+ + \mathbf{e}_z H_{y0}^+) = -\mathbf{e}_y E_{y0}^+ - \mathbf{e}_z E_{z0}^+ \quad (12a)$$

$$\frac{1}{\mu_0 c} (-\mathbf{e}_y E_{z0}^+ + \mathbf{e}_z E_{y0}^+) = \mathbf{e}_y H_{y0}^+ + \mathbf{e}_z H_{z0}^+ \quad (12b)$$

可见并不能确定它们是否满足 Maxwell 旋度方程。这也就是文献[4]所述“虽然满足 Maxwell 方程的场量必然满足波动方程,但相反的情况不一

定成立”,指的是波动方程的解含有待定常数时,满足波动方程的解,不一定满足 Maxwell 方程。然而,上式却给出了电场和磁场间的关系

$$E_{y0}^+ = \frac{1}{\epsilon_0 c} H_{z0}^+, \quad E_{z0}^+ = -\frac{1}{\epsilon_0 c} H_{y0}^+ \quad (13a)$$

$$H_{y0}^+ = -\frac{1}{\mu_0 c} E_{z0}^+, \quad H_{z0}^+ = \frac{1}{\mu_0 c} E_{y0}^+ \quad (13b)$$

故文献[4]同时指出“一般方法是由波动方程求出电场强度 $\mathbf{E}$ 或磁场强度 $\mathbf{H}$ 后,再由 Maxwell 方程求出另一场量”。在这种情况下,若由波动方程求出其中一个场量后,再求另一个场量波动方程的解不会获得更多的信息,只有通过 Maxwell 方程求出另一个场量才有价值。其实,式(13a)就是求出磁场后通过 Maxwell 方程求电场的结果;式(13b)是求出电场后通过 Maxwell 方程求磁场的结果。下面将方程(13b)代入磁场的通解(10)后,得

$$H_y = -\frac{1}{Z_0} E_{z0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad (14a)$$

$$H_z = \frac{1}{Z_0} E_{y0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad (14b)$$

其中, $Z_0 = \frac{1}{\mu_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 是自由空间的波阻抗。或者,将方程(13a)代入电场的通解(8),得

$$E_y = Z_0 H_{z0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad (15a)$$

$$E_z = -Z_0 H_{y0}^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \quad (15b)$$

这是用磁场的复振幅表示的电场。通常情况下,还是用电场表示磁场的式(14),因为平面波的极化,入射、反射和折射等都是用电场定义的。

由此可见,文献[1,2]习题 4.1 的三个矢量函数

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right), \mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c}z\right) \cos(\omega t),$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}z\right) \text{ 是波动方程 } \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

的解。其中, $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right)$ 是向 $\mathbf{e}_z$ 方向传播的电场 E_x 分量, $\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}z\right)$ 是向 $-\mathbf{e}_z$

方向传播的电场 E_y 分量, $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c}z\right) \cos(\omega t)$ 是向 $\pm \mathbf{e}_z$ 方向传播的电场 E_x 分量的一部分,故这三个矢量函数不仅满足该方程,并且满足 Maxwell 散度方程(1d)。同样地,因其中含有待定常

数,无法判断它们是否满足 Maxwell 旋度方程(1b)。如果求解空间中包括已知场源,则电场和磁场波动方程的唯一解将满足全部的 Maxwell 方程。下面,以自由空间中电流场产生的电场和磁场的有源波动方程为例,分别求解后代入 Maxwell 方程组中检验。

3 自由空间中有源波动方程的唯一解与 Maxwell 方程

3.1 有源波动方程的解

自由空间中电流场产生的电场和磁场的波动方程为^[1,2]

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (16a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (16b)$$

设电流源为沿 z 轴放置的电偶极子 $\mathbf{e}_z I dl$, 运用矢量位^[1,2]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

分别求解电场方程(16a)和磁场方程(16b)。电场方程的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} \\ &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \left[\mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} + \frac{1}{k^2} \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \left[\mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} + \frac{1}{k^2} \nabla \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \left\{ \mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{1}{k^2} \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathbf{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \right\} \quad (17a) \end{aligned}$$

磁场方程的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I dl}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} \right) \\ &= \frac{I dl}{4\pi} \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \quad (17b) \end{aligned}$$

为简便,将解(17a)和解(17b)代入 Maxwell 方程(1)的时谐形式检验如下。

3.2 有源波动方程的解与 Maxwell 方程

Maxwell 方程(1a)的时谐形式为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

将式(17b)代入上式的左边

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{I dl}{4\pi} \nabla \times \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \\ &= \frac{I dl}{4\pi} \left\{ \mathbf{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \mathbf{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{I dl}{4\pi} \left\{ \mathbf{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \mathbf{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{e}_z \left[k^2 \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

用 $-j\omega\mu_0$ 乘解(17a)后与上式比较,可见电场和磁场波动方程(16)的解满足 Maxwell 方程中磁场的旋度方程。

Maxwell 方程(1b)的时谐形式为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

将式(17a)代入上式的左边

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \nabla \times \left\{ \mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{1}{k^2} \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathbf{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{1}{k^2} \nabla \times \left\{ \mathbf{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \mathbf{e}_z \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - k^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \right] \right\} \\ &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

用 $-j\omega\mu_0$ 乘解(17b)后与上式比较,可见电场和磁场波动方程(16)的解满足 Maxwell 方程中电场的旋度方程。

将解(17b)代入 Maxwell 方程(1c)的时谐形式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot (\mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_y H_y) \\ &= \frac{I dl}{4\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

将解(17a)代入 Maxwell 方程(1d)的时谐形式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{e}_z \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{1}{k^2} \left[\mathbf{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathbf{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{1}{k^2} \nabla^2 \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right\} \\
 &= -\frac{j\omega\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

至此,已验证了单独求解的波动方程(16a)和方程(16b)的解,满足全部的 Maxwell 方程。这是必然的,因为无界空间的谐变场由源唯一地确定,当源已知时则解(17)是方程(16)的唯一解。

4 波动方程的唯一解与 Maxwell 方程

综合《电磁场与电磁波》课程^[1,2]的 Helmholtz 定理、矢量场的唯一性定理、时变和时谐电磁场的唯一性定理可知:场由源、初始条件、边界条件、求解区域内的介质唯一确定,而不论电磁场被何种形式的方程所表达。从 Maxwell 方程导出的波动方程,如果解是唯一的,该解必满足 Maxwell 方程。这是因为,宏观电磁场问题空间的任一点、任一时刻的电磁场是确定的,不会在该点、该时刻存在不同的电场 $\mathbf{E}$ 或磁场 $\mathbf{H}$ 。这就是文献[5]通过证明时变电磁场的唯一性定理,即认为同时证明了波动方程初边值问题和 Helmholtz 方程边值问题解的唯一性的原因。

根据唯一性定理:无界空间中的场,由分布在有限区域中的源唯一确定;有界空间中的场,由空间内的源和边界条件唯一确定,若该空间内无源则由边界条件唯一确定。如果是时变场,还需增加初始条件。所以,如果我们没用矢量位,而是对有源波动方程(16),提出了满足唯一性定理一切条件的尝试解,那么将尝试解直接代入该方程即可得到验证,无须再代入到 Maxwell 方程中去;对于无源波动方程,不仅要把尝试解代入该方程,还需代入边界条件验证。表示自由空间中平面波的方程(5)实际上是有边界的,这个边界就是振幅和相位开始为常数的平面,如图 2 中与 yOz 平行的平面。当然,这样的边界条件是不完全的。所以,无源方程的解含有与源有关的待定常数,需要借助 Maxwell 方程获得更多一些的信息;所以,用电场与磁场之比消去与源有关的待定常数,定义了自由空间的波阻抗。

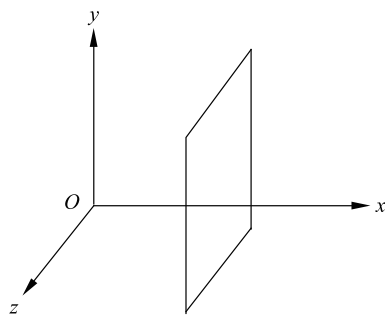


图 2 均匀平面波的等幅等相面

5 结语

文献[1-3]习题 4.4(含习题 4.1)仅须验证所给矢量函数满足无源波动方程、但不满足无源 Maxwell 方程,并不含有该函数是波动方程唯一解的意义。如果要验证矢量函数是否是无源波动方程和 Maxwell 方程的解,不仅需要把待验证的函数代入波动和 Maxwell 方程,还需代入边界(或其他约束)条件。否则,我们可以任意构造同时满足 Maxwell 方程(1)和波动方程(4)、但确实不是它们唯一解的函数,如常矢量函数。同样地,文献[4]所述满足波动方程但不一定满足 Maxwell 的问题,指的是解不唯一的情形;还有就是为使含源问题的求解较为简便,要借助 Maxwell 方程求解的情况。如果能从波动方程获得电场和磁场的唯一解,该解必满足 Maxwell 方程。本文以自由空间电偶极子辐射问题为例,求出的波动方程唯一解满足 Maxwell 方程不是个例。宏观电磁场时空分布的确定性,决定了无论以何种方式获得的唯一解,必同时满足 Maxwell 方程和从中导出的波动方程。

参 考 文 献

- [1] 谢处方, 饶克谨. 电磁场与电磁波[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [2] 谢处方, 饶克谨, 杨显清, 等. 电磁场与电磁波[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [3] 王谋, 孟浩. 电磁场与电磁波(第四版)同步辅导及习题全解[M]. 北京: 中国水利电力出版社, 2009.
- [4] 傅君眉, 冯恩信. 高等电磁理论[M]. 西安: 西安交通大学出版, 2000.
- [5] 张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2001.