



从库珀对凝聚波函数推广伦敦方程

李志兵

(中山大学·深圳,理学院,广东 深圳 518107)

摘 要 伦敦方程是基于实验现象建立的关于超导体的唯像理论。在伦敦唯像理论之后,巴丁、库珀和施里弗建立了关于超导现象的 BCS 微观理论。BCS 理论认为,在临界温度以下,金属中出现宏观数目的由两个电子构成的准粒子,这些被称为库珀对的准粒子凝聚在同一量子态从而形成超导态。本文基于 BCS 理论的物理图像详细推导伦敦方程,强调密度幅的定域规范不变性,并考虑了库珀对密度依赖于时间和位置的情形。

关键词 超导体;伦敦方程;波函数

GENERALIZATION OF LONDONS' EQUATIONS BASED ON THE WAVE-FUNCTION OF THE COOPER'S PAIRS

LI Zhibing

(School of Science, Shenzhen Campus of Sun Yat-sen University, Shenzhen, Guangdong 518107)

Abstract The first phenomenological theory for the superconductivity consists of two Londons' equations. After Londons' theory, Bardeen, Cooper, and Schrieffer set up the microscopic theory (BCS theory) for conventional superconductors. The BCS theory states that, below the critical temperature, electrons of a metal are pairing to form quasi-particles, named as Cooper's pairs. The superconducting state is the condensate of macroscopic number of Cooper's pairs in a unique quantum state. We give a detail derivation of Londons' equations based on the BCS picture, emphasizing the local gauge invariant and taking the variation of the density of Cooper's pairs into account.

Key words superconductivity; Londons' theory; wave function

唯像的伦敦第一和第二方程,和麦克斯韦方程组一道,能够描写单连通超导态的主要宏观现象^[1],例如迈斯纳效应和超导电性。对伦敦方程适用的情形,量子理论原则上能够推导出伦敦方程。事实上巴丁、库珀和施里弗^[2]建立关于超导态的微观理论之后不久,用量子流体描写超导态的理论已经被写进教科书。本文的结果基本上和费曼物理学讲义^[3]的结果一样,只是推导过程略有不同,且考虑了费曼有意忽略掉的库珀对密度

随时间和空间位置变化的贡献。在实际情形,库珀对密度的变化极小,所以费曼不考虑它的效应。详细推导它的效应可以作为一个教学练习。

根据常规超导体的巴丁-库珀-施里弗理论(BCS 理论),超导载流子是由两个电子构成的准粒子,称为库珀对,带电荷 $q = -2e$ 。我们认为库珀对准粒子服从玻色统计,在临界温度以下,宏观数目的库珀对凝聚在库珀对的基态上。只考虑库珀对大小可以忽略的情形,凝聚体用一个平均密

收稿日期: 2024-04-29; 网络首发日期: 2024-05-28

作者简介: 李志兵,中山大学·深圳,理学院教授, stslzb@mail.sysu.edu.cn。

引文格式: 李志兵. 从库珀对凝聚波函数推广伦敦方程[J]. 物理与工程, 2024, 34(3): 5-7.

Cite this article: LI Z B. Generalization of Londons' equations based on the wave-function of the Cooper's pairs[J]. Physics and Engineering, 2024, 34(3): 5-7. (in Chinese)

度幅来描写。平均密度幅的绝对值平方等于库珀对密度, 设其为 $n_s(\mathbf{x}, t)$, 则平均密度幅可写成

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{n_s} e^{i\chi(\mathbf{x}, t)} \quad (1)$$

根据量子力学, 库珀对凝聚体的超导电流为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \frac{q}{m_s^*} \text{Re} [\Psi^* (-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}) \Psi] \\ &= \frac{\alpha}{q} [\hbar\nabla\chi(\mathbf{x}, t) - q\mathbf{A}] \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\alpha = q^2 n_s / m_s^*$, 而 m_s^* 是库珀对的有效质量。超导电流满足连续性方程,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = -\frac{q \partial n_s}{\partial t} \quad (3)$$

此外在绝热近似下, 凝聚体平均动能密度是随宏观标势 φ 连续变化的时空函数, 由式(1)给出

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} \left[\Psi^* \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\varphi \right) \Psi \right] \\ &= -n_s \hbar \frac{\partial \chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - q n_s \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

解出

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{w}{\hbar n_s} - \frac{q}{\hbar} \varphi \quad (5)$$

在库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 下, 标势 φ 是库仑势, 满足

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon} (q n_s - e n + \rho_{ion}) \quad (6)$$

其中 n 是正常电子载流子的密度, ρ_{ion} 是离子密度。

完整的定域规范变换是电磁势和波函数相位的联合变换,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi \quad (7)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \dot{\phi} \quad (8)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = \chi + \frac{q}{\hbar} \phi \quad (9)$$

其中 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 是任意可微函数。易见电流密度式(2)和动能密度在定域规范变换下均不变。

若能用物理可测量表示相位 χ , 则电磁势不能有任何任意性。这需要一种能够唯一确定电磁势的规范条件。当相位 χ 可测量时还意味着它是一个时间和空间坐标的单值函数, 这个条件只在单连通区域可以得到保证。在能够唯一确定电磁势的规范条件下, 式(2)便是电流密度和电磁势的定域关系。

我们选择伦敦规范,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{A} |_S = 0 \quad (10)$$

第一式正是关于矢势的库仑规范条件, 第二式要

求在超导边界面(记为 S)的矢势法向分量等于零, 其中 $\mathbf{e}_n$ 是 S 的法向单位矢量。我们已经熟知, 库仑规范条件是可以实现的。下面证明, 在单连通区域伦敦规范条件能够唯一地确定 $\mathbf{A}$ 和 χ 。假如两个矢势 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$, 联系它们有规范变换 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi$ 。设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$ 均满足库仑规范条件, 则函数 ϕ 必须满足泊松方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 。加上伦敦规范条件第二式的限制, 则 ϕ 除了满足泊松方程外还在边界面 S 上满足边界条件

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (11)$$

根据泊松方程解的唯一性定理, 在此区域内 ϕ 是常数, 从而 $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, 即 $\mathbf{A}$ 是唯一的。根据式(9), 当 ϕ 确定到一个常数, χ 也确定到一个常数。为了直接看出 χ 的唯一性, 对式(2)两边求散度,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}_s &= \frac{\nabla \alpha}{q} \cdot [\hbar \nabla \chi(\mathbf{x}, t) - q\mathbf{A}] + \frac{\alpha \hbar}{q} \nabla^2 \chi(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\nabla n_s}{n_s} \cdot \mathbf{J}_s + \frac{\alpha \hbar}{q} \nabla^2 \chi(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (12)$$

利用连续性方程式(3)得

$$\nabla^2 \chi = -\frac{q}{\alpha \hbar} \left[q \frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{\nabla n_s}{n_s} \cdot \mathbf{J}_s \right] \quad (13)$$

上式是关于 χ 的泊松方程, 右边是由超导体区域内物理可测量给定的分布函数。用 $\mathbf{e}_n$ 点乘式(2)两边得

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{J}_s |_S = \frac{\alpha}{q} [\hbar \mathbf{e}_n \cdot \nabla \chi(\mathbf{x}, t) - q \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{A}]_S \quad (14)$$

超导体的界面上没有法向超导电流, 从而左边等于零。此外, 伦敦规范条件式(10)下, 上式右边第二项等于零。因此在超导表面上 $\mathbf{e}_n \cdot \nabla \chi |_S = 0$ 。根据泊松方程解的唯一性定理, χ 确定到相差一个常数, 取此常数为零, 则相位函数 χ 完全确定。

对式(2)两边取旋度, 利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 便得到推广的伦敦第二方程,

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\alpha \mathbf{B} + \frac{\nabla n_s}{n_s} \times \mathbf{J}_s \quad (15)$$

当库珀对密度均匀时, 上式回复到传统的伦敦第二方程。

为了得到伦敦第一方程, 对式(2)取时间的偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s + \frac{\alpha \hbar}{q} \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (16)$$

把式(5)代入上式得

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s - \alpha \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \frac{\alpha}{q} \nabla \frac{\omega}{n_s} \quad (17)$$

利用电场和电磁势的关系

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (18)$$

将(17)写成,

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} = \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{E} - \frac{\alpha}{q} \nabla \frac{\omega}{n_s} \quad (19)$$

这就是推广的伦敦第一方程。对于稳恒和空间均匀的超导状态,式(19)回到传统的伦敦第一方程。

为了更清晰地反映伦敦第一方程的物理意义,让我们利用薛定谔方程求 ω 。荷电 q 粒子的非相对论哈密顿量算符为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_s^*} (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \quad (20)$$

用它代替式(4)中的时间偏导数项,

$$\begin{aligned} \omega &= \text{Re} \left[\Psi^* \left(\frac{1}{2m_s^*} (-i\hbar \nabla - q\mathbf{A})^2 \right) \Psi \right] \\ &= \frac{n_s}{2m_s^*} (\hbar \nabla \chi - q\mathbf{A})^2 - \frac{\hbar^2 \sqrt{n_s}}{2m_s^*} \nabla^2 \sqrt{n_s} \end{aligned} \quad (21)$$

利用式(2)便得到库珀对平均动能密度的表达式,

$$\omega = \frac{1}{2\alpha} J_s^2 - \frac{\hbar^2 \sqrt{n_s}}{2m_s^*} \nabla^2 \sqrt{n_s} \quad (22)$$

由 $\mathbf{J}_s = qn_s \mathbf{v}$ 可见上式第一项是库珀对的非相对论动能密度: $\frac{1}{2} m_s^* n_s v^2$ 。第二项是量子效应引起的等效动能密度,没有经典解释。把式(22)代入式(19),得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} &= \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{E} - \frac{n_s}{2q} \nabla \frac{J_s^2}{n_s^2} + \\ &\quad \frac{\alpha \hbar^2}{2qm_s^*} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{n_s}} \nabla^2 \sqrt{n_s} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

利用矢量分析公式改写第三项,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} &= \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{E} - \frac{1}{q} \mathbf{J}_s \times \nabla \times \frac{\mathbf{J}_s}{n_s} - \\ &\quad \frac{1}{q} \mathbf{J}_s \cdot \nabla \frac{\mathbf{J}_s}{n_s} + \frac{\alpha \hbar^2}{2qm_s^*} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{n_s}} \nabla^2 \sqrt{n_s} \right) \\ &= \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{E} - \frac{1}{qn_s} \mathbf{J}_s \times \nabla \times \mathbf{J}_s + \\ &\quad \frac{1}{qn_s^2} \mathbf{J}_s \times (\nabla n_s) \times \mathbf{J}_s - \frac{1}{q} \mathbf{J}_s \cdot \nabla \frac{\mathbf{J}_s}{n_s} + \\ &\quad \frac{\alpha \hbar^2}{2qm_s^*} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{n_s}} \nabla^2 \sqrt{n_s} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

由推广的伦敦第二方程式(15)消去电流的旋度,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} &= \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{E} + \frac{\alpha}{qn_s} \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - \\ &\quad \frac{1}{q} \mathbf{J}_s \cdot \nabla \frac{\mathbf{J}_s}{n_s} + \frac{\alpha \hbar^2}{2qm_s^*} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{n_s}} \nabla^2 \sqrt{n_s} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

用 $\mathbf{J}_s = qn_s \mathbf{v}$ 改写上式第四项,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} &= \frac{1}{n_s} \frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{J}_s + \alpha \mathbf{E} + \frac{\alpha}{qn_s} \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - qn_s \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \\ &\quad \frac{\alpha \hbar^2}{2qm_s^*} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{n_s}} \nabla^2 \sqrt{n_s} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

第一项来自库珀对密度变化,第二和第三项分别是电场力和磁场力的贡献,第五项是纯量子效应。第四项来自流体时间导数与偏导数的运流导数关系。对电流密度的时间导数要理解为对同一点凝聚体流场的时间偏导数,而在牛顿第二定律中对速度的导数是给定物质的加速度,因为给定物质相对流体运动,所以给定物质的加速度和固定点流场的速度变化率不一样。若只考虑电磁力,牛顿第二定律为

$$\begin{aligned} n_s m_s^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= n_s m_s^* \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \\ &= qn_s (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (27)$$

因此

$$qn_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \alpha \mathbf{E} + \frac{\alpha}{qn_s} \mathbf{J}_s \times \mathbf{B} - qn_s \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (28)$$

上式右边三项分别对应式(26)右边第二、三和四项。

小结

把超导态看作没有相互作用的库珀对凝聚在同一量子态而构成的一种量子流体。这个量子流体用代表库珀对密度幅的复函数来描写,具有定域规范对称性。对单连通超导体,在伦敦规范下可以导出含量子修正的推广的伦敦第一和第二方程。在实际情形,量子修正、密度变化和不均匀性的影响都非常小,忽略它们的效应后,推广的伦敦方程回到传统伦敦方程。

参考文献

- [1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [2] BARDEEN J, COOPER L N, SCHRIEFFER J R. Theory of superconductivity[J]. Phys. Rev., 1957, 108: 1175.
- [3] The Feynman Lecture on Physics, Vol. III 21[M]. 新加坡: 世界图书出版公司, 2004.