

相对论宏观系统中的热力学平衡态

崔 隆¹ 王 涛¹ 蔡逸凡¹ 郝 鑫² 赵 柳¹⁽¹⁾ 南开大学物理学院, 天津 300071;⁽²⁾ 河北师范大学物理学院, 河北 石家庄 050024)

摘 要 本文在广义相对论弯曲时空背景下, 讨论了相对论流体力学、动理学和随机热力学对于热力学平衡态的定义以及它们之间的联系和区别。特别地, 一阶相对论流体力学给出的平衡态定义有可能存在不稳定性, 而动理学给出的定义总是稳定的。

关键词 广义相对论; 弯曲时空; 热力学平衡态

THERMODYNAMIC EQUILIBRIUM FOR RELATIVISTIC
MACRO SYSTEMSCUI Long¹ WANG Tao¹ CAI Yifan¹ HAO Xin² ZHAO Liu¹⁽¹⁾ School of Physics, Nankai University, Tianjin 300071; ⁽²⁾ School of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei 050024)

Abstract The definitions of thermodynamic equilibrium in general relativistic curved space-time background are presented respectively by use of relativistic hydrodynamics, kinetic theory and stochastic thermodynamics. The connections and differences between these definitions are also discussed. In particular, the equilibrium states defined via first order hydrodynamics can be unstable, whereas those defined via kinetic theory are always stable.

Key words general relativistic; curved spacetime; thermodynamic equilibrium

在热力学和统计物理中, 平衡态有着特殊的地位。如果我们要研究各种非平衡状态的现象, 首先需要对平衡态有准确的理解。在非相对论的热力学中, 平衡态有着多种不同而互不等价的定义。文^[1]对不同定义进行了分类梳理, 并提出了适用于整个热力学演化过程的平衡态定义。然而, 对于处于具有长程特征的引力场和电磁场作用下的相对论热力学系统, 直接使用在非相对论系统中引入的平衡态定义会遇到许多问题, 通常的热力学和统计物理教科书大都对此采取回避的态度。

具体来说: 在文^[1]中被划分为第一、二类定义的平衡态的要点是将热力学平衡态定义为不随时间演化的状态, 但对于相对论系统, 不同的观测者有不同的计时标准, 时间不再具有绝对性, 因而不

存在绝对的“不随时间演化”的提法, 至多只能谈论相对于某个特定观测者而言不发生时间演化的状态; 文^[1]中的第三类定义将热力学平衡态定义为由一系列平衡条件决定的状态, 这些平衡条件要求描述平衡条件的热力学参量(即所谓的态平衡参量)的空间梯度为零。然而, 在弯曲时空中, 由于 Tolman-Ehrenfest 效应和 Klein 效应的存在, 即便是在相对于某个特定观测者而言不发生时间演化的状态下, 热力学系统内部的温度场和化学势场也不再是均匀的。一些观点甚至认为在长程力场下不允许存在热平衡态。文^[1]中的第四类定义通过统计平均值或熵来定义平衡态, 而通过统计平均值的定义要求宏观物理量有均匀性, 同样无法应用于弯曲时空背景。利用最大熵原理定义的平衡态原则上可能适用于弯曲时空,

收稿日期: 2023-11-18; 网络首发日期: 2024-01-03

基金项目: 国家自然科学基金面上项目资助, 项目批准号: 12275138。

通信作者: 赵柳, 南开大学物理学院教授, lzhaol@nankai.edu.cn。

引文格式: 崔隆, 王涛, 蔡逸凡, 等. 相对论宏观系统中的热力学平衡态[J]. 物理与工程, 2024, 34(3): 8-15.

Cite this article: CUI L, WANG T, CAI Y F, et al. Thermodynamic equilibrium for relativistic macro systems[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(3): 8-15. (in Chinese)

但是这种定义仅适用于孤立系,并且正如本文第4节的讨论,一阶相对论流体力学理论中通常讨论的平衡态不一定满足最大熵原理。

幸运的是,基于相对论动理学的工作表明,弯曲时空中的非平衡输运效应并非由态平衡参量的空间梯度激发,而是由推广的热力学力激发。这使得我们有机会自然地延拓非相对论系统中关于平衡态的定义。在本文中,我们建议将弯曲时空中的平衡态定义为经过弛豫过程后达到的熵产生率为零的状态。本文第1节我们将从流体力学的层面证明,尽管耗散项和热力学力都依赖于观测者的选择,但依然存在对任意观测者而言所有的耗散项或所有热力学力都为零的状态,因此平衡态也可以通过全部耗散项或全部热力学力为零来定义。目前相对论统计力学有两个主要分支,相对论动理学与相对论随机热力学。以熵产生率为零作为出发点,本文第2节中将检验在动理学框架下弯曲时空中平衡态的定义。另一方面,以热传导率为零作为出发点,本文第3节将检验在随机热力学的框架下平衡态的定义。在这些讨论中,可以看到我们建议的热力学平衡态的定义可以囊括相对论流体力学、相对论动理学和相对论随机热力学的定义惯例(尽管不同理论定义平衡态的方式不尽相同),同时我们也会指出存在弛豫过程是定义热力学平衡态的必要条件。

本文的符号约定如下:度规 $g_{\mu\nu}$ 的号差采用 $(-, +, \dots, +)$, 时空维数为 $d+1$, 其中 d 表示空间维数, c 表示光速, 张量指标: $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, d$ 表示时空指标, $i, j, \dots = 1, 2, \dots, d$ 表示空间指标。

1 流体力学中的平衡态

1.1 热力学平衡态

粒子流 N^μ 和能量动量张量 $T^{\mu\nu}$ 是相对论流体力学里的两个重要的张量。值得提前声明的是,在相对论语境下,观测者的选择会影响到观测到的现象。粒子流和能量动量张量本身是与观测者的选择无关的,但是通过粒子流和能量动量张量向着观测者的固有速度方向或正交于观测者的固有速度方向投影而得到的流体力学状态量是依赖于观测者的选择的。在本小节和下一小节中,我们将遵循相对论流体力学的习惯,仅引入与流体共动的观测者 $\bar{\mathcal{O}}$, 而对于一般的观测者 $\mathcal{O}$ 的讨论将在1.2小节和1.3小节进行。

利用共动观测者 $\bar{\mathcal{O}}$ 的固有速度 U^μ 对粒子流和能量动量张量进行分解, 所得结果为

$$\begin{aligned} N^\mu &= (n^{(0)} + \mathcal{N})U^\mu + j^\mu, \\ T^{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2}(\epsilon^{(0)} + \mathcal{E})U^\mu U^\nu + \frac{2}{c^2}q^{(\mu}U^{\nu)} + \\ &\quad (P + \Pi)\Delta^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}U^\mu U^\nu$ 是与 U^μ 正交类空面上的诱导度规, j^μ 、 q^μ 以及 $\Pi^{\mu\nu}$ 满足正交关系 $j^\mu U_\mu = q^\mu U_\mu = 0$, $\Pi^{\mu\nu} U_\mu = 0$, 局部强度变量 $\{n^{(0)}, \epsilon^{(0)}, P\}$ 分别代表粒子数密度、能量密度的零阶背景值和热力学压强(零阶与高阶修正的区别将在后文解释); 耗散项 $\{\mathcal{N}, \mathcal{E}, \Pi, j^\mu, q^\mu, \Pi^{\mu\nu}\}$ 分别代表相对于零阶背景而言粒子数密度、能量密度和压强的修正项以及粒子流的空间分量、能流的空间分量和剪切应力张量。压强的修正项又称为动力学压强。上述流体力学变量都是由与流体共动的观测者 $\bar{\mathcal{O}}$ 所测得的。

必须强调指出: 热力学平衡态仅对于存在耗散的流体(也即存在黏性或热输运的流体)才能够定义。在相对论流体力学中, 热力学平衡态(thermodynamic equilibrium)或整体平衡态(global equilibrium)通常被定义为全部耗散项归零的状态($\mathcal{N}=0, \mathcal{E}=0, \Pi=0, j^\mu=0, q^\mu=0, \Pi^{\mu\nu}=0$), 此时粒子流和能量动量张量的形式与完美流体一致, 粒子流和能量动量张量的本征方向(即粒子输运方向和能量输运方向)均与 U^μ 重合, 因此 U^μ 可以被合理地解释为平衡态流体的流速场。

除了上面的定义之外, 还存在着另外两种等价的定义^[2,3]: 熵产生率为零的状态以及全部热力学力为零的状态。这两种定义的含义和等价性将在1.2节解释。

1.2 局部平衡和熵产生

对于近平衡流体, 当宏观演化的特征时间尺度远大于微观过程的时间尺度而又远小于系统达到平衡的弛豫时间时, 可以采用局部平衡(local equilibrium)假设描述系统, 即近平衡系统的局部达到平衡, 在系统位形空间的各个点处可以定义热力学变量, 如温度 T 、化学势 μ 等, 但系统中依然存在非零的耗散, 因此整体上并未处于平衡态。

为了简便起见, 本节仅讨论中性粒子构成的流体系统。局部平衡是系统完整描述的零阶近似。当考虑中性流体的一阶描述时, 流体的熵流定义为^[4]

$$S^\mu = k_B(\beta P U^\mu - \beta T^{\mu\nu} U_\nu + \alpha N^\mu) \quad (2)$$

其中 k_B 为 Boltzmann 常量, α, β 是局部平衡温度 T 和局部平衡化学势 μ 的函数, $\alpha = -\frac{\mu}{k_B T}$, $\beta = \frac{1}{k_B T}$ 。式(2)又被称作协变的 Euler 关系。

将式(1)代入式(2)有

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} S^\mu &= \beta P U^\mu - \beta T^{\mu\nu} U_\nu + \alpha N^\mu \\ &= (\beta P + \beta(\epsilon^{(0)} + \mathcal{E}^{(1)}) + \alpha(n^{(0)} + \mathcal{N}^{(1)})) U^\mu + \alpha j^{(1)\mu} + \beta q^{(1)\mu} \\ &= \left(\frac{1}{k_B} s^{(0)} + \alpha \mathcal{N}^{(1)} + \beta \mathcal{E}^{(1)} \right) U^\mu + \alpha j^{(1)\mu} + \beta q^{(1)\mu} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 局部平衡熵密度满足 Euler 关系 $s^{(0)} = \frac{\epsilon^{(0)}}{T} + \frac{P}{T} - \frac{\mu n^{(0)}}{T}$ 。

对于中性粒子构成的系统, 利用流体运动方程 $\nabla_\mu N^\mu = 0$, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (同样截断到一阶), 局部平衡的 Euler 关系和 Gibbs-Duhem 关系

$$s^{(0)} = k_B (\alpha n^{(0)} + \beta \epsilon^{(0)} + \beta P) \quad (4)$$

$$dP = s^{(0)} d\left(\frac{1}{k_B \beta}\right) - n^{(0)} d\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (5)$$

可以得到熵产生率

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} \nabla_\mu S^\mu &= \mathcal{N}^{(1)} U^\mu \nabla_\mu \alpha + \mathcal{E}^{(1)} U^\mu \nabla_\mu \beta - \\ &\quad \Pi^{(1)} \beta \nabla_\mu U^\mu + j^{(1)\mu} \Delta_\mu^\nu \nabla_\nu \alpha + \\ &\quad q^{(1)\mu} \Delta_\mu^\rho \left(\nabla_\rho \beta - \frac{\beta}{c^2} U^\sigma \nabla_\sigma U_\rho \right) - \\ &\quad \Pi^{(1)\mu\nu} \beta \left(\Delta_\mu^\rho \Delta_\nu^\sigma \nabla_\rho U_\sigma - \frac{1}{d} \nabla_\rho U^\rho \Delta_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $U^\mu \nabla_\mu \alpha$, $U^\mu \nabla_\mu \beta$ 以及 $-\beta \nabla_\mu U^\mu$ 称为标量热力学力, 它们分别对应热力学参量 α, β 的时间演化以及流体自身的膨胀; $\Delta_\mu^\nu \nabla_\nu \alpha$, $\Delta_\mu^\rho \left(\nabla_\rho \beta - \frac{\beta}{c^2} U^\sigma \nabla_\sigma U_\rho \right)$ 称为矢量热力学力, 它们可以看作是态平衡参量的空间梯度的相对论推广; $-\beta \left(\Delta_\mu^\rho \Delta_\nu^\sigma \nabla_\rho U_\sigma - \frac{1}{d} \nabla_\rho U^\rho \Delta_{\mu\nu} \right)$ 称为张量热力学力, 它与流体内部的剪切效应相对应; 式中的 $\mathcal{N}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(1)}$, $\Pi^{(1)}$, $j^{(1)\mu}$, $q^{(1)\mu}$, $\Pi^{(1)\mu\nu}$ 称为一阶耗散项, 它们都可以表达为热力学力的线性组合, 这样的关系式称为本构关系

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{(1)} &= \nu_1 U^\nu \nabla_\nu \alpha + \nu_2 U^\nu \nabla_\nu \beta - \nu_3 \beta \nabla_\nu U^\nu \\ \mathcal{E}^{(1)} &= \rho_1 U^\nu \nabla_\nu \alpha + \rho_2 U^\nu \nabla_\nu \beta - \rho_3 \beta \nabla_\nu U^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= \pi_1 U^\nu \nabla_\nu \alpha + \pi_2 U^\nu \nabla_\nu \beta - \pi_3 \beta \nabla_\nu U^\nu \\ j^{(1)\mu} &= \sigma_1 \Delta^{\mu\nu} \nabla_\nu \alpha + \sigma_2 \Delta^{\mu\nu} \left(\nabla_\nu \beta - \frac{\beta}{c^2} U^\rho \nabla_\rho U_\nu \right) \\ q^{(1)\mu} &= \kappa_1 \Delta^{\mu\nu} \nabla_\nu \alpha + \kappa_2 \Delta^{\mu\nu} \left(\nabla_\nu \beta - \frac{\beta}{c^2} U^\rho \nabla_\rho U_\nu \right) \\ \Pi^{(1)\mu\nu} &= -\eta \left(\Delta^{\mu\rho} \Delta^{\nu\sigma} \nabla_\rho U_\sigma - \frac{1}{d} \nabla_\rho U^\rho \Delta^{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\{\nu_i, \sigma_i, \rho_i, \kappa_i, \pi_i, \eta\}$ 称为动理系数。这些本构关系对应着一阶耗散项对热力学力线性响应。

容易看出三种热力学平衡态定义的等价性: 热力学力是耗散项出现的原因, 也是熵产生的原因; 而熵产生存在则必然要求耗散项不为零, 热力学力不为零。从上述本构关系式中 $\mathcal{N}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(1)}$ 的表达式也可以看出它们与零阶背景 $n^{(0)}$, $\epsilon^{(0)}$ 的区别: 一阶修正项依赖于热力学力, 而代表局部平衡的零阶背景值则与热力学力无关。热力学压强 P 与动力学压强 $\Pi^{(1)}$ 之间也有类似的区别。

热力学平衡态下所有热力学力为零。特别地, 将矢量热力学力为零的条件改用温度 T 和化学势 μ 来表达, 可以得到著名的 Tolman-Ehrenfest 效应和 Klein 效应

$$\nabla_\mu T + \frac{T}{c^2} U^\nu \nabla_\nu U_\mu = 0, \quad \nabla_\mu \mu + \frac{\mu}{c^2} U^\nu \nabla_\nu U_\mu = 0 \quad (8)$$

其中, $U^\nu \nabla_\nu U_\mu$ 是流体的固有加速度。也就是说, 弯曲时空中的热力学平衡态是由态平衡参量的梯度和流体受到的引力达成的平衡。

1.3 观测者在热力学平衡态的定义中起到的作用

相对论的背景下, 观测者的选择会极大地影响到观测到的现象。下面将以一阶流体力学为例, 说明观测者在热力学平衡态的定义中起到的作用。

热力学平衡态是系统的内禀属性, 本身与观测者的选择无关, 因此我们可以通过与观测者无关的方式定义热力学平衡态 (例如通过熵产生率为零定义)。然而, 熵产生率并不是可以直接观测到的物理量, 判断一个系统是否处于平衡态, 最简便的方法还是测量系统的状态参量是否满足平衡态条件, 也即计算系统的热力学力是否为零。然而, 不同的观测者观测到的态平衡参量是不同的^[5], 测量到的热力学力也并不一致。

对于固有速度为 Z^μ 的一般观测者 $\mathcal{O}$, 流体的固有速度可以分解为 $U^\mu = \gamma(Z^\mu + u^\mu)$, 这里 u^μ

的含义是观测者 $\mathcal{O}$ 看到流体的空间速度, γ 是 Lorentz 因子。利用协变的 Euler 关系和协变的 Gibbs-Duhem 关系 (见附录 A), 我们可以算出熵流的散度为

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} \nabla_\mu S^\mu &= \nabla_\mu (P \mathcal{B}^\mu - T^{\mu\nu} \mathcal{B}_\nu + \alpha N^\mu) \\ &= \nabla_\mu (P \mathcal{B}^\mu) - T^{\mu\nu} \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu + N^\mu \nabla_\mu \alpha \\ &= -T^{(1)\mu\nu} \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu + N^{(1)\mu} \nabla_\mu \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\mathcal{B}^\mu = \beta U^\mu$, 第三个等号用到了协变的 Gibbs-Duhem 关系的推论

$$\nabla_\mu (P \mathcal{B}^\mu) = T^{(0)\mu\nu} \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu - N^{(0)\mu} \nabla_\mu \alpha \quad (10)$$

截止到式(9), 我们还没有引入明确的观测者。这里的一阶流体力学变量 $N^{(1)\mu}$ 、 $T^{(1)\mu\nu}$ 包含了全部的耗散项。利用观测者 $\mathcal{O}$ 的固有速度 Z^μ 对 $N^{(1)\mu}$ 、 $T^{(1)\mu\nu}$ 进行分解, 有

$$N^{(1)\mu} = \mathcal{N}_Z^{(1)} Z^\mu + j_Z^{(1)\mu} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T^{(1)\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_Z^{(1)} Z^\mu Z^\nu + \frac{2}{c} q_Z^{(1)\mu} Z^\nu + \Pi_Z^{(1)} \Delta_Z^{\mu\nu} + \\ &\quad \Pi_Z^{(1)\mu\nu} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, 诱导度规 $\Delta_Z^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} Z^\mu Z^\nu$, $\{\mathcal{N}_Z^{(1)}, \mathcal{E}_Z^{(1)}, j_Z^{(1)\mu}, q_Z^{(1)\mu}, \Pi_Z^{(1)}, \Pi_Z^{(1)\mu\nu}\}$ 是固有速度为 Z^μ 的观测者 $\mathcal{O}$ 看到的一阶耗散项, 这些一阶耗散项满足正交关系 $j_Z^\mu Z_\mu = q_Z^\mu Z_\mu = 0$, $\Pi_Z^\mu Z_\mu = 0$ 。将 $N^{(1)\mu}$ 和 $T^{(1)\mu\nu}$ 的分解代入式(9), 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} \nabla_\mu S^\mu &= \mathcal{N}_Z^{(1)} Z^\mu \nabla_\mu \alpha + \mathcal{E}_Z^{(1)} \left(-\frac{1}{c^2} Z^\mu Z^\nu \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu \right) + \\ &\quad \Pi_Z^{(1)} (-\Delta_Z^{\mu\nu} \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu) + j_Z^{(1)\mu} \nabla_\mu \alpha + \\ &\quad q_Z^{(1)\mu} \left(-\frac{2}{c^2} Z^\nu \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu \right) + \\ &\quad \Pi_Z^{(1)\mu\nu} \left(-\Delta_Z^{\mu\rho} \Delta_Z^{\nu\sigma} \nabla_\rho \mathcal{B}_\sigma + \frac{1}{d} \nabla_\rho \mathcal{B}_\sigma \Delta_Z^{\rho\sigma} \Delta_Z^{\mu\nu} \right) \\ &= \mathcal{N}_Z^{(1)} Z^\mu \nabla_\mu \alpha + \mathcal{E}_Z^{(1)} \left(Z^\mu \nabla_\mu \beta_Z + \frac{1}{c^2} \beta_Z u_\mu Z^\nu \nabla_\nu Z^\mu \right) + \\ &\quad \Pi_Z^{(1)} \left(-\beta_Z \nabla_\mu Z^\mu - \beta_Z \nabla_\mu u^\mu - u^\mu \nabla_\mu \beta_Z + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{c^2} \beta_Z u_\mu Z^\nu \nabla_\nu Z^\mu \right) + j_Z^{(1)\mu} \nabla_\mu \alpha + \\ &\quad q_Z^{(1)\mu} \left(\nabla_\mu \beta_Z - \frac{1}{c^2} \beta_Z Z^\nu \nabla_\nu Z_\mu - \frac{1}{c^2} u_\mu Z^\nu \nabla_\nu \beta_Z - \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{c^2} \beta_Z Z^\nu \nabla_\mu u_\nu \right) + \Pi_Z^{(1)\mu\nu} \left(-\beta_Z \Delta_Z^{\rho\mu} \Delta_Z^{\nu\sigma} \nabla_\rho (Z_\sigma + u_\sigma) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d} \beta_Z \nabla_\rho (Z_\sigma + u_\sigma) \Delta_Z^{\rho\sigma} \Delta_Z^{\mu\nu} - u_\sigma \Delta_Z^{\rho\mu} \Delta_Z^{\nu\sigma} \nabla_\rho \beta_Z + \\ &\frac{1}{d} u^\rho \nabla_\rho \beta_Z \Delta_Z^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 第二个等号代入了 $\mathcal{B}^\mu = \beta U^\mu$, 同时利用到温度的观测者变换关系 $\beta_Z = \gamma \beta^{[5]}$ 。显然, 对比式(6), 一般观测者 $\mathcal{O}$ 看到的热力学力与流体共动观测者 $\bar{\mathcal{O}}$ 看到的不同。容易验证, 如果我们把观测者取为共动观测者, 即 $U^\mu = Z^\mu$, $\gamma = 1$, $u^\mu = 0$, 上式将返回式(6)。

从上述讨论可以看到, 虽然流体的平衡态本身是内禀的, 与观测者的选择无关, 但是如果采用易于由观测者判定和测量的热力学力来描写平衡条件, 则平衡条件会呈现出观测者依赖性。因此, 我们更加倾向于采用与观测者无关的熵流散度为零的条件来描述平衡态, 虽然比起热力学力而言, 熵流散度缺少直观性且不易测量。

2 动理学中的平衡态

动理学描述的气体分子之间相互独立, 只通过弹性碰撞相互作用, 在分子混沌假设下, 可以通过单粒子分布函数 $f(x, p)$ 描述气体系统。单粒子分布函数 $f(x, p)$ 是质壳丛^[6]上的函数, 其中 x 是底流形上的坐标, p 是动量坐标且满足质壳方程 $p^\mu p^\nu g_{\mu\nu} = -m^2 c^2$, m 是粒子的静止质量。

单粒子分布函数 f 可以生成流体的粒子流 N^μ 、能量动量张量 $T^{\mu\nu}$ 、熵流 S^μ ^[7]

$$N^\mu = c \int \boldsymbol{\omega} p^\mu f, \quad T^{\mu\nu} = c \int \boldsymbol{\omega} p^\mu p^\nu f \quad (14)$$

$$S^\mu = -k_B c \int \boldsymbol{\omega} p^\mu f \left[\log \left(\frac{h^d f}{f^* \mathfrak{g}} \right) - \frac{\mathfrak{g} \log f^*}{\zeta h^d f} \right] \quad (15)$$

其中 $\zeta = 0, 1$ 和 -1 分别对应 Boltzmann 气体、Bose 气体和 Fermi 气体, $f^* \equiv 1 + \zeta \mathfrak{g}^{-1} h^d f$, $\boldsymbol{\omega} = \frac{\sqrt{g}}{|p_0|} (dp)^d$ 是质壳丛的纤维(动量空间)上的体元, g 是度规行列式 $g \equiv |\det(g_{\mu\nu})|$, $\mathfrak{g}$ 代表微观态的能级简并度。

2.1 中性气体系统的细致平衡

单粒子分布函数 f 的演化遵循 Boltzmann 方程

$$L_{\mathcal{H}}(f) = \mathcal{C}(x, p) \quad (16)$$

其中

$$L_{\mathcal{H}}(f) = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \quad (17)$$

是切丛上的 Liouville 矢量场^[6], 而

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}(x, p_1) \\ &= \int \varpi_2 \varpi_3 \varpi_4 [W_x(p_3 + p_4 \mapsto p_1 + p_2) f_3 f_4 f_1^* f_2^* - \\ & \quad W_x(p_1 + p_2 \mapsto p_3 + p_4) f_1 f_2 f_3^* f_4^*] \quad (18) \end{aligned}$$

是碰撞项^[7], 其中, $W_x(p_3 + p_4 \mapsto p_1 + p_2)$ 称为转移概率。 $W_x(p_3 + p_4 \mapsto p_1 + p_2) f_3 f_4 f_1^* f_2^*$ 描述了正散射的贡献, $W_x(p_1 + p_2 \mapsto p_3 + p_4) f_1 f_2 f_3^* f_4^*$ 描述了逆散射的贡献。

在微观可逆性假设下, 碰撞项写作

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}(x, p_1) \\ &= \int \varpi_2 \varpi_3 \varpi_4 [W_x(p_3 + p_4 \mapsto p_1 + p_2) \cdot \\ & \quad (f_3 f_4 f_1^* f_2^* - f_1 f_2 f_3^* f_4^*)] \quad (19) \end{aligned}$$

动理学关心的平衡态称为细致平衡态 (detailed balance), 要求在微观可逆性的前提下, 熵产生率为零。熵产生率为零同时要求分布函数满足碰撞项为零的 Boltzmann 方程。

计算熵流的协变散度需要用到下面这个关系 (文献[8]中的定理 3): 对于 s 级矩

$$T^{(s)\mu_1\mu_2\cdots\mu_s} = \int \varpi \Phi p^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_s}, \quad s = 1, 2, \cdots \quad (20)$$

其中, Φ 可以是坐标和动量的任意函数。 $T^{(s)\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}$ 的协变散度可以表达为

$$\nabla_{\mu_1} T^{(s)\mu_1\mu_2\cdots\mu_s} = \int \varpi L_{\mathcal{H}}(\Phi) p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_s} \quad (21)$$

将熵流的定义式 (15) 代入式 (21), 利用 Boltzmann 方程 (16) 和碰撞项的对称性, 熵流的散度可以表达为

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mu} S^{\mu} \\ &= \frac{k_{BC}}{4} \int \varpi_1 \varpi_2 \varpi_3 \varpi_4 W_x f_1 f_2 f_3^* f_4^* \left(\frac{f_3 f_4 f_1^* f_2^*}{f_1 f_2 f_3^* f_4^*} - 1 \right) \cdot \\ & \quad \log \frac{f_3 f_4 f_1^* f_2^*}{f_1 f_2 f_3^* f_4^*} \quad (22) \end{aligned}$$

利用不等式 $(x-1)\log x \geq 0$ (当且仅当 $x=1$ 时等号成立), 可以得到 H 定理 $\nabla_{\mu} S^{\mu} \geq 0$ 。

考虑熵产生为零的情形, 此时

$$\frac{f_1^* f_2^* f_3 f_4}{f_1 f_2 f_3^* f_4^*} = 1$$

进一步求对数, 可得

$$\begin{aligned} & \log\left(\frac{h^d f_1}{f_1^* \mathbf{g}}\right) + \log\left(\frac{h^d f_2}{f_2^* \mathbf{g}}\right) \\ &= \log\left(\frac{h^d f_3}{f_3^* \mathbf{g}}\right) + \log\left(\frac{h^d f_4}{f_4^* \mathbf{g}}\right) \quad (23) \end{aligned}$$

因此 $\log\left(\frac{h^d f}{f^* \mathbf{g}}\right)$ 是一个碰撞不变量。根据文献[8]

中的定理 5, 碰撞不变量的形式只能取为弹性碰撞中守恒的能量、动量和粒子集体运动而产生的可加衍生量的线性组合

$$\log\left(\frac{h^d f}{f^* \mathbf{g}}\right) = -\alpha + p^{\mu} \mathcal{B}_{\mu} \quad (24)$$

其中, α 是一个标量场, 是由粒子集体运动而产生的可加衍生量, $\mathcal{B}^{\mu}$ 是一个矢量场, $-p^{\mu} \mathcal{B}_{\mu}$ 是与 $\mathcal{B}_{\mu}$ 平行的观测者测量到的无量纲化的粒子能量。通过附录 A 的计算可以说明, 这里出现的 α 与之前流体力学熵流定义中的 α 完全相同, 因此这里不再使用新的符号进行区分。

从式 (24) 反解出分布函数的形式

$$f = \frac{\mathbf{g}}{h^d} \frac{1}{e^{\alpha - \mathcal{B}_{\mu} p^{\mu}} - \zeta} \quad (25)$$

将上式代入碰撞项等于零的 Boltzmann 方程 $L_{\mathcal{H}}(f) = 0$, 可得

$$L_{\mathcal{H}}(f) = (-p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{\mu} \mathcal{B}_{\nu} + p^{\mu} \nabla_{\mu} \alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \quad (26)$$

由于粒子动量的任意性, 上式中动量的一次项和二次项需分别为零。因此, 对有质量粒子系统, 要求

$$\nabla_{\mu} \alpha = 0, \quad \nabla_{\mu} \mathcal{B}_{\nu} = 0 \quad (27)$$

即 α 是空间常量, $\mathcal{B}_{\nu}$ 是 Killing 矢量场。对于无质量粒子组成的系统, 可以得到更弱的条件

$$\nabla_{\mu} \alpha = 0, \quad \nabla_{\mu} \mathcal{B}_{\nu} = \chi g_{\mu\nu} \quad (28)$$

其中, 只需 $\mathcal{B}_{\nu}$ 是共形 Killing 矢量场。与此同时, 细致平衡态也是孤立系统总熵最大的状态 (详见本文第 4 节)。

通过附录 A 对 Euler 关系的计算, 可以得到 α 和 $\mathcal{B}^{\mu}$ 的热力学含义

$$\alpha = -\frac{\mu}{k_B T}, \quad \mathcal{B}^{\mu} = \beta U^{\mu} = \frac{1}{k_B T} U^{\mu} \quad (29)$$

2.2 带电气体系统的细致平衡

带电气体系统在切丛上的 Liouville 矢量场为

$$L_F = p^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + q F^{\mu}_{\nu} p^{\nu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \quad (30)$$

其中, F^{μ}_{ν} 是电磁张量, q 是粒子携带的电荷量。将式 (25) 代入碰撞项等于零的 Boltzmann 方程有

$$\begin{aligned} L_F(f) &= [-p^{\mu} p^{\nu} \nabla_{\mu} \mathcal{B}_{\nu} + p^{\mu} (\nabla_{\mu} \alpha - q F^{\nu}_{\mu} \mathcal{B}_{\nu})] \frac{\partial f}{\partial \alpha} \\ &= 0 \quad (31) \end{aligned}$$

可以得到带电气体系统的细致平衡条件

$$\nabla_\mu \alpha = q F_\mu^\nu \mathcal{B}_\nu, \quad \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu = \chi g_{\mu\nu} \quad (32)$$

其中,对有质量粒子组成的系统, $\chi=0$ 。方程 $\nabla_\mu \alpha = q F_\mu^\nu \mathcal{B}_\nu$ 可以改用微分形式表达: $d\alpha = q i_{\mathcal{B}} \mathbf{F}$ 。该式两边作用一次外微分,并利用李导数满足的 Cartan 公式 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}} \mathbf{F} = (di_{\mathcal{B}} + i_{\mathcal{B}} d) \mathbf{F}$ 和电磁张量的性质 $d\mathbf{F}=0$ 还可以得到

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}} \mathbf{F} = 0 \quad (33)$$

其中, $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 代表沿着矢量场 $\mathcal{B}^\mu$ 的李导数。带电气体系统的细致平衡态满足式(25)、式(32)和式(33),这些条件允许存在不为零的稳态电磁场,但要求电磁力的贡献和态平衡参量梯度 $\nabla_\mu \alpha$ 的贡献相平衡。

特别地,对于 Minkowski 时空的静态流体,平衡态温度 T 是常数,流体固有速度 $U_\nu = (-c, 0, 0, 0)$, 式(32)的第一式可以改写为

$$-\nabla_\mu \mu = q F_\mu^\nu U_\nu = -q E_\mu \quad (34)$$

其中, $E_\mu = (0, \mathbf{E})$ 是电场强度, $A_\mu = \left(-\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A}\right)$ 是电磁势。对于静态电磁场, $E_\mu = -\nabla_\mu \varphi$, 那么式(34)表明了平衡态下电化学势的空间梯度为零

$$\nabla_\mu (\mu + q\varphi) = 0 \quad (35)$$

2.3 无碰撞 Boltzmann 方程描述的系统

对于可以忽略粒子之间的碰撞的系统,可以用无碰撞 Boltzmann 方程来描述。以电磁场足够强的情况(例如等离子体)为例,此时分布函数的演化方程为

$$L_F(f) = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + q F_\mu^\nu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = 0 \quad (36)$$

碰撞项严格为零的系统中尽管熵产生率恒为零,但是系统不会经过弛豫过程,无法定义热力学意义上的平衡态。对于我们讨论的强电磁场下的气体,碰撞项可以忽略的含义是,当电磁场足够强,电磁场影响系统的时间尺度远小于系统通过碰撞进行弛豫的时间尺度。

在不忽略碰撞项的前提下,热力学平衡态可以被定义,但系统的演化被电磁场主导,难以达到热力学平衡。尽管如此,我们还是可以用局部平衡假设描述近平衡的系统,给系统定义相应的温度和化学势。在这个条件之下,我们可以进一步假设分布函数是 α 和 $\mathcal{B}_\mu p^\mu$ 的函数,即 $f(\alpha, \mathcal{B}_\mu p^\mu)$ 。分布函数 $f(\alpha, \mathcal{B}_\mu p^\mu)$ 满足无碰撞的玻尔兹曼方程(36),通过这个条件可以得到

$$L_F(f)$$

$$= p^\mu \left(\nabla_\mu \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + q F_\mu^\nu \mathcal{B}_\nu \frac{\partial f}{\partial (\mathcal{B}_\sigma p^\sigma)} \right) + p^\mu p^\nu \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu \frac{\partial f}{\partial (\mathcal{B}_\sigma p^\sigma)} = 0$$

进一步根据粒子动量的随机性,可以得到约束条件

$$\nabla_\mu \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + q F_\mu^\nu \mathcal{B}_\nu \frac{\partial f}{\partial (\mathcal{B}_\sigma p^\sigma)} = 0, \quad \nabla_\mu \mathcal{B}_\nu = \chi g_{\mu\nu} \quad (37)$$

其中,对有质量粒子组成的系统 $\chi=0$ 。注意此时分布函数的形式不一定与式(25)相同,系统的状态也不一定是热力学平衡态。也就是说,任意满足的式(37)的 $f(\alpha, \mathcal{B}_\mu p^\mu)$ 都可以作为无碰撞系统的分布函数。特别地,如果分布函数的形式被限制为 $f(\alpha - \mathcal{B}_\mu p^\mu)$, 那么约束条件(37)退化为式(32)。

等离子体物理中更关心的平衡态是准静电平衡态。由于等离子体的 Debye 屏蔽,在大于 Debye 长度的尺度上,可以认为系统内部电磁场强为零。再次强调:准静电平衡态不是热力学平衡态。

3 随机热力学中的平衡态

随机热力学关心 Brown 粒子在热库中的运动, Brown 粒子和组成热库的粒子都视为经典粒子(对应于 $\zeta=0$),背景热库始终处于细致平衡态。描述 Brown 粒子运动的约化 Fokker-Planck 方程为^[9]

$$\frac{1}{m} L_{\mathcal{H}}(f) = \nabla_i^{(h)} \mathcal{I}^i[f] \quad (38)$$

其中, f 是 Brown 粒子的单粒子分布函数, $\nabla_i^{(h)}$ 是质壳上的协变导数, $\mathcal{I}^i[f]$ 描述了热库通过随机力和阻尼力对 Brown 粒子的作用

$$\mathcal{I}^i[f] = \frac{1}{2} \mathcal{D}^{ij} \nabla_j^{(h)} f - \mathcal{K}^{iv} U_v f \quad (39)$$

其中, $\mathcal{D}^{ij} = \mathcal{R}_\alpha^i \mathcal{R}_\alpha^j$ 是扩散张量, $\mathcal{R}_\alpha^i$ 是随机振幅, 扩散张量是一个半正定的二次型, $\mathcal{K}^{iv} U_v$ 表示阻尼力, $\mathcal{K}^{iv}$ 是阻尼系数, U_v 是热库的固有速度。 $\mathcal{I}^i[f]$ 直接决定了热库和 Brown 粒子间的传热率^[10]

$$Q[f] = \int \varpi m Z_\nu \mathcal{I}^\nu[f] = -Z_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}[f] \quad (40)$$

其中, Z_ν 是一般观测者 $\mathcal{O}$ 的固有速度。

Brown 粒子与热库粒子间不交换粒子而仅交换能量,该能量完全由 $Q[f]$ 刻画,因此, $Q[f]=0$

必然暗示着 Brown 粒子与热库之间达成了热平衡。但是 $Q[f]=0$ 并不一定意味着 $\mathcal{I}_\mu[f]=0$, 后者实际上是更严格的条件, 我们称之为细致热平衡条件(detailed thermal equilibrium)。细致热平衡的含义也容易从 $\mathcal{I}_\mu[f]$ 的定义中看出: 热库粒子提供的随机力的净效应与阻尼力相平衡, Brown 粒子和热库间没有净能量动量交换。通过考虑低温极限并选择合适的阻尼模型, 我们可以得出相对论 Einstein 关系

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} = 2T\mathcal{K}^{\mu\nu} \quad (41)$$

其中, T 是热库共动观测者观测到的温度。这样我们就从约化 Fokker-Planck 方程出发得到了通过 Einstein 关系确定的平衡态, 这同时也是相对论随机粒子热力学讨论的出发点。

类似于流体力学和动理学, 细致热平衡态下 Brown 粒子的熵产生也为零。Brown 粒子的熵流被定义为

$$S'' = -k_B \int \boldsymbol{\omega} p'' f \log f \quad (42)$$

热库始终处于细致平衡态, 热库的熵流满足 Euler 关系(见附录 A)

$$\begin{aligned} S_R'' &= k_B (\Xi_R'' - \mathcal{B}_\nu T_R'' + \alpha_R N_R'') \\ &= k_B ((1 + \alpha_R) N_R'' - \mathcal{B}_\nu T_R'') \end{aligned} \quad (43)$$

其中, 下标 R 表示热库的流体力学变量, 第二个等号用到了平衡态 Boltzmann 气体($\zeta=0$)满足的条件 $\Xi_R'' = N_R''$ 。Brown 粒子的熵产生率和热库的熵产生率分别为

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} \nabla_\mu S'' &= - \int \boldsymbol{\omega} m f^{-1} \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \mathcal{I}''[f] \\ \frac{1}{k_B} \nabla_\mu S_R'' &= - \int \boldsymbol{\omega} m \mathcal{B}_\mu \mathcal{I}''[f] \end{aligned} \quad (44)$$

容易看出, 细致热平衡的条件下($\mathcal{I}''[f]=0$), Brown 粒子和热库的熵产生均为零。

需要注意, 仅通过熵产生为零的条件不能导出细致热平衡条件, 存在弛豫过程是定义热力学平衡态的必要条件。对于扩散张量 $\mathcal{D}^{ij}$ 不满秩的情况, 在某些维度上没有热库对 Brown 粒子的相互作用, 在这些维度上 Brown 粒子的运动是自由的, 没有弛豫过程, 也就无法定义热力学平衡态。如果扩散张量 $\mathcal{D}^{ij}$ 满秩的情况, 熵产生为零与细致热平衡条件等价。

4 讨论

本文讨论了相对论背景下的流体力学、动理

学和随机热力学对平衡态的定义。尽管我们建议的热力学平衡态的定义(经过弛豫过程后达到的熵产生为零的状态)适用于上面讨论的三种理论, 但是以相同方式定义出的热力学平衡态在不同理论中仍然是有区别的。下面以大质量中性粒子构成的孤立气体系统为例, 探讨流体力学和动理学的热力学平衡态的区别。

流体力学作为一个宏观理论, 它不关心具体的微观机制, 流体系统的熵只要求满足两个条件: 平衡态熵产生率为零, 偏离平衡熵产生率为正。流体的运动方程 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \nabla_\mu N^\mu = 0$ 无法给出进一步的约束。也就是说, 在某些可能的流体理论中, 流体的平衡态不是系统总熵最大的状态, 这会导致流体平衡态的不稳定性^[11,12], 一个典型的例子是 Hiscock 证明了一阶流体在 Eckart frame 和 Landau frame 中是不稳定的^[13]。

作为对比, 动理学理论明确了粒子之间的相互作用, 对熵的演化有着更强的限制。为了简单起见, 我们将通过对中性气体系统的计算说明, 动理学描述的细致平衡态总是系统总熵最大的状态(对于带电气体系统这个结论也成立)。作为孤立系, 流体系统的总粒子数和总能量守恒, 利用式(14)我们可以将守恒条件写为

$$\int_\Sigma \boldsymbol{\eta}_\Sigma \left(-\frac{1}{c^2} \delta N^\mu Z_\mu \right) = -\frac{1}{c} \int \boldsymbol{\eta}_\Sigma \wedge \boldsymbol{\omega} p'' Z_\mu \delta f = 0 \quad (45)$$

$$\int_\Sigma \boldsymbol{\eta}_\Sigma \left(\frac{1}{c^2} \delta T^{\mu\nu} \mathcal{B}_\mu Z_\nu \right) = \frac{1}{c} \int \boldsymbol{\eta}_\Sigma \wedge \boldsymbol{\omega} p'' p^\nu \mathcal{B}_\mu Z_\nu \delta f = 0 \quad (46)$$

其中, $\boldsymbol{\eta}_\Sigma$ 是 Cauchy 面 Σ 上的体元, δN^μ 和 $\delta T^{\mu\nu}$ 表示系统分布函数产生一个小变化 δf 后粒子流和能量动量张量相应的变化, Z_μ 是正交于 Cauchy 面 Σ 的观测者固有速度。根据式(15), 系统总熵的相应变化是

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{k_B}{c} \int \boldsymbol{\eta}_\Sigma \wedge \boldsymbol{\omega} Z_\mu p'' \left[\log \frac{h^d f_0}{\mathfrak{g} + \zeta h^d f_0} \delta f + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g} f_0 + \zeta h^d f_0^2} \delta f^2 + o(\delta f^3) \right] \\ &= \frac{k_B}{c} \int \boldsymbol{\eta}_\Sigma \wedge \boldsymbol{\omega} Z_\mu p'' \left[(-\alpha + \mathcal{B}_\sigma p^\sigma) \delta f + \right. \\ &\quad \left. \frac{h^d}{2\mathfrak{g}} e^{-\alpha + \mathcal{B}_\sigma p^\sigma} (e^{\alpha - \mathcal{B}_\sigma p^\sigma} - \zeta)^2 \delta f^2 + o(\delta f^3) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

其中

$$f_0 = \frac{g}{h^d} \frac{1}{e^{a-B_\mu p^\mu} - \zeta}$$

是满足条件(27)的细致平衡分布函数。由于式(45)和式(46)的约束,式(47)中括号里面 δf 的一阶项对于积分的贡献为零,因此,截止到 δf 的二阶

$$\delta S = \frac{k_B}{c} \int \eta_\Sigma \wedge \omega Z_\mu p^\mu \frac{h^d}{2g} e^{-a+B_\sigma p^\sigma} (e^{a-B_\sigma p^\sigma} - \zeta)^2 \cdot \delta f^2 < 0 \quad (48)$$

其中的小于号来自两个指向未来的类时矢量的缩并 $Z_\mu p^\mu < 0$ 。因此

$$\frac{\delta S}{\delta f} \Big|_{f_0} = 0, \quad \frac{\delta^2 S}{\delta f^2} \Big|_{f_0} < 0$$

根据 H 定理,细致平衡态一定是系统总熵最大的状态,这也意味着动理学的细致平衡态一定是稳定的^[12]。

最后,有必要指出:由于在相对论系统中时间不再具有绝对性,相对论热力学中的某些概念——例如准静态热力学过程——含义变得比较微妙。有鉴于此,本文并没有尝试像文^[1]一样给出适用于整个准静态热力学过程的平衡态的定义。

附录 A 通过动理学得到一阶流体力学的 Euler 关系和 Gibbs-Duhem 关系

根据动理学对熵流 S^μ 的定义式(15),在局部平衡阶,我们可以得到协变的 Euler 关系和协变的 Gibbs-Duhem 关系

$$S^{(0)\mu} = -k_{BC} \int \omega p^\mu f^{(0)} \left[\log \left(\frac{h^d f^{(0)}}{f^{(0)*} g} \right) - \frac{g \log f^{(0)*}}{\zeta h^d f^{(0)}} \right] \\ = k_B (\Xi^\mu - B_\nu T^{(0)\mu\nu} + \alpha N^{(0)\mu}) \quad (49)$$

$$d\Xi^\mu = T^{(0)\mu\nu} dB_\nu - N^{(0)\mu} d\alpha \quad (50)$$

其中, $f^{(0)} = \frac{g}{h^d} \frac{1}{e^{a-B_\mu p^\mu} - \zeta}$ 是局部平衡阶的分布函数, $S^{(0)\mu}$, $T^{(0)\mu\nu}$, $N^{(0)\mu}$ 的上标⁽⁰⁾表示局部平衡阶的流体力学变量,

$$\Xi^\mu = P B^\mu = c \int \omega p^\mu \frac{g}{\zeta h^d} \log(1 + \zeta g^{-1} h^d f^{(0)}) \quad (51)$$

考虑对局部平衡阶的一阶非平衡修正 $f^{(1)}$,对于近平衡流体, $f^{(1)}$ 是一个小量,将熵流的定义式展开到一阶

$$S^{(1)\mu} = -k_{BC} \int \omega p^\mu f^{(1)} \log \frac{f^{(0)}}{g/h^d + \zeta f^{(0)}} \\ = k_{BC} \int \omega p^\mu f^{(1)} (\alpha - B_\nu p^\nu) \\ = k_B (\alpha N^{(1)\mu} - B_\nu T^{(1)\mu\nu}) \quad (52)$$

因此,截止到流体力学的一阶描述,熵流可以写为

$$S^\mu = S^{(0)\mu} + S^{(1)\mu} = k_B (P B^\mu - B_\nu T^{\mu\nu} + \alpha N^\mu) \quad (53)$$

与流体力学中对熵流的定义式(2)比较,我们有

$$\alpha = -\frac{\mu}{k_B T}, \quad B^\mu = \beta U^\mu = \frac{1}{k_B T} U^\mu \quad (54)$$

参 考 文 献

- [1] 赵柳. 热力学平衡态的含义[J]. 物理与工程, 2023, 33(5): 3-8. ZHAO L. The meaning of thermodynamic equilibrium[J]. Physics and Engineering, 2023, 33(5): 3-8. (in Chinese)
- [2] HISCOCK W A, LINDBLOM L. Stability and causality in dissipative relativistic fluids[J]. Annals of Physics, 1983, 151(2): 466-496.
- [3] DISCONZI M M. Recent developments in mathematical aspects of relativistic fluids[J]. arXiv: 2308.09844.
- [4] KOVTUN P. Lectures on hydrodynamic fluctuations in relativistic theories[J]. J. Phys. A, 2012, 45: 473001.
- [5] HAO X, LIU S, ZHAO L. Relativistic transformation of thermodynamic parameters and refined Saha equation[J]. Commun. Theor. Phys., 2023, 75(3): 035601.
- [6] SARBACH O, ZANNIAS T. Relativistic kinetic theory: An introduction[C]. AIP Conf. Proc., 2013, 1548(1): 134-155.
- [7] CERCIGNANI C, KREMER G M. The relativistic Boltzmann equation: Theory and applications [M]. Berlin: Springer, 2002.
- [8] ACUÑA CÁRDENAS R O, GABARRETE C, SARBACH O. An introduction to the relativistic kinetic theory on curved spacetimes[J]. Gen. Rel. Grav., 2022, 54(3): 23.
- [9] CAI Y-F, WANG T, ZHAO L. Relativistic stochastic mechanics II: Reduced Fokker-Planck equation in curved spacetime[J]. J. Statist. Phys., 2023, 190: 181.
- [10] WANG T, CAI Y, CUI L, et al. General relativistic stochastic thermodynamics[J]. arXiv: 2311.04025.
- [11] GAVASSINO L, ANTONELLI M, HASKELL B. When the entropy has no maximum: A new perspective on the instability of the first-order theories of dissipation[J]. Phys. Rev. D, 2020, 102(4): 043018.
- [12] GAVASSINO L. Applying the gibbs stability criterion to relativistic hydrodynamics[J]. Class. Quant. Grav., 2021, 38(21): 21LT02.
- [13] HISCOCK W A, LINDBLOM L. Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories[J]. Phys. Rev. D, 1985, 31: 725-733.