

提升“地球物理场论”课程教学质量的三个着力点

巨 鹏

(长安大学地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710064)

摘 要 “地球物理场论”是地球物理类专业一门非常重要的专业基础课。笔者在近十年的教学实践中,根据课程特点和学生认知规律,分别从数学知识的应用、物理知识的教学以及与后续课程的衔接三个方面,对提升课程教学质量进行深入细致的探索。笔者认为数学知识的应用应根据专业需要进行有针对性的取舍,让学生体会到数学知识在专业上的应用,同时要注重体现数学知识中的物理思想;物理知识的教学应以恰当的方式引入新概念,在教学中适当地引入物理学史的介绍,注重让学生掌握物理思想方法、学会用物理学的视角看待问题、分析问题和解决问题;通过科学符号的统一、课后习题的渗透、叙述的一致性上做好与后续专业课程的衔接。

关键词 地球物理场论;数学知识应用;物理知识教学;后续课程衔接;物理思想方法

THREE KEY POINTS TO IMPROVE THE TEACHING QUALITY OF THE “GEOPHYSICAL FIELD THEORY” COURSE

JU Peng

(School of Geological Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064)

Abstract “Geophysical field theory” is a very important professional basic course of geophysical major. In the teaching practice of nearly ten years, according to the characteristics of the course and the cognitive law of students' cognition, the author explores the teaching quality of the course from the three points: the application of mathematics knowledge, the teaching of physics knowledge and the connection with the follow-up courses. The author believes that the application of mathematical knowledge should be targeted based on professional needs, allowing students to experience the application of mathematical knowledge in their majors, while also emphasizing the embodiment of physical ideas in mathematical knowledge; the teaching of physics knowledge should introduce new concepts in an appropriate way, introduce the history of physics appropriately, and focus on enabling students to master physical thinking methods, learn to view problems from a physical perspective, analyze problems, and solve problems; and by unifying scientific symbols, infiltrating after-school exercises, and ensuring consistency in narration, aim to connect with subsequent professional courses.

Key words geophysical field theory; mathematical knowledge application; physics knowledge teaching; follow-up course connection; physics thought method

收稿日期: 2023-03-29; 网络首发日期: 2024-03-26

基金项目: 陕西省高等教育学会教改项目, 课题编号: XGH21076。

作者简介: 巨鹏, 长安大学地质工程与测绘学院讲师, jupeng@chd.edu.cn。

引文格式: 巨鹏. 提升“地球物理场论”课程教学质量的三个着力点[J]. 物理与工程, 2024, 34(3): 36-41.

Cite this article: JU P. Three key points to improve the teaching quality of the “Geophysical Field Theory” course[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(3): 36-41. (in Chinese)

“地球物理场论”是地球物理类专业一门重要的专业基础课,它以微积分、偏微分方程和矢量分析为主要数学工具,通过对弹性波场、重力场、电磁场等的学习,为地球物理类专业的后续课程打下牢固的数理基础。它是基础课与专业课衔接的桥梁,在整个专业教学中起着“承上启下”的作用^[1]。“承上”表现在这门课程涉及的数理类先修课程众多,包括高等数学、大学物理、数理方程与特殊函数,且都对这些课程内容有广泛、深入的应用;“启下”表现在这门课所讲授的弹性波场、引力场、电磁场等知识是地球物理类专业后续各专业课的理论基础,后续的所有专业课都会以这门课程的知识为基础在某一方向进行深入的研究。“地球物理场论”这门课程讲授的虽然都是物理学知识,但与通常的物理课程教学又有很大的不同,主要是这门课程涉及到抽象的数学知识较多,同时这门课程还需要与后续专业课做好必要的衔接,理论艰深,比较抽象,教学难度大,学生也难以理解掌握^[2]。笔者在近 10 年的教学实践中,根据课程特点和学生认知规律,分别从数学知识的应用、物理知识的教学以及与后续课程的衔接三个方面,对“地球物理场论”课程的高质量教学进行深入细致的探索,不断调整课程教学内容,改进教学方式、方法,取得了良好的教学效果,提升了学生学习探索的热情。

1 数学知识的应用

这门课程涉及的数学知识主要有微积分、偏微分方程和矢量分析,笔者根据后续专业课程和专业培养的需求,对数学知识进行有针对性的取舍,注重让学生体会数学知识在专业上的应用。

1.1 微积分

这门课程涉及的微积分知识主要包括积分(尤其是多重积分)、常微分方程、级数展开等。这些内容学生在“高等数学”课程中都进行过系统地学习,但当时往往偏重于理论化的教学,缺少实际应用的训练,而在专业课程教学中,需要的正是学生们将理论化的知识应用到具体物理模型上的能力。

例如在重力异常的教学,需要在直角坐标系下,将密度异常体的引力场强表示为三维积分,再将其垂直于地表的分量单独提出来,得到重

力异常的计算公式。在实际教学中,笔者会从坐标系的建立开始,引入密度异常体,然后从中选取微元体,借助万有引力定律得到微元体的引力场强,再通过积分得到完整的表达式,在这一过程中让学生体会如何借助物理建模,将抽象的数学知识应用于具体的物理场景,也让学生体会到物理中的叠加原理与数学上积分的对应关系。

1.2 偏微分方程

这门课程对于偏微分方程的应用集中在场方程的求解,尤其是静电场、稳定电流场以及磁标势的拉普拉斯方程求解,涉及的主要方法有分离变量法、镜像法、格林函数法。这些方法虽然在数学物理方程的教学中都进行了讲授,但由于这门课通常是由数学专业老师依据数学物理方程教材进行授课^[3],讲授的原理和方法虽然相同,但在具体应用上仍然与“地球物理场论”课程存在一定的差异。

以分离变量法为例,在通常的数学物理方程教学中,都是以一维的波动方程和扩散方程的求解为例进行教学,而在“地球物理场论”课程中,涉及较多的直角坐标系下利用分离变量法求解拉普拉斯方程,则在数学物理方程的教学鲜有涉及。因此,在这部分的教学,笔者都会借助学生们已经掌握的分离变量的方法,在二维和三维直角坐标系下,对拉普拉斯方程的求解过程进行细致的推导,并加以应用举例。

对于镜像法,在数学物理方程课程中大多不作专门讲授,即使讲授也只是作为求解格林函数的一种辅助性方法加以介绍,很少涉及其中的物理思想。而在“地球物理场论”中,镜像法除了是一种重要的求解静电场、稳定电流场的数学方法以外,还蕴含了关于物理场方程求解中涉及的唯一性思想,即当两个问题涉及的场源分布和边界条件相同时,具有相同的解。笔者在教学中,会将这部分内容安排在唯一性定理的讲解之后,将镜像法作为唯一性定理的重要应用加以介绍。

对于格林函数法,则需要在数学物理方程教学中以纯数学推导为主的教学基础上,将其中所体现出的物理思想给学生加以重点介绍,即对于复杂场源、复杂边界条件的求解可以借助点源在简单边界条件下的解,借助格林积分公式得到。这一物理思想方法不仅在求解静电场时会用到(此时为泊松方程),还会在求解弹性波场的克奇

霍夫积分时用到(此时为达朗贝尔方程)。在这两处所用到的格林函数法有一些微小的差异(主要体现在对边界条件的限制上),可以通过对比帮助学生更好地理解、掌握这一方法。

1.3 矢量分析

矢量分析是“地球物理场论”这门课程用到的核心数学工具,它在“地球物理场论”研究中的地位相当于微积分在牛顿力学研究中的地位。对于这一重要的数学工具,通常没有专门的课程讲授,因此,在“地球物理场论”课程中,需要首先对这一重要的数学工具进行补充讲授。

对于矢量分析的讲授,应当在帮助学生建立起对梯度、散度、旋度理解的基础上,重点介绍矢量分析的三大基本定理,即梯度定理、高斯定理、斯托克斯定理。此外还包括矢量场的亥姆霍兹定理以及亥姆霍兹分解,同时帮助学生掌握球坐标系和柱坐标系下所涉及的矢量微分和积分运算。另外,还需要向学生介绍一些重要的推论公式(例如格林公式),这些都会在后续的学习中发挥重要作用。

在矢量分析的教学中,有一个问题是学生经常会问到的,那就是为什么要学习矢量分析?它到底有什么作用?对于矢量分析在“地球物理场论”中的作用,学生需要学到静电场部分,才能初步体会到矢量分析的用处,而要真正理解这一数学工具的重要性,则需要学到时变电磁场部分。以笔者所在的长安大学地球物理系为例,矢量分析和弹性波场会在大学二年级第二学期讲授,重力场和电磁场的内容则在大学三年级第一学期讲授,时间上有较大跨度。这对学生的学习,尤其是对矢量分析的理解会造成较大障碍,也会影响到对重力场和电磁场的学习。为了解决这一矛盾难题,笔者通常会在讲授完矢量分析的主要内容之后,向学生介绍如何借助矢量分析中的散度、旋度概念,更好地描述静电场与静磁场,特别是借助这一工具,可以在形式上非常方便地将描述静电场、静磁场的方程推广到随时间变化的麦克斯韦方程组,同时将这种描述方式与通过大小、方向描述矢量场的方式加以对比,以此来帮助学生建立起对于矢量分析这一数学工具在整个“地球物理场论”教学中的整体理解。这样讲授,学生虽然对具体的内容并不能完全理解,但借助于在大学物理中学习到的电磁场理论,学生可以建立起对于矢量

分析的整体理解,特别是在后续课程的学习中会起到非常重要的作用。这样的整体理解对于学生学习矢量分析有着非常大的帮助。

2 物理知识的教学

物理知识的教学是“地球物理场论”这门课程的核心,而物理教学最重要的就是要能够帮助学生掌握物理思维、建立物理图像,学会用物理学的视角去认识问题、理解问题和解决问题。

2.1 以适当的方式引入新的物理概念

“地球物理场论”这门课涉及大量的物理概念,这些概念如果很生硬地介绍给学生,会给学生的学习造成很大的障碍,甚至会产生排斥心理。物理学中的概念都是通过对物理现象的观察与总结,结合数学上的考虑,以非常自然的方式引入。

在教学中,如果能通过适当的铺垫,唤起学生先前的学习经验,在一定情境中将涉及的概念自然而然地引出,可以极大地降低学生接受新概念的难度。位移电流是由静态电磁场方程过渡到麦克斯韦方程组时非常重要的一个概念,通常教科书上在这部分直接通过对已有公式进行推导变形,得出此前理论内在的不自洽性,然后直接引出位移电流的表达式。这种教学方法虽然简便,但缺少对位移电流这一概念的直观讲解,会让学生们觉得更像是数学游戏,很难从中体会到新概念背后的物理思想,也不利于后续的教学。笔者在引入这个概念之前,首先从利用安培环路定理分析含电容器的交流电路时所产生的矛盾出发^[4],引导学生去思考如何解决这个矛盾,在指出变化电场的通量积分具有与电流类似的效果之后,对具体的积分形式进行推导,在最终得到位移电流的数学形式之后,才最终引入位移电流这一概念。这样学生对这一概念的引入就会觉得非常自然,容易理解,同时也为后续关于似稳电磁场以及时变电磁场的学习打好基础。

2.2 注重对物理学史的介绍

“地球物理场论”课程中讲授的都是经典的物理学知识,笔者在教学实践中发现,每个物理定理、规律的发现、诞生背后都有一段物理学家艰难探索的励志故事,在教学中根据教学内容,适当地引入物理学史的知识,让学生了解所学的知识在当初是如何被发现的,可以让学生理解物理定理、

公式的来龙去脉,对所学知识有更全面、生动的认识,对其中所蕴含的思想有更深刻的理解,还可以启发学生的创新思维。

在教学中,让学生置于物理学家发现、探索物理的历史情境之中,让其了解物理学家科学探究的艰难历程,可以促进学生对物理概念和规律的理解,有助于提升其科学思维 and 创新能力。其实,教师的任务不是把现成的知识灌输给学生,而是借助于历史设计教学活动,引导学生沿着历史发展的路径,了解知识的发生发展过程,从而完成这种再创造工作^[5]。我们现在使用的“地球物理场论”教材因受篇幅所限,隐去了物理知识产生的过程。而恰恰是在物理学家发现、研究物理过程中的突破、失败和磨难,蕴藏着丰富的创新思维与科学思想。因此,教师应结合教学内容,给学生讲述物理学发展史和物理学家发现物理公式、定理的故事,使学生了解物理知识产生的过程,弄清物理公式、定理等的背景和来源,加深对其本质的理解。在讲授万有引力定律时,笔者会介绍牛顿是如何通过认识到地球表面物体受到的吸引力与月球绕地球转动所受到的吸引力是同一种力,并利用当时已有的观测数据,得到万有引力的具体形式,尤其是如何确定与距离的平方成反比关系。在讲授毕奥-沙伐尔定律时,笔者会介绍拉普拉斯是如何利用毕奥和沙伐尔的实验观测数据,得到通电导线产生磁场的具体表达式。笔者还经常结合教学内容,穿插介绍物理学家当时是怎么发现问题和如何研究、解决这个问题的。在讲授麦克斯韦方程组时,笔者先总结在此之前已经得到的电磁学规律,并强调涉及的矢量分析这一数学工具是由麦克斯韦最早引入电磁学研究,然后通过具体的物理模型讨论,让学生体会到当时的电磁理论所遇到的自洽性问题,接着再引导学生思考如何从理论上解决这一问题,最后介绍麦克斯韦如何通过引入位移电流这一概念解决上述问题,最终建立了统一的电磁理论并接受了实验的检验。这样的讲解,使学生切实体验到物理学家麦克斯韦发现麦克斯韦方程组的真实背景与前因后果,感受到物理学家严谨求实的科学态度、实事求是的科学精神和勇于探索的创新精神等。“地球物理场论”教材上的科学结论固然重要,而它背后的孕育发展、由潜到显的转化历程则更富启迪。具体的物理知识固然重要,但不是教学的目的,

“地球物理场论”课程的教学目的是让学生真正学会运用运动、物质、能量和相互作用等物理观念观察、认识和理解客观世界,形成独特的物理思维方式。因此,教学不能把重心放在固定知识的掌握上,而是要从更宏观的角度来开启学生的智慧潜能、彰显人的创新精神。教师不仅要给学生传授物理知识,更重要的是要展示物理知识创生过程中的经历、曲折和智慧,让学生学到活的知识,认识到物理知识对于人类和个体发展的重要价值与意义,而不只是一个用符号表达的“死”的结论。在讲清物理概念、结论的同时,用图文并茂、生动形象的现代信息技术向学生展现物理定理的发现过程、物理概念的形成过程和物理问题的解决过程,将“死”的物理知识转变为鲜活、生动的人类认识客观世界的过程,让学生了解科学探究过程,理解物理知识的来龙去脉,认识物理世界的特性、现象、规律和本质,使在学习形成知识技能的同时,其思维方式、创新意识和科学精神等方面也能获得有效的浸润和提升。

2.3 不能用数学推导代替物理知识的教学

在“地球物理场论”的教学中,经常会涉及较大篇幅的数学推导、计算,容易让学生误以为这些推导是课程的核心。教师必须要清楚数学推导、计算只是得到物理结果所依赖的工具,真正重要的是推导和计算背后所体现的物理思想和方法。笔者在教学中,在涉及推导和计算之前,都会首先强调遇到的物理问题是什么,要用什么样的假设条件,在计算、推导过程中,也会反复强调物理思想在计算中如何体现,在得到结果之后,也会重点说明计算结果的物理含义,而不会简单地只给出结果的数学形式。

在讲授矢量分析中的梯度定理、高斯定理、斯托克斯定理时,笔者在证明这些定理之前,会首先介绍这些定理的最直观的物理含义,在学生对这些定理的物理图像有了感性的理解之后,才会去进行细致的数学证明,确保学生在一开始学习这些定理时,就将它们与具体的物理图像、过程建立联系,而不是只学会抽象的、纯数学形式的定理。

在讲授含介质的静电场和静磁场时,计算由介质引起的势函数时,会得到极化电荷密度(包括面密度和体密度)和磁化电流密度(包括面密度和体密度)的微分表达式。这些表达式是通过数学上类比的方式赋予相应的物理意义,笔者在用这

种方法讲授之后,还会用微元分析的方法,针对对应的模型,直接得到上述的各种微分表达式,让学生对通过数学类比方法所得结果的物理含义有更好的理解。

在讲授似稳电磁场和时变电磁场的场方程时(包括势函数的场方程,以及含导体与不含导体的情形),涉及很多方法类似,但具体细节不同的推导。在这些推导之前,笔者都会强调具体的物理问题以及前提假设,并指出这些前提假设如何体现在推导过程中,并且会对各种情形的推导结果的差异进行比较,帮助学生更好地理解不同物理模型之间的差异是如何反映到最终的场方程的差异。

3 与后续课程的衔接

“地球物理场论”的教学最终是为了地球物理专业后续的地震学、重力学、地电学、地磁学以及相应的勘探类课程打好物理基础。因此,在教学中需要对后续课程做适当的铺垫与渗透,从而做好与后续课程的衔接。

3.1 做好课程间科学符号间的衔接

科学符号在不同的教科书中常常会有一些的差异,甚至是在定义时也存在细微的不同。在这方面给学生做一些必要的介绍可以排除学生在课程学习上的障碍。例如在弹性力学的教科书中^[6],关于应力和应变的符号,与地球物理相关的教科书之间经常有一些差异^[7],甚至关于切应变的定义也往往存在一个“ $1/2$ ”系数的差异。弹性力学的教科书中在引入切应变时,往往通过几何方法,借助于对微元形变的计算,直接得出切应变的公式,因此不涉及“ $1/2$ ”系数(见参考文献[6] 2~4节公式(c))。而在地球物理相关的教科书中,往往在介绍位移矢量场之后,通过对位移矢量场进行微分运算,直接得出完整的应变张量,此时引入“ $1/2$ ”系数,可以将正应变与切应变用统一的公式进行表示(见参考文献[7]公式(5.1-2)),同时与后续地震类的课程所采用的记号相同。笔者在教学过程中,会与讲授后续地震类课程的老师进行交流,将符号间的差异以及由此引起的变化会提前告诉学生。

3.2 通过例题与习题对后续课程进行渗透

在“地球物理场论”的教学过程中,笔者通过

课堂例题与课后习题的方式,将后续专业课中涉及的一些知识提前介绍给学生,将这些内容作为考试时的重点考察内容,这些都会很好地帮助学生做好课程间的衔接,为学生学习后续专业课程奠定良好基础。

在讲授重力异常的概念后,笔者会对几类常见模型的重力异常的计算以例题和习题的形式加以讲授;在讲授柱坐标系下分离变量法求解拉普拉斯方程时,会以点电源在双层介质中产生的场为例,提前向学生介绍垂向电测深的理论基础;在讲授似稳电磁场时,会介绍趋肤效应的物理原理以及相应的数学计算;在学期末,还会以专题课的形式,结合三维球坐标系下拉普拉斯方程的求解,向学生介绍地球正常重力场模型。

3.3 讲清楚某些专业表述与物理学表述的差异

“地球物理场论”的授课归根到底是为了后续的专业课程打好物理基础,但在专业领域,有时候出于方便的考虑,会在一些问题的形式上与单纯的物理学科有所区别,这个时候需要向学生介绍清楚引起这些差异的原因,以及对这些差异如何理解,以免学生在后续的学习中引起不必要的混淆。

以引力势概念为例,如果是从整个物理学来看,考虑到机械能守恒,会在引力势的定义(以无穷远为势函数的零点)中出现一个负号,同时在由引力势的梯度计算引力场时,也会出现一个负号。学生在大学物理课程中学习的也是带负号的引力势。但在大多数重力学与重力勘探的教材中,这两个负号都没有^[8]。这样做只是出于专业上方便的考虑,并不会对实际的计算产生任何问题。在教学中将这种类型的差异向学生讲清楚,可以避免不必要的混淆,也能让学生对基础概念有更深刻的理解。

4 结语

“地球物理场论”是地球物理类专业非常重要的一门专业基础课,学生对这门课程的学习效果会直接影响其对后续课程的学习,甚至会影响到将来的专业发展。为了提高课程教学质量,笔者近十年对这门课程教学进行深入探索,依据课程特点和学生认知规律,对课程教学内容和方法进行调整与改革;对数学知识的应用根据专业需要

进行合理取舍,让学生体会到数学知识在专业上的应用,注重体现数学知识中的物理思想。在物理知识的教学过程中,以恰当的方式引入新概念,在教学中适当地引入穿插物理学史的知识,让学生掌握物理思想方法,学会用物理学的视角、方法看待问题、分析问题和解决问题。同时,注意做好与后续课程的衔接,为学生后续专业学习奠定良好的物理基础。

参 考 文 献

- [1] 杨海燕,邓居智,汤洪志,等. 浅谈地球物理学专业基础理论课教学改革策略[J]. 东华理工大学学报: 社会科学版, 2013, 32(1): 91-93.
YANG H Y, DENG J Z, TANG H Z, et al. On the teaching reform strategy of fundamental theory course in geophysics[J]. Journal of East China Institute of Technology (Social Science), 2013, 32(1): 91-93. (in Chinese)
 - [2] 张会星,何兵寿,童思友. 以学习者为中心的“地球物理场论”课程教学模式探究[J]. 中国地质教育, 2023, 32(4): 115-118.
ZHANG H S, HE B S, TONG S Y. Research on the learner-centered teaching mode of geophysical field theory[J]. Chinese Geological Education, 2023, 32(4): 115-118. (in Chinese)
 - [3] 梁昆森. 数学物理方程[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
 - [4] 梁灿彬,秦光戎,梁竹健. 电磁学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.
 - [5] 吴骏,汪晓勤. 发生教学法: 从理论到实践——以数学教学为例[J]. 教育理论与实践, 2013, 33(2): 3-5.
WU J, WANG X Q. The genetic approach to teaching and learning: From theory to practice—Taking mathematics teaching as an example[J]. Theory and Practice of Education, 2013, 33(2): 3-5. (in Chinese)
 - [6] 徐芝纶. 弹性力学(上册)[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2016.
 - [7] 薛琴访. 场论[M]. 北京: 地质出版社, 1978.
 - [8] 施国良,张国雄. 宏观场论[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 2008.
- (上接第 21 页)
- [2] 高崇伊,朱琴. 多方过程的定义及其和准静态过程的关系[J]. 大学物理, 2006, 25(2): 13-15.
GAO C Y, ZHU Q. The definition of polytropic process and the relation between it and the quasi-static process[J]. College Physics, 2006, 25(2): 13-15. (in Chinese)
 - [3] 郑明阳,王天为,张国锋. 理想气体热力学过程吸放热情况的图像判断法[J]. 物理与工程, 2014, 24(3): 24-28.
ZHENG M Y, WANG T W, ZHANG G F. A simple method to determine gaining or losing heat in a thermodynamic process for an ideal gas system[J]. Physics and Engineering, 2014, 24(3): 24-28. (in Chinese)
 - [4] 蓝风华. 范德瓦尔斯气体的气压公式[J]. 物理与工程, 2014, 24(1): 46-54.
LAN F H. Barometric formula of van der Waals gas[J]. Physics and Engineering, 2014, 24(1): 46-54. (in Chinese)
 - [5] 张万林. 范德瓦尔斯气体的热力学性质研究[J]. 科技资讯, 2008, 14: 209.
ZHANG W L. Studies of the thermodynamic properties of van der Waals gas[J]. Science and Technology Information, 2008, 14: 209. (in Chinese)
 - [6] 舒纯军,余先伦,姜友娥,等. 范德瓦尔斯气体多方过程的研究[J]. 重庆三峡学院学报, 2013, 29(145): 35-36.
SHU C J, YU X L, JIANG Y C, et al. Studies on the polytropic process of van der Waals gas[J]. Journal of Chongqing Three Gorges University, 2013, 29(145): 35-36. (in Chinese)
 - [7] 杨晓雪. 大学物理[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2014.
 - [8] 付清荣,赵建东,张国梁. 范德瓦尔斯气体热力学过程的研究[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版), 2012, 3: 39-42.
FU Q R, ZHAO J D, ZHANG G L. A Study on Thermodynamics Process of van der Waals' Gas[J]. Journal of Yili Normal University (Natural Science Edition), 2012, 3: 39-42. (in Chinese)
 - [9] 尹钊,陈雪亮. 范德瓦尔斯气体方程描述真实气体的成功与缺陷[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2003, 16(4): 98-100.
YIN Z, CHEN X L. The successes and defects of real gases of the van der Waals gas equation description[J]. Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition), 2003, 16(4): 98-100. (in Chinese)
 - [10] 朱元举. 多方过程的实用解析[J]. 中国科技纵横, 2013, 23: 248, 250.
ZHU Y J. Analyzing for the polytropic process[J]. China Science & Technology Overview[J], 2013, 23: 248, 250. (in Chinese)