



尝试用量子力学概念表述 Compton 散射的能量和动量守恒

范乐乐 王 锋 曾天海

(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

摘 要 Bohr 等人曾经认为, 微观过程中能量和动量守恒是统计的守恒。Bothe 等人用 Compton 散射实验验证了 X 射线的光子和电子的单次碰撞前后的总能量和总动量守恒严格有效, 这样的结果也否定了统计的守恒。一些量子力学书的引言中, Compton 散射实验的系统总能量和总动量严格守恒的表述还没用到量子力学概念。与此不同, 本文目的是尝试用量子力学概念来表述。量子力学书中没有表述物理量的严格守恒和统计守恒。期刊文章中涉及的 strict conservation (严格守恒) 或 conservation 与我们的观点不同。我们的观点是, 孤立复合系统内部交换能量和动量, 在系统状态的演化过程中总能量和总动量严格守恒, 而子系统的动量和动能 (相互作用势能不完全属于哪个子系统) 统计守恒。本文通信作者与合作者的文章 (Int. J. Theor. Phys., 2020, 59: 229) 中用了物理量 strict conservation 和 statistical conservation (统计守恒) 的提法 (本文又作了更确切的表述, 与守恒量表述有所不同), 加上纠缠态和本征值等概念提供了孤立复合系统的总动量严格守恒和子系统的动量统计守恒的表述方式。本文又尝试用这些概念及混合态来表述 Compton 散射实验的总能量及总动量的严格守恒, 同时, 也说明了子系统的能量 (散射后无相互作用) 和动量统计守恒。因此, 可以用量子力学概念来表述孤立复合系统的一些物理量严格守恒、子系统的一些物理量统计守恒。

关键词 Compton 散射; 严格守恒; 统计守恒; 纠缠态; 混合态

ATTEMPT AT FORMULATING THE CONSERVATIONS OF ENERGY AND MOMENTUM IN COMPTON SCATTERING WITH QUANTUM MECHANICAL CONCEPTS

FAN Lele WANG Feng ZENG Tianhai

(School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract Bohr et al. once believed that both the conservation of energy and the conservation of momentum in a microscopic process are statistically conserved. And then Bothe et al. verified that the laws of the conservations of total energy and total momentum of an electron and an X-ray photon before and after a single collision are strictly valid by using the Compton scattering experiment, and such results also denied statistical conservation. There are expressions about strict conservations of total energy and total momentum of the system in Compton scat-

收稿日期: 2023-09-13

基金项目: 国家自然科学基金(11875086)资助; 北京市自然科学基金(1242026)资助。

通信作者: 曾天海, 北京理工大学物理学院副教授, zengtianhai@bit.edu.cn。

引文格式: 范乐乐, 王锋, 曾天海. 尝试用量子力学概念表述 Compton 散射的能量和动量守恒[J]. 物理与工程, 2024, 34(4): 5-10.

Cite this article: FAN L L, WANG F, ZENG T H. Attempt at formulating the conservations of energy and momentum in Compton scattering with quantum mechanical concepts[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(4): 5-10. (in Chinese)

tering experiment without quantum mechanical concepts in the introductions of some quantum mechanics books. Different from this, the aim of this paper is attempt to express those with quantum mechanical concepts. There is no expression about the strict conservation and the statistical conservation of physical quantities in quantum mechanics books. Our viewpoints are that the total energy and the total momentum of an isolated system are strict conservation by exchanging energy and momentum within the system in the evolution of the system state, and the momentum and kinetic energy (an interaction energy is not all belong to anyone subsystem) of a subsystem are statistical conservation. The “strict conservation” in journal articles is different from ours. A recent paper by the corresponding author of this paper and his coauthors (Int. J Theor. Phys., 2020, 59: 229) used the terms of strict conservation and statistical conservation (we offer more precise statements in this paper, and these statements have some differences with that of a conserved physical quantity), and offered the expression ways of the strict conservation of total momentum for an isolated composite system and the statistical conservation of momentum for a subsystem in terms of the concepts of entangled states and eigenvalues. In this paper, we try to use these concepts and mixed states to express the strict conservations of total energy and total momentum of the system before and after a Compton scattering, and also explain the statistical conservations of energy (no interaction after scattering) and momentum of a subsystem. Similarly, we can express the strict conservations of some physical quantities of an isolated composite system and the statistical conservations of some physical quantities of a subsystem with quantum mechanical concepts.

Key words Compton scattering; strict conservation; statistical conservation; entangled state; mixed state

1924 年, Bohr 等人提出观点, 微观过程中能量和动量守恒是统计的守恒^[1,2]。本文称之为统计守恒。对此, Bothe 和 Geiger 做了 Compton 散射实验, 对 X 射线的光子(这里称 X 光子)与电子进行符合测量的总能量和总动量都是守恒的, 即在散射或碰撞前后都相同(考虑碰撞前后的能量, 不考虑散射中间过程的相互作用势能), 并于 1925 年量子力学创立的几个月前发表了文章^[3,4]。一直到 Bothe 获得诺贝尔物理奖的 1954 年, 他与合作者们断断续续做了大量的 Compton 散射实验, 积累了大量验证能量和动量守恒的数据, 他在颁奖演讲中称, 能量和动量守恒定律“严格有效”^[5]。本文称之为严格守恒。

如果 Compton 散射系统中的 X 光子与电子的总能量和总动量是统计守恒, 则在碰撞后的测量值有可能与碰撞前的初值不同, 但大量测量值的平均值和概率分布确定。这被 Bothe 等人的大量实验所否定。后来, Bohr 放弃了统计守恒的观点^[6]。但是, 单看子系统 X 光子或电子的能量和动量可以统计守恒, 即多次测量碰撞后的测量值

的平均值和概率分布确定。

查阅几十种量子力学书, 有守恒量的提法或表述, 没有严格守恒和统计守恒的表述, 也就没有用量子力学概念来表述 Compton 散射前后系统的总能量和总动量的严格守恒。本文后面的分析表明, 书中的守恒量表述与严格守恒及统计守恒的有所不同。最近本文通信作者与合作者发表的一篇文章^[7], 用了 strict conservation(严格守恒)和 statistical conservation(统计守恒)的提法, 加上纠缠态、直积态和本征值等量子力学概念提供了孤立复合系统的动量严格守恒和子系统的动量统计守恒的表述方式。

另外, 用关键词: “纠缠态、本征值、动量或能量守恒、严格”的两种组合搜索期刊, 找到两篇文章^[8,9]。文章[8]的作者认为“strict conservation of momentum, orbital angular momentum, and energy can be shown to be consistent with the assumption that the entangling interactions that constitute measurements induce a real collapse of the wave function.” 文章[9]的作者认为“energy

is conserved if one considers the universe's global wave function in Everettian QM, but an observer would still not see it as conserved”。他们的叙述与本文关于守恒的表述方式不同。

本文第一节介绍系统与守恒量等概念。第二节对严格守恒和统计守恒做了确切的表述。第三节介绍孤立复合系统的动量严格守恒和子系统动量的统计守恒的表述。第四节尝试用纠缠态、混合态和本征值等概念表述 Compton 散射前后系统的总能量和总动量的严格守恒,同时,也说明子系统的能量和动量是统计守恒的。最后是结论。

1 系统与守恒量

对一个复合系统,所有与它相互作用的物体和场,本文总称为这个复合系统的环境。相对于这个复合系统内部的总能量,即各子系统的动能与内部相互作用势能的总和,若系统与环境之间的相互作用势能(或交换的能量)很小而忽略,则这个复合系统可以看成孤立系统。例如,一个氢原子系统与其环境的相互作用势能,比氢原子内部总能量(即电子与原子核的总动能和内部库仑相互作用势能的和)小很多,则可以把这个氢原子看成是孤立的复合系统。

在孤立复合系统中,若子系统之间的相互作用势能不含时间,哈密顿量算符 H 也就不含时间。若这种孤立复合系统的一个物理量算符与 H 对易,则这个物理量为守恒量。 H 自身对易,因而总能量是守恒量^[10]。不仅如此,Dirac^[10] 还认为孤立系统的总动量守恒。例如,两粒子孤立复合系统,一般的相互作用势能与粒子之间的距离相关^[11],即

$$H = p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (1)$$

下标 1、2 分别表示粒子 1、2 的量,总动量 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$,可以证明

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}, H] &= [\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 + \\ &\quad V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

因此总动量为守恒量。守恒量在任意状态下的平均值和测量值或取值的概率分布都不随时间变化^[11-13]。

量子力学考虑的系统一般处于做了近似的外场中。把系统与其环境的相互作用势能做近似,

把相互作用势能归为前者,则可以写出前者的 H 。系统的外场势能有含时的和不含时的。后面讨论的孤立的或外场中的复合系统,其 H 都不含时间。有了 H ,就可以看系统的物理量是否与 H 对易,来判断其是否守恒量。

若复合系统中的子系统之间存在相互作用,则相互作用势能不是单独属于哪个子系统,因此,不能定义子系统的能量、不能写出其 H 算符。按照量子力学,对于子系统物理量,也用其算符与复合系统的 H 是否对易,来判断其是否守恒量。若对易,则可以判断它为守恒量,可以得到在复合系统的任意状态下它的平均值和取值的概率分布都不随时间变化;反之,若不对易,则它不是守恒量。例如,两粒子孤立复合系统,对粒子 1 的动量, $[\mathbf{p}_1, V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \neq 0$, (例如, $[\mathbf{p}_1, V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)] \neq 0$), $[\mathbf{p}_1, H] \neq 0$, $\mathbf{p}_1$ 就不是守恒量。但 $\mathbf{p}_1$ 在这个孤立复合系统的任意状态下的平均值和取值的概率分布都不随时间变化。这是下面要表述的关于物理量的统计守恒(即子系统的动量统计守恒),这样统计守恒的物理量既包含守恒量也包含非守恒量。因为子系统之间存在相互作用而不能定义子系统的能量和 H ,则只能定义和谈论它的动能。子系统的动能不是守恒量,但也可以统计守恒。

2 严格守恒和统计守恒

在量子力学书中,没有物理量的严格守恒和统计守恒的表述。本文对这两种守恒的表述方式,与守恒量表述有所不同。对大量相同的 H 不含时间的互相独立的复合系统(系综),分别不同时(同一初态演化到不同时间)测量同一个物理量(子系统的或由子系统的合成的复合系统的物理量),如果得到的结果都相同,本文称这个物理量严格守恒。特别对于复合系统,子系统的测量值会有所不同,但所有子系统的测量值的合成(代数和,或矢量和,或乘积,例如宇称)为复合系统的本征值。如果得到不同的结果,但是每一个结果以一定概率出现,概率分布和算出的统计平均值不随时间变化,本文称这个物理量统计守恒。满足严格守恒的物理量、统计守恒的物理量与守恒量的关系,可以用 Venn 图 1 表示。

满足统计守恒的物理量中有守恒量,还有非守恒量,如前面提到的子系统的动量是非守恒量,

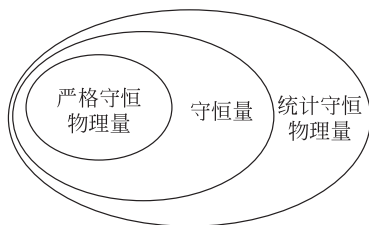


图1 严格守恒、统计守恒的物理量与守恒量的关系

但它满足统计守恒。守恒量中的一部分可以满足严格守恒，而严格守恒的物理量都是守恒量；守恒量和满足严格守恒的物理量，也满足统计守恒。后面的内容可以进一步说明这些关系。下一期，我们的文章《量子力学中的角动量守恒》也会用到这里表述的严格守恒和统计守恒的概念。

3 孤立复合系统的动量严格守恒和子系统动量的统计守恒

若孤立复合系统的 H 不含时间，它的动量算符与 H 对易，是守恒量。系统可以处于动量本征态 $|\mathbf{p}\rangle$ 。因子系统之间的纠缠， $|\mathbf{p}\rangle$ 可表示为纠缠态（因动量为连续变量，需要用积分形式来表示）。由于各个子系统之间无休止不恒定的相互作用而交换动量，使各自的动量可以取不同的值，而纠缠态中的每一项的各个子系统动量的矢量和为常矢量，即系统的本征动量（总动量）。为简单说明，用孤立的两粒子系统的分立谱有限项纠缠态^[7]

$$|\mathbf{p}\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\mathbf{p}_i\rangle |\mathbf{P}_i\rangle \quad (3)$$

来体现动量严格守恒， $|\mathbf{p}_i\rangle$ 和 $|\mathbf{P}_i\rangle$ 分别表示两个粒子的动量本征态， $\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{P}_i$ 表示两个粒子的动量，其中下标 i （包括下文中的下标）可表示粒子的不同状态，与第一节中的表示粒子编号的下标含义不同。上式中的概率之和 $\sum_{i=1}^N |c_i|^2 = 1$ ，每个概率 $|c_i|^2$ 都不随时间变化。上式右边的每一项中，两粒子动量的矢量和都等于系统的本征动量 $\mathbf{p}$ ，即

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{P}_1 = \cdots = \mathbf{p}_N + \mathbf{P}_N \quad (4)$$

若测得粒子1的动量为 $\mathbf{p}_1$ ，则粒子2的动量为 $\mathbf{P}_1$ ，满足矢量和 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{P}_1 = \mathbf{p}$ ，即每次测量系统的总动量都相同，按本文表述方式，系统总动量严格守恒。若用严格的积分形式，则出现 $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i - \mathbf{P}_i)$ ^[7]，满足 $\mathbf{p}_i + \mathbf{P}_i = \mathbf{p}$ 的项不为零，自然可以用

来表述系统的总动量的严格守恒。

对两粒子复合系统中的一个粒子态部分求迹，可以得到另一个粒子的混合态表示。观测其中的一个粒子的动量，多次测量结果会出现不同。用式(3)或这个粒子的混合态讨论，测量结果不同的动量出现的概率一定，算出的统计平均值也不随时间变化，那么，按本文表述方式，这个粒子的动量统计守恒，而它不是守恒量。若把第二个粒子换成大物体，其状态近似不变，即 $|\mathbf{P}_1\rangle \approx \cdots \approx |\mathbf{P}_N\rangle$ ，由式(3)提取“公因子”，纠缠态就近似为直积（乘积）态，即

$$c_1 |\mathbf{p}_1\rangle |\mathbf{P}_1\rangle + \cdots + c_N |\mathbf{p}_N\rangle |\mathbf{P}_N\rangle \approx (c_1 |\mathbf{p}_1\rangle + \cdots + c_N |\mathbf{p}_N\rangle) |\mathbf{P}_1\rangle \quad (5)$$

另一个粒子就近似处于相干叠加纯态 $c_1 |\mathbf{p}_1\rangle + \cdots + c_N |\mathbf{p}_N\rangle$ （一般是积分形式）。这也说明粒子处于动量叠加纯态与跟它相互作用的外物或外场有关^[14, 15]。这个粒子的动量显然是统计守恒的。

若考虑一个复合系统与环境相互作用，它们会处于纠缠态，前者处于混合态。若环境状态近似不变，纠缠态近似为直积态，这个复合系统就近似处于不同动量 $\mathbf{p}$ 的叠加纯态，即 $\mathbf{p}$ 的积分形式。这个复合系统的动量只能统计守恒。

4 尝试用量子力学概念来表述 Compton 散射的能量和动量守恒

由于 Compton 散射的能量和动量守恒还没有人用量子力学概念来表述，这里采用非相对论的量子力学概念来表述。然而，这种表述并不完全合适，因为描述 Compton 散射的能量和动量守恒时，出现了相对论中的动量能量关系式。考虑到量子力学的一些书籍^[13, 16]的入门部分为非相对论的，其引言中介绍了含相对论公式的 Compton 散射似乎也不合适。因此，在找到合适的表述方式之前，我们先尝试用非相对论的量子力学概念来表述 Compton 散射的能量和动量的严格守恒；最后，再说明子系统的能量和动量的统计守恒。

在碰撞过程中，虽然组成复合系统的 X 光子和电子的相互作用势能不为零，但碰撞前后可以认为相互作用势能近似为零；另外，相对于系统的总能量（X 光子能量与电子能量之和），电子在原子中的束缚能相对很小，即与环境之间相互作用

较弱,系统与环境的能量和动量的交换量都很小,那么,忽略环境后的这个复合系统可看作孤立系统。这样,对初态相同(这里是相同的系统动量 $\mathbf{p}$ 和能量 E)的大量的这种孤立复合系统或同一个系综,测量碰撞后所有子系统的动量矢量和、能量之和都相同;对处于不同初态的不同系综,测量结果自然不同。对同一个系综,单看 X 光子或电子的测量结果也不可能每次的都相同。

碰撞前 X 光子以平面波入射,其能量和动量为 $h\nu$ 和 $\mathbf{p}$;系统的总能量为 $E = h\nu + mc^2$, m 为电子的静止质量,总动量为 X 光子的动量 $\mathbf{p}$ 。碰撞后,系统处于纠缠态,但也可能因内禀退相干(intrinsic decoherence)^[17]或某些扰动导致的退相干,系统所处的纠缠态变为混合态(本文所指的纠缠态都是纯态)。无论是纠缠态,还是混合态,都可以用于表述实验得到的严格守恒。为简单说明,能量严格守恒用分立谱有限项纠缠态形式

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^M a_i |h\nu_i\rangle |E_i\rangle \quad (6)$$

来体现, $|h\nu_i\rangle$ 和 $|E_i\rangle$ 分别为碰撞后 X 光子和电子的能量本征态,能量本征值分别为 $h\nu_i$ 和 E_i ,其中 ν_i 可表示 X 光子的不同频率;或者,以概率 $|a_i|^2$ 退相干为 $|h\nu_i\rangle |E_i\rangle$ 态,用混合态形式

$$\sum_{i=1}^M |a_i|^2 |h\nu_i\rangle |E_i\rangle \langle h\nu_i| \langle E_i| \quad (7)$$

来体现。以上用纠缠态或混合态表示的状态,与粒子通过双缝后所表示的粒子状态类似,都是根据物理意义直接写出来的,不是通过动力学方程演化计算得到的。这样,无论一次符合测量得到哪一组能量 $h\nu_i$ 和 E_i ,都有

$$h\nu_i + E_i = E \quad (8)$$

即系统能量严格守恒。

如图 2 所示^[13],在竖直面内,将 X 光子探测器和电子探测器分别放在水平虚线的上下,可以

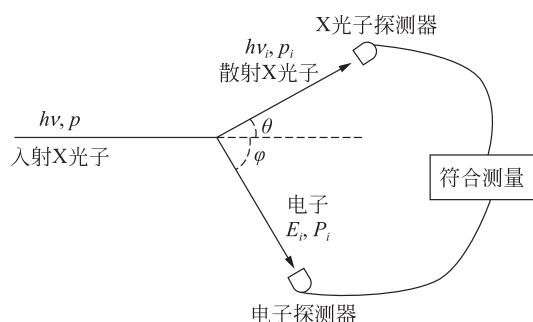


图2 康普顿散射示意图

测出唯一一对动量 $\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{P}_i$ 与能量 $h\nu_i$ 和 E_i 对应。若使这个竖直面上的两个探测器绕虚线旋转任意角度,则都可以测到一对动量 $\mathbf{p}_j$ 和 $\mathbf{P}_j$ 与能量 $h\nu_j$ 和 E_j 对应。因此,一组 $h\nu_i$ 和 E_i ,对应许多组动量 $\mathbf{p}_j$ 和 $\mathbf{P}_j$,或者说存在多重简并。为避免简并,我们只考虑把 X 光子探测器和电子探测器分别放在竖直面的虚线的上下。这样考虑的系综是符合测量到的 X 光子和电子分别出现在竖直面的虚线上下的大量系统。一次碰撞前后,系统的总能量和总动量满足严格守恒^[13]

$$h\nu + mc^2 = h\nu_i + E_i \quad (9)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_i + \mathbf{P}_i \quad (10)$$

将 X 光子动量与能量的关系式

$$p_i = h\nu_i / c \quad (11)$$

和电子动量与能量的关系式

$$E_i^2 = P_i^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (12)$$

代入式(9),得到动量大小值所满足的关系式为

$$p - p_i = \sqrt{P_i^2 + m^2 c^2} - mc \quad (13)$$

于是,为简单说明,碰撞后系统的动量的严格守恒用分立谱有限项纠缠态表达式

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^M a_i |\mathbf{p}_i\rangle |\mathbf{P}_i\rangle \quad (14)$$

来体现,或用混合态表达式

$$\sum_{i=1}^M |a_i|^2 |\mathbf{p}_i\rangle |\mathbf{P}_i\rangle \langle \mathbf{p}_i| \langle \mathbf{P}_i| \quad (15)$$

来体现, $\mathbf{p}_i$ 和 $\mathbf{P}_i$ 需同时满足式(10)和式(13)。这样,用式(6)和式(14),或式(7)和式(15),可以形式上表示 Compton 散射的 X 光子与电子碰撞前后,能量和动量严格守恒。

这种情况下,对同一个系综,单看电子,其能量和动量都只能统计守恒,统计平均值分别为

$$\sum_{i=1}^M |a_i|^2 E_i \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^M |a_i|^2 \mathbf{P}_i \quad (17)$$

单看 X 光子也类似。

5 结语

本文给出了关于物理量严格守恒和统计守恒的表述,与量子力学书中的守恒量表述不同。我们把 Compton 散射中的 X 光子和电子组成的系统看成孤立系统,按本文的严格守恒的表述,用糾

缠态或混合态表达式可以表述 Bothe 所说的 Compton 散射的系统能量和动量守恒定律“严格有效”,即严格守恒。本文表述的统计守恒的物理量包含了量子力学中的守恒量,也包含作为非守恒量的子系统的物理量。尽管 Bohr 放弃了统计守恒的观点,但这一观点也存在合理性。所以,我们可以用量子力学概念表述孤立复合系统的一些物理量严格守恒、子系统的一些物理量统计守恒。

致谢: 作者感谢邵彬教授的有益讨论和评论!

参 考 文 献

- [1] BOHR N, KRAMERS H A, SLATER J C. Über die Quantentheorie der Strahlung [J]. Zeitschrift für Physik, 1924, 24(1): 69-87.
- [2] BOHR N. Conservation laws in quantum theory[J]. Nature, 1936, 138(3479): 25-26.
- [3] BOTHE W, GEIGER H. Über das Wesen des Comptoneffekts; ein experimenteller Beitrag zur Theorie der Strahlung [J]. Zeitschrift für Physik, 1925, 32(1): 639-663.
- [4] BOTHE W, GEIGER H, FRANZ H, et al. Zuschriften und vorläufige Mitteilungen [J]. Naturwissenschaften, 1925, 13(20): 440-443.
- [5] 郭奕玲,沈慧君. 诺贝尔物理学奖 1901—2010[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
GUO Y L, SHEN H J. The Nobel prize in physics 1901—2010[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. (in Chinese)
- [6] PAIS A. Niels Bohr's times; In physics, philosophy, and polity[M]. Oxford: Oxford University Press, 1991.
- [7] ZENG T H, SUN Z Z, SHAO B. Statistical and strict momentum conservation[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2020, 59(1): 229-235.
- [8] GILLIS E J. Interaction-induced wave function collapse respects conservation Laws[J]. arXiv: 1803.02687, 2018.
- [9] LODMAN J J. Energy non-conservation in quantum mechanics[D]. California Institute of Technology, 2020.
- [10] DIRAC P A M. The principle of quantum mechanics[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [11] 刘玉鑫, 曹庆宏. 量子力学[M]. 1 版. 北京: 科学出版社, 2023.
- [12] 喀兴林. 高等量子力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [13] 曾谨言. 量子力学[M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2013: 161;10-11.
- [14] 曾天海. 一类近似等式与单个粒子相干叠加态的概念性讨论[J]. 大学物理, 2016, 35(11): 20-23.
ZENG T H. Conceptual discussion of a class of approximate equality and coherent superposition states of a single particle[J]. College Physics, 2016, 35(11): 20-23. (in Chinese)
- [15] ZENG T H, LI K, WANG F, et al. A unified explanation of some quantum phenomena[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2023, 62(3): 1-22.
- [16] 张永德. 量子力学[M]. 4 版. 北京: 科学出版社, 2017.
- [17] MILBURN G J. Intrinsic decoherence in quantum mechanics[J]. Physical Review A, 1991, 44(9): 5401.