

小球在粗糙圆轨道上的运动

王良翼¹ 程永坤² 徐若宸¹ 覃兴城³

(¹ 四川省成都市树德中学, 四川 成都 610031; ² 四川省成都市石室中学, 四川 成都 610015;

³ 成都外国语学校, 四川 成都 611731)

摘要 小球在粗糙圆轨道上既可以做纯滚动, 也可以做又滚又滑的运动, 利用质心运动定理和质点系角动量定理得出: 小球在圆轨道上的运动情况与动摩擦因数密切相关。小球在粗糙圆轨道上的运动与小滑块在粗糙圆轨道上的运动存在明显区别, 小球的转动不能忽略, 不能处理成质点模型。中学阶段命制物体在圆轨道上运动的题目时, 为回避转动的影响, 建议将物体选为小滑块。

关键词 小球; 圆轨道; 刚体

THE MOTION OF A SMALL BALL ON A CIRCULAR ORBIT

WANG Liangyi¹ CHEGN Yongkun² XU Ruochen¹ QIN Xingcheng³

(¹ Sichuan Chengdu Shude High School, Chengdu, Sichuan 610031; ² Sichuan Chengdu Shishi High School, Chengdu, Sichuan 610015;

³ Chengdu Foreign Languages School, Chengdu, Sichuan 611731)

Abstract A small ball can perform pure rolling, as well as rolling and sliding motion on a rough circular orbit. Using the theorem of center of mass motion and the theorem of angular momentum of the particle system, it is concluded that the motion of a small ball on a circular orbit is closely related to the dynamic friction coefficient. The motion of a small ball on a rough circular track is significantly different from that of a small slider on a rough circular track. The rotation of the small ball cannot be ignored and cannot be processed as a particle model. To avoid the influence of rotation, it is recommended to select the object as a small slider when setting the problem of controlling the movement of an object on a circular orbit in middle school.

Key words small balls; circular orbit; rigid body

小球(均质)模型是中学及大学物理中重要的模型, 小球在各种接触面上的运动随处可见, 如果接触面光滑, 小球在接触面上的运动与小滑块的运动等效。如果接触面粗糙, 小球受到接触面的摩擦力可能是滑动摩擦力, 也可能是静摩擦力, 小球的形状及大小不能忽略, 小球不能视为质点模型, 应该把小球处理成刚体模型, 即小球在接触面上的运动与小滑块的运动不能等效。如果小球的运动为平面平行运动, 质心运动定理可以解决小球随质心的平动, 质点系的角动量定理可以解决

小球绕质心的转动。文献[1]中讨论小球在斜面最斜方向上的滚滑运动, 在不同的摩擦因数情况下, 小球可以做纯滚动, 也可以做又滚又滑的运动。文献[1]还指出, 由于小球滚动不可忽略, 即便小球半径趋于零, 小球的运动情况与小滑块也不等同。文献[2]中讨论小球在粗糙斜面上的一般运动, 即小球在斜面上时其质心的一般二维运动(球体本身做三维转动), 摩擦因数对小球的运动(无滑还是有滑滚动)有决定作用, 无滑滚动时的一般轨迹是抛物线, 而有滑滚动时的一般情况

收稿日期: 2023-12-11; 网络首发日期: 2024-03-22

作者简介: 王良翼, 四川省成都市树德中学高级教师, 120463484@qq.com。

引文格式: 王良翼, 程永坤, 徐若宸, 等. 小球在粗糙圆轨道上的运动[J]. 物理与工程, 2024, 34(3): 140-144.

Cite this article: WANG L Y, CHEGN Y K, XU R C, et al. The motion of a small ball on a circular orbit[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(3): 140-144. (in Chinese)

则更加复杂。相比小球在斜面上的运动,小球在圆轨道上的运动更为复杂,本文通过 2018 年浙江卷(4 月选考)第 20 题,研究小球在圆轨道上的运动,由于小球的转动,对不同的摩擦因数,小球的运动情况不相同。以此说明小球在圆轨道上的运动与小滑块在圆轨道上的运动存在明显区别,为教学和命题工作提供参考。

1 问题的提出

例题[2018 年浙江卷(4 月选考)第 20 题节选]如图 1 所示,一轨道由半径为 2m 的 1/4 竖直圆弧轨道 AB 和长度可以调节的水平直轨道 BC 在 B 点平滑连接而成。现有一质量为 0.2kg 的小球从 A 点无初速度释放,经过圆弧上的 B 点时,传感器测得轨道所受压力大小为 3.6N,小球经过 BC 段所受阻力为其重力的 0.2 倍,然后从 C 点水平飞离轨道,落到水平面上的 P 点,P、C 两点间的高度差为 3.2m。小球运动过程中可以视为质点,且不计空气阻力。

- (1) 求小球运动至 B 点的速度大小;
- (2) 求小球在圆弧轨道上克服摩擦力所做的功。

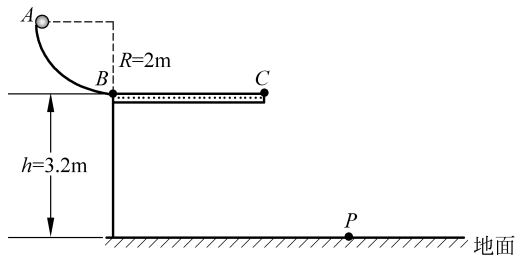


图 1 小球的运动图示

分析与解答:B 点往左是圆弧轨道 AB,曲率半径为 R,B 点往右是直线轨道,曲率半径无穷大,所以 B 点是第一类间断点。圆弧轨道末端 B 点的速度大小和水平轨道 B 点的速度大小相等,在圆弧轨道末端 B 点(在圆轨道上),利用牛顿运动定律或者质心运动定理可以求解 B 点的速度大小。

(1) 将小球视为质点,不考虑小球的转动,对小球在圆轨道上末端 B 点利用牛顿第二定律

$$N - mg = m \frac{v^2}{R}$$

$$v = 4 \text{ m/s} \quad (1)$$

如果将小球视为刚体,考虑小球的转动,设小球的半径为 r,对小球在圆轨道上末端 B 点利用质心运动定理

$$N - mg = m \frac{v^2}{R - r} \quad (2)$$

即在半径方向的动力学方程与不考虑转动相似,但是不知道小球的半径,无法计算速度的大小。

(2) 将小球视为质点,不考虑小球的转动,小球从 A 点运动到 B 点的过程中,由动能定理

$$mgR - w_f = \frac{1}{2}mv^2$$

$$w_f = 2.4 \text{ J} \quad (3)$$

如果将小球视为刚体,考虑小球的转动,小球视为均质实心球,绕质心转动角速度为 ω ,小球对质心轴的转动惯量为

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad (4)$$

小球从 A 点运动到 B 点的过程中,由动能定理

$$mg(R - r) - w_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2 \quad (5)$$

考虑转动时,无法求出小球在最低点质心的速度,所以不能得到克服摩擦力做功的大小。小球在圆轨道上运动时,由于小球与圆轨道之间存在摩擦力,小球在圆轨道上作平面平行运动,所以例题中不能把小球视为质点,应将小球的运动处理成刚体小球的平面平行运动。文献[3]中对式(5)也做了推导,但是作者将不考虑转动时小球的速度代入考虑转动时的动能定理求克服摩擦力做功,这样是不严谨的。式(5)第二个等号成立的条件是小球在圆轨道上的 B 点做纯滚动,即 $v = r\omega$ 。但是不知道小球在圆轨道末端 B 点的运动是纯滚动还是又滚又滑的运动,所以很有必要对小球在圆轨道上的运动做更进一步的深入研究。本文假设最大静摩擦力与滑动摩擦力相等。

2 问题分析

2.1 小球在 1/4 竖直圆轨道全程纯滚动动摩擦因数满足的条件

小球在 A 点静止释放,小球质心到圆轨道圆心连线转过 θ 角度时,质心的速度大小为 v ,小球绕质心的角速度大小为 ω ,小球受力分析示意图

如图2所示。假设小球从A点释放便开始做纯滚动,由质心运动定理得

$$N - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R - r} \quad (6)$$

$$mg \cos \theta - f = m \frac{dv}{dt} \quad (7)$$

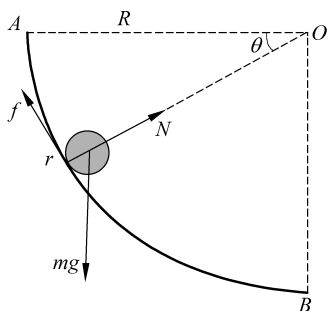


图2 小球在圆轨道的运动示意图

由于小球在圆轨道上做纯滚动,小球与斜面之间的摩擦力是静摩擦力,摩擦力的作用点的位移为零,摩擦力不做功,由机械能守恒得

$$mg(R - r) \sin \theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2 \quad (8)$$

将式(8)代入式(6)得

$$N = \frac{17}{7}mg \sin \theta \quad (9)$$

将式(8)两边同时对时间求导数得

$$mg(R - r) \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{10}m2v \frac{dv}{dt} \quad (10)$$

小球质心绕圆轨道圆心转动角速度与质心速度满足关系

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R - r} \quad (11)$$

联解式(10)、式(11)得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7}g \cos \theta \quad (12)$$

将式(12)代入式(7)得

$$f = \frac{2mg \cos \theta}{7} \quad (13)$$

小球在圆轨道上纯滚动的条件

$$f \leq \mu N \quad (14)$$

将式(9)和式(13)代入式(14)得

$$\mu \geq \frac{2}{17} \cot \theta \quad (15)$$

从式(15)可知,当 $\theta \rightarrow 0$ 时, $\cot \theta \rightarrow \infty$,若小球在 1/4

圆轨道上运动时,式(15)都成立,需要 $\mu \rightarrow \infty$,即小球与圆轨道之间需要无穷大的动摩擦因数才能使得小球在A点静止释放以后均做纯滚动。

2.2 对于有限的动摩擦因数,小球应先做又滚又滑的运动,小球再次达到纯滚动在何处

因为小球与圆轨道的动摩擦因数不是无穷大,所以小球在A点释放,便做又滚又滑的运动,在再次达到纯滚动前,小球和圆轨道之间的摩擦为滑动摩擦力。

由质心运动定理

$$N - mg \sin \theta = m(R - r)\ddot{\theta}^2 \quad (16)$$

$$mg \cos \theta - f = m(R - r)\ddot{\theta} \quad (17)$$

由滑动摩擦力与正压力的关系

$$f = \mu N \quad (18)$$

式(16)和式(17)代入式(18)整理得

$$(R - r)\ddot{\theta} + \mu(R - r)\dot{\theta}^2 + g(\mu \sin \theta - \cos \theta) = 0 \quad (19)$$

为了求解式(19),引入下面的等式

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} \quad (20)$$

将式(20)代入式(19)整理得

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + 2\mu\dot{\theta}^2 + \frac{2g}{R - r}(\mu \sin \theta - \cos \theta) = 0 \quad (21)$$

式(21)可以看成是 $\dot{\theta}^2$ 是 θ 的函数,即 $\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}^2(\theta)$,所以式(21)是一阶线性非齐次微分方程,式(21)的解由齐次微分方程的通解与非齐次微分方程的特解构成。

式(21)对应的齐次微分方程为

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + 2\mu\dot{\theta}^2 = 0 \quad (22)$$

利用分离变量,齐次微分方程的解为

$$\dot{\theta}^2 = A e^{-2\mu\theta} \quad (23)$$

式(23)中的A为积分常数,后面可由初始条件确定。

式(21)中仅含有三角函数,故设式(21)的特解为

$$(\dot{\theta}^2)^* = B \cos \theta + C \sin \theta \quad (24)$$

由式(23)和式(24)可知,式(21)的一般解为

$$\dot{\theta}^2 = A e^{-2\mu\theta} + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (25)$$

由初始条件: $\dot{\theta}^2|_{\theta=0} = 0$,代入式(25)得

$$B = -A \quad (26)$$

式(26)代入式(25)得

$$\dot{\theta}^2 = A e^{-2\mu\theta} - A \cos \theta + C \sin \theta \quad (27)$$

将式(27)代入微分方程式(21)以确定系数A、C的值

$$\begin{aligned}
 & -2\mu A e^{-2\mu\theta} + A \sin\theta + C \cos\theta + \\
 & 2\mu(A e^{-2\mu\theta} - A \cos\theta + C \sin\theta) + \\
 & \frac{2g}{R-r}(\mu \sin\theta - \cos\theta) = 0
 \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)中,余弦项的系数为零,正弦项的系数为零

$$C - 2\mu A - \frac{2g}{R-r} = 0 \quad (29)$$

$$A + 2\mu C + \frac{2g}{R-r}\mu = 0 \quad (30)$$

联解式(29)和式(30)得

$$A = -\frac{3\mu}{1+4\mu^2} \frac{2g}{R-r} \quad (31)$$

$$C = \frac{1-2\mu^2}{1+4\mu^2} \frac{2g}{R-r} \quad (32)$$

将式(31)与式(32)代入式(27)得一阶线性非齐次微分方程式(21)的解为

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R-r} \frac{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}{1+4\mu^2} \quad (33)$$

利用式(11)可以得到小球质心的速度大小

$$v = \sqrt{2g(R-r) \frac{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}{1+4\mu^2}} \quad (34)$$

文献[4]中小物块(小滑块)在粗糙圆弧轨道上运动,其受力情况与小球在粗糙圆弧轨道上受力情况相似,文献[4]中对式(16)、式(17)和式(18)的求解用了非常详细的数学方法,得出小物块速度的表达式,本文利用通解加特解的方法,得出小球质心速度的表达式,两种数学处理思路虽然不同,但是最后的结果相似。

利用式(16)、式(18)及式(34),求小球所受的摩擦力为

$$\begin{aligned}
 f &= \mu \left[mg \sin\theta + m \frac{v^2}{R-r} \right] \\
 &= \mu \left[mg \sin\theta + \right. \\
 & \quad \left. 2mg \frac{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}{1+4\mu^2} \right]
 \end{aligned} \quad (35)$$

小球对质心轴转动的角加速度为

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{fr}{I} \\
 &= \frac{5\mu}{2r} \left[g \sin\theta + \right. \\
 & \quad \left. 2g \frac{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}{1+4\mu^2} \right]
 \end{aligned} \quad (36)$$

联解式(33)和式(36),利用积分求小球在任意时刻的角速度

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^t \beta dt = \int_0^\theta \frac{\beta}{\dot{\theta}} d\theta \\
 &= \int_0^\theta \frac{\frac{5\mu}{2r} \left[g \sin\theta + 2g \frac{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}{1+4\mu^2} \right]}{\sqrt{\frac{2g}{R-r} \frac{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}{1+4\mu^2}}} d\theta
 \end{aligned} \quad (37)$$

小球再次达到纯滚动的条件

$$r\omega = (R-r)\dot{\theta} \quad (38)$$

将式(33)和式(37)代入式(38)整理得

$$\begin{aligned}
 & \frac{5\mu}{4} \int_0^\theta \frac{3\sin\theta + 6\mu\cos\theta - 6\mu e^{-2\mu\theta}}{\sqrt{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}} d\theta \\
 &= \sqrt{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}} \quad (39)
 \end{aligned}$$

式(39)说明动摩擦因数与纯滚动时的角度一一对应,特殊情况,小球刚好在 B 点达到纯滚动,此时

$\theta = \frac{\pi}{2}$, 式(39)变为

$$\begin{aligned}
 & \frac{5\mu}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin\theta + 6\mu\cos\theta - 6\mu e^{-2\mu\theta}}{\sqrt{(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}}} d\theta \\
 &= \sqrt{(1-2\mu^2) - 3\mu e^{-\pi\mu}} \quad (40)
 \end{aligned}$$

计算式(40)得

$$\mu = 0.17385$$

当 $\mu > 0.17385$ 时,小球在 1/4 圆轨道上先做又滚又滑的运动,然后在一个特定的位置小球可以达到纯滚动,当 $\mu < 0.17385$ 时,小球在 1/4 圆轨道上一直做又滚又滑的运动,不能达到纯滚动。

2.3 小球在 1/4 圆轨道达到纯滚动后,能不能保持纯滚动到最低点

当 $\mu > 0.17385$, 小球在达到最低点之前的某一位置达纯滚动,设此处为 $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, 对应的摩擦力 f_0 , 弹力 N_0 , 动摩擦因数 μ_0 , 摩擦力和弹力满足关系

$$f_0 = \mu_0 N_0 \quad \left(\frac{f_0}{N_0} = \mu_0 \right) \quad (41)$$

假设此后到最低点,小球能保持纯滚的状态,研究

小球在 $\theta (\theta_0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 位置时,由质心运动定律得

$$N - mg \sin\theta = m \frac{v^2}{R-r} \quad (42)$$

$$mg \cos\theta - f = m \frac{dv}{dt} \quad (43)$$

由于纯滚动,摩擦力不做功,由机械守恒得

$$\begin{aligned} & mg(R-r)\sin\theta - mg(R-r)\sin\theta_0 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 \\ &= \frac{7}{10}mv^2 - \frac{7}{10}mv_0^2 \end{aligned} \quad (44)$$

将式(44)代入式(42)得

$$N = mg\sin\theta + \frac{10}{7}mg\sin\theta - \frac{10}{7}mg\sin\theta_0 + \frac{mv_0^2}{R-r} \quad (45)$$

从式(45)可以得出,随着 θ 增加,小球与圆轨道的正压力 N 变大, $N > N_0$ 。

式(44)两边求导

$$mg(R-r)\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{10}m2v \frac{dv}{dt} \quad (46)$$

小球质心绕圆轨道圆心转动角速度与质心速度满足关系

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R-r} \quad (47)$$

式(46)和式(47)联解得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7}g\cos\theta \quad (48)$$

将式(48)代入式(43)得

$$f = \frac{2mg\cos\theta}{7} \quad (49)$$

从式(49)可以得出,随着 θ 增加,小球与圆轨道的摩擦力 f 变小, $f < f_0$ 。小球在 θ 位置时,摩擦力和正压力的关系为

$$\frac{f}{N} < \frac{f_0}{N_0} = \mu_0 \quad (50)$$

式(50)表示,摩擦力为静摩擦力,并未达到最大静摩擦力,所以小球在 $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 处达到纯滚,以后到最低点的过程中,小球与圆轨道直接的摩擦力均为静摩擦力,所以保持纯滚的状态到最低点。

2.4 例题中,小球在最低点达到纯滚动还是非纯滚动

小球在最低点恰好纯滚动,将 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 代入式(34),得小球在最低点的速度

$$v = \sqrt{2g(R-r) \frac{(1-2\mu^2) - 3\mu e^{-\pi\mu}}{1+4\mu^2}} \quad (51)$$

式(16)中,取 $\theta = \frac{\pi}{2}$,并将式(51)代入得最低点的压力大小

$$N = mg + 2mg \frac{(1-2\mu^2) - 3\mu e^{-\pi\mu}}{1+4\mu^2} \quad (52)$$

将 $\mu = 0.17385$ 及例题中的条件代入式(52)得

$$N = 4.2749N$$

小球恰好在最低点达纯滚动时,圆轨道对小球的支持力大小为4.2749N,如果小球先又滚又滑然后达纯滚动到最低点,由于纯滚动摩擦力不做功,所以小球在最低点速度相对较大,这样圆轨道对小球的支持力应大于4.2749N,例题中小球在最低点受到的支持力大小为3.6N,所以小球在最低点应为又滚又滑的状态,但是由于例题中没有给出小球的半径,故无法求出最低点小球的速度大小及克服摩擦力做功大小。

3 结语

小球模型是中学阶段非常重要的模型,当小球在摩擦力作用下,绕质心转动,此时小球不能处理成质点,即便小球半径趋近于零,也需要利用刚体模型处理。利用质心运动定理和质点系的角动量得到小球在粗糙圆轨道的运动情况与动摩擦因素密切相关,虽然推导过程复杂,但是能让大家对小球的模型理解得更加深刻。相比小球在圆轨道上的运动,小滑块在圆轨道上的运动时,其转动影响可以忽略,中学阶段命制物体在圆轨道上运动的题目时,为了回避转动的影响,建议把物体选为小滑块。

参 考 文 献

- [1] 徐文杰,于正荣. 小球在斜面上的滚滑运动[J]. 物理教师, 2017, 38(8): 59-64.
XU W J, YU Z R. The rolling and sliding motion of a small ball on an inclined plane[J]. Physics Teacher, 2017, 38(8): 59-64. (in Chinese)
- [2] 吴洵,黄亦斌. 小球在粗糙斜面上的一般运动[J]. 物理通报, 2018(5): 11-15.
WU X, HUANG Y B. The general motion of a small ball on a rough slope[J]. Physics Bulletin, 2018(5): 11-15. (in Chinese)
- [3] 梁沛林. 从物理试题实验化谈考试命题中的小球模型命题误区[J]. 物理教学, 2023, 45(1): 60-63.
LIANG P L. On the misunderstandings of small ball model proposition in physics test questions from the perspective of experimentation[J]. Physics Teaching, 2023, 45(1): 60-63. (in Chinese)
- [4] 谭志刚. 探寻圆轨道上神奇的 μ 值[J]. 物理教学, 2023, 45(3): 59-62.
TAN Z G. Exploring the magical friction factors on circular orbits[J]. Physics Teaching, 2023, 45(3): 59-62. (in Chinese)